

Jednoznaczność Rekonstrukcji Powierzchni Oświetlonej z Dwóch Kierunków

Ryszard Kozera

School of Comp. Sc. and Software Engineering
The University of Western Australia
Perth, Australia

1. Kształt z Cieniowania: Shape from Shading*

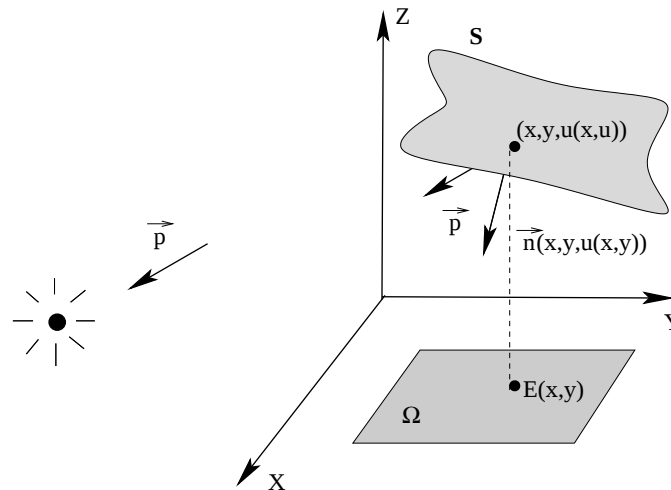
SfS: pow. $S \subset \mathbb{R}^3$ z obrazu $E : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

Analiza obrazu (medycyna, zdj. satelit.), robotyka, przemysł.

Model **SfS**: rów. irradiancji ($S = \text{wykres } C^1 \ni u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$):

$$\boxed{F_R(\vec{n}(x, y, u(x, y))) = E(x, y) .} \quad \vec{n} \perp S \quad (\text{RI})$$

Fun. rozpraszania F_R : opisuje odbijanie światła od S .



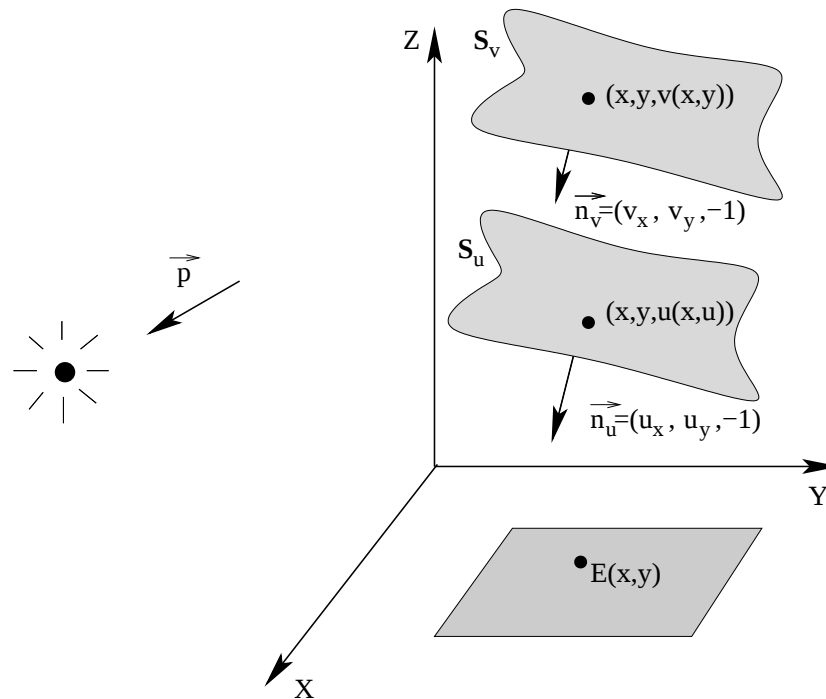
Rys. 1. Stały kierunek oświetlenia $\vec{p}$.

***SfS** rzut $\Pi : 3\text{D-obiekt} \mapsto 2\text{D-dane} \Rightarrow$ **SfS prob. odwrot.** ($\Pi^{-1}(E) = S$)?

Fun. rozpraszania (S pokrywa jednorodny materiał):

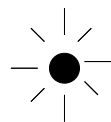
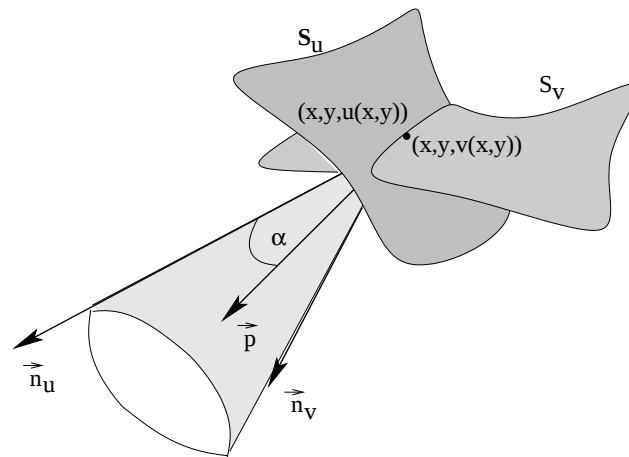
- estymacja F_R (półsfery kalibracyjna)
- modelowanie F_R (prawa fizyki: optyka)

(RI) $\Rightarrow$ S modulo translacja $\parallel$ osi Z (ident. kształty S_u i S_v z $v = u + C$).



Rys. 2. Normalne $\vec{n}_u = \vec{n}_v \Rightarrow F_R(\vec{n}_u) = F_R(\vec{n}_v) = E(x, y)$.

Pow. Lamberta $\Rightarrow \boxed{\mathbf{F}_R(\vec{n}(x, y, u(x, y))) \propto \cos(\alpha)} = E(x, y):$

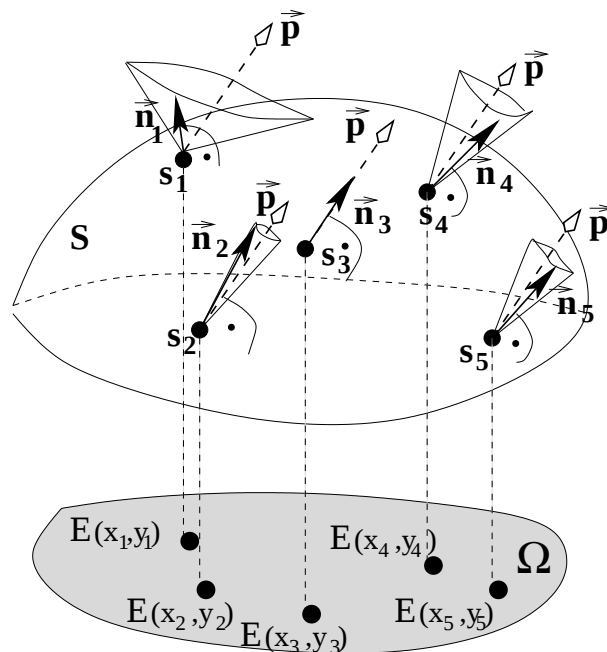


Rys. 3. $\vec{n}_u$ i $\vec{n}_v$ na stożku o osi $\vec{p}$ i kącie $\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{n}_{u,v} | \vec{p} \rangle}{\|\vec{n}_{u,v}\| \|\vec{p}\|}}$.

Ciągłe $\vec{n}_u(s) = (u_x, u_y, -1)$ ($\Rightarrow \nabla u \in C^0$) dla $s \in S$.

(RI) dla **pow. Lamberta** S:

$$\boxed{\frac{p_1 u_x(x, y) + p_2 u_y(x, y) - p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \sqrt{u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) + 1}} = E(x, y)} \quad \text{(RIL)}$$



Rys. 4. $s_i = (x_i, y_i, u_i) \in S \Rightarrow \vec{n}_i$ na stożku o osi $\vec{p}$ i $\cos(\alpha_i) = E(x_i, y_i)$.

$\forall s \in S$ ustal. $\exists \infty$ wiele normal.* $\vec{n}_s \perp S$.

$\vec{n}_s \perp S$ na $\Omega \Rightarrow$ i) ciągłe i “całkowalne”.

“Czesanie” pola $\vec{n}_s$ w takt i) redukuje ilość rozw. (RIL).

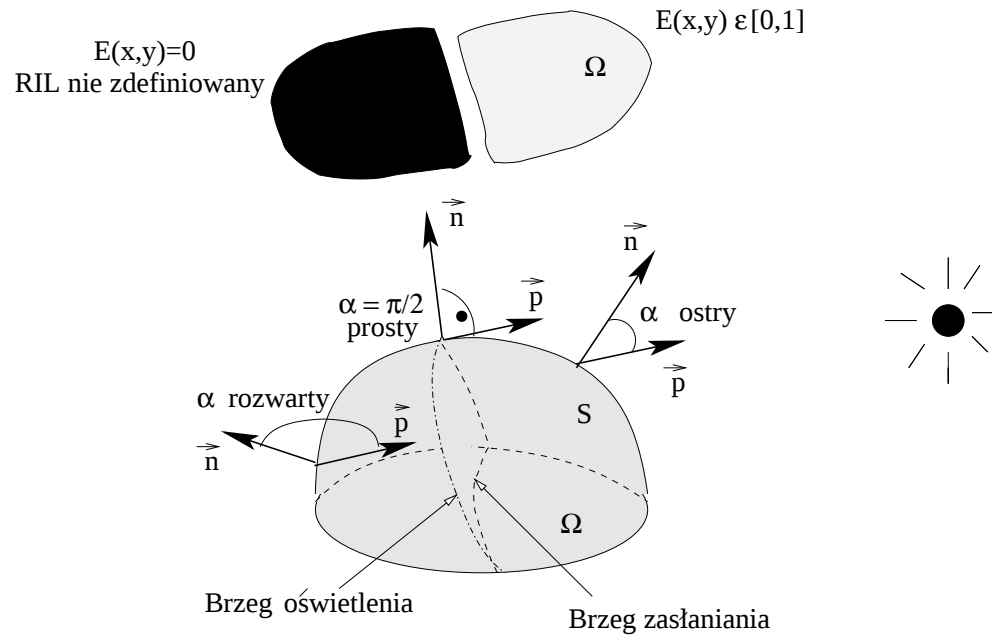
* $\vec{p} \parallel \vec{n}_s \Rightarrow$ stożek $\equiv$ osi $\vec{p}$ - w tym $s \in S$ max. inten. = 1 ($E(x_3, y_3) = 1$).

Pow. Lamberta (idealnie matowa): np. siarczek baru, węgiel magnezu, papier, piasek lub matowa farba.

(RIL): nielin. rów. róż. częst. 1-ego rzędu ($u \in C^1(\Omega)$) na

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \mathbf{E}(x, y)\}.$$

Ω - obraz oświet. części S ($-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cos(\alpha)$).



Rys. 5. Ω - obraz oświetlonej części S .

SfS: dla $(RI(L))$ 4 istotne zagadnienia:

- istnienie rozwiązań
- jednoznaczność
- rekonstrukcja S (algorytm)
- rzeczywiste/zaszumione/dyskretne dane

SfS $\Rightarrow$ **generyczna niejednozn.** (np. $\vec{p} = (0, 0, -1)$):

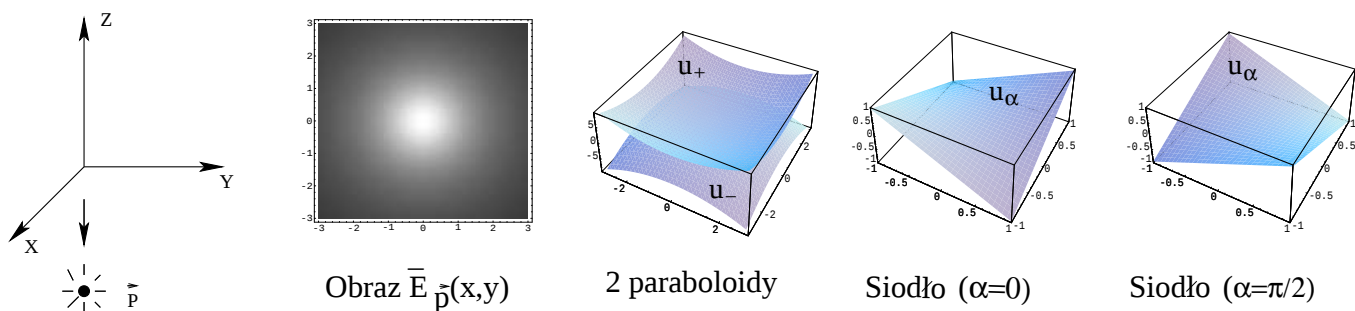
Przyk. 1.: półsfera - jednozn.

- $u \in C^2$ - **TAK** ($v = \pm u + C$)
- $u \in C^1$ - **NIE** ($\exists \infty$ S siodła $\notin C^2(\Omega)$) $\square$

Przyk. 2.: $\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} = \bar{E}_{\vec{p}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} *$

$$u_{\pm}(x, y) = \pm 0.5(x^2 + y^2),$$

$$u_{\alpha}(x, y) = (x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha))(y \cos(\alpha) - x \sin(\alpha)), \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$



Rys. 6. Na $\Omega = [-3, 3]^2$ $\boxed{\exists \infty \text{ wiele } S \in C^2}$ z obrazem $\bar{E}$. $\square$

***Ekstra lustrzana niejednozn.:** $\pm u$ (oprócz $u = v + C$).

Jednoznaczność (poprawiają):

1. **więzy** na S ($u \in C^2$; S wyp./wkl./Morse'a)
2. **ekstra dane** (war. brzegowe $S|_{\partial\Omega}, \vec{n}|_{\partial\Omega}$; osobliwości E)

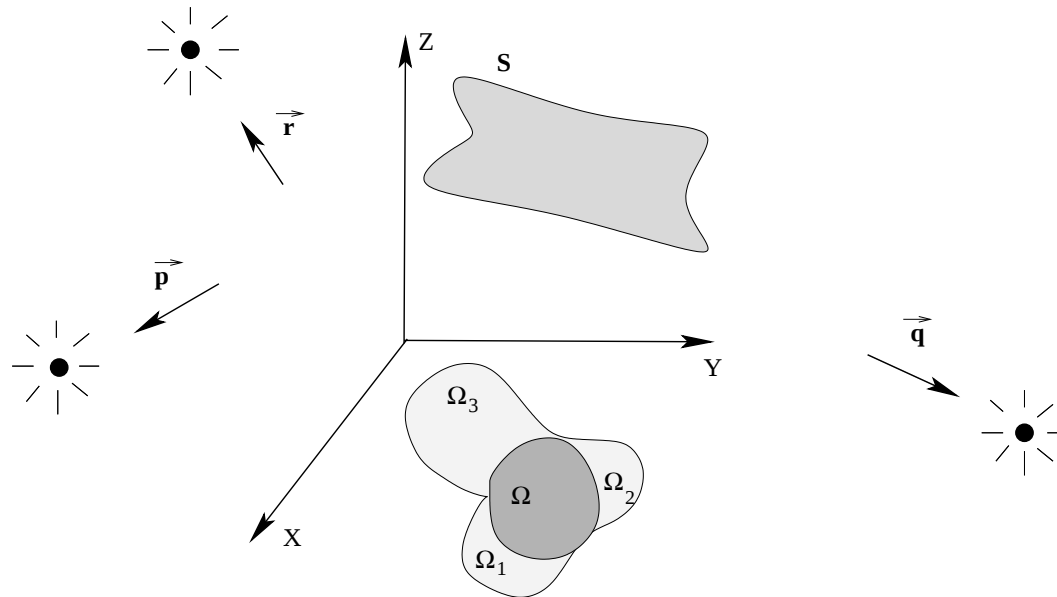
1,2 - dobrane do **SfS** - a nie do matemat. (RI).

Właściwe ekstra dane (dla 1,2)?

Wieloźródłowe oświetlanie S - Fotometria Stereo.

2. Fotometria Stereo

Fotometria Stereo (FS(N))- oświetlanie S z N kier.



Rys. 7. $N = 3$; $\Omega = \bigcap_{i=1}^3 \Omega_i$ - wspólnie oświetlona część S .

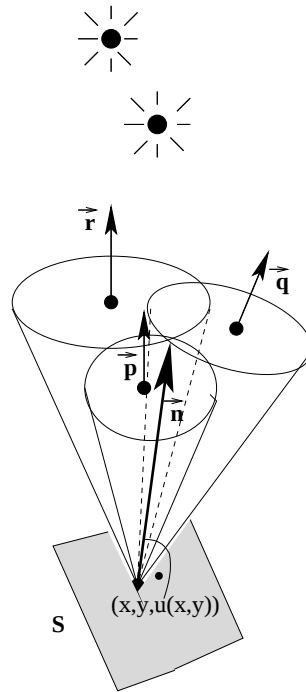
Oświetlanie: sekwencyjne (jednoczesne: np. światło spolaryzowane)
dla pomiaru E_i , $1 \leq i \leq N$.

Ilość źródeł światła a jednozn. i rekonstrukcja S ?

Fotometria 3-źródłowa FS3*:

$$\boxed{\frac{\langle \vec{n} | \vec{p} \rangle}{\|\vec{n}\| \|\vec{p}\|} = E_1(x, y), \quad \frac{\langle \vec{n} | \vec{q} \rangle}{\|\vec{n}\| \|\vec{q}\|} = E_2(x, y), \quad \frac{\langle \vec{n} | \vec{r} \rangle}{\|\vec{n}\| \|\vec{r}\|} = E_3(x, y).} \quad (3\text{RIL})$$

(3RIL): $\det(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) \neq 0 \Rightarrow \exists ! 1$ pole $\vec{n}(x, y) \perp S$ na $\Omega = \bigcap_{i=1}^3 \Omega_i$.



Rys. 8. (3RIL) : geometria jednozn. $\vec{n}$ ($\Rightarrow$ i S).

Obrazy **pow. Lamberta** $S \Rightarrow \vec{n}$ gradientowe.

$$*\vec{n} = (u_x, u_y, -1).$$

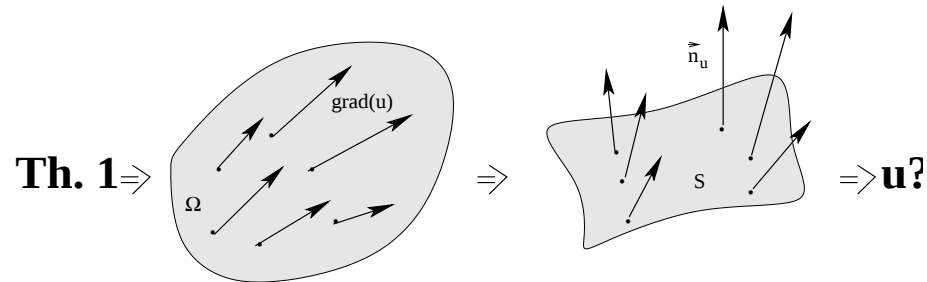
FS3 - algorytm rekonstrukcji S:

(i) **Gradient** (u_x, u_y) (**algebra**) $(\Rightarrow \vec{n} \perp S)$:

Tw. 1. (3RIL) i kierunki oświetlenia $\notin$ płaszczyźnie $\Rightarrow$

$$u_x = f_1(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) , \quad u_y = f_2(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) .$$

(1)



Rys. 9. (3RIL) $\Rightarrow$ jednozn. gradient.

(3RIL) $\equiv$ 3 rów. lin. z 3 niewiad. $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{(u_x, u_y, -1)}{\|(u_x, u_y, -1)\|}$:

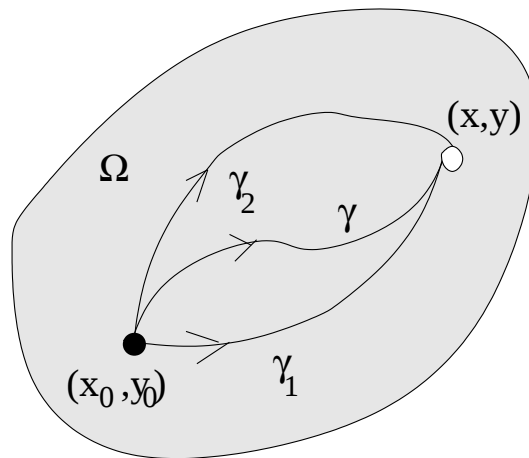
$$\left\langle \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} | \vec{\nu} \right\rangle = E_1 , \quad \left\langle \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} | \vec{\nu} \right\rangle = E_2 , \quad \left\langle \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} | \vec{\nu} \right\rangle = E_3 . \Rightarrow \left[(u_x, u_y) = \frac{-(\nu_1, \nu_2)}{\nu_3} . \right]$$

(ii) Całkowanie ∇u (analiza) ($\Rightarrow u \Rightarrow S = \text{wykres}(u)$):

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + \int_{\gamma} u_x dx + u_y dy \\ &= u(x_0, y_0) + \int_0^T [u_x(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\dot{\gamma}_1(t) + u_y(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t)] dt \end{aligned} \quad (2)$$

dla $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $\gamma \in V_{x,y}$

$V_{x,y} = \{\gamma \in C^1: \gamma \subset \Omega \text{ jednospójny, łączy } (x, y) \text{ z ustal. } (x_0, y_0) \text{ z } \Omega\}.$



Rys. 10. (2) dla $\forall \gamma \in V_{x,y}$ **niezmienniczy** ($u_{\gamma} = u_{\gamma_1} = u_{\gamma_2}$).

Szum/dyskretyzacja: (v_1, v_2) nie **całk.** $\Rightarrow \neg \exists u \in C^1(\Omega)$:

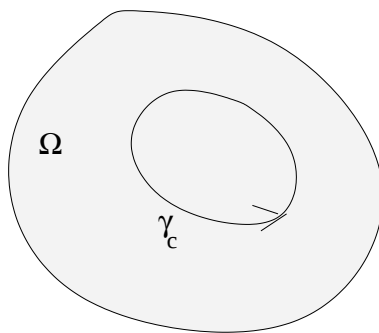
$$\boxed{u_x = v_1 \quad \text{i} \quad u_y = v_2 .}$$

Ω **jednostójny** $\Rightarrow \vec{v} = (v_1, v_2)$ **całk.:**

a) dla $\vec{v} \in C^0$ ($\Rightarrow u \in C^1$) jeśli:

$$\boxed{\int_{\gamma_c} v_1(x, y)dx + v_2(x, y)dy = 0 ,} \quad (3)$$

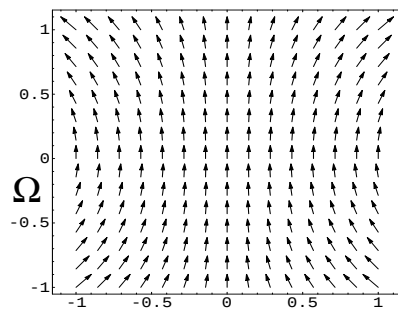
$\forall$ **pętli** $\gamma_c \subset \Omega$, $\gamma_c \in C^1$.



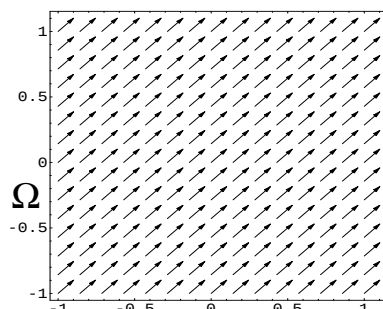
Rys. 11. Całka (3) **zeruje się** $\forall$ gładkiej **pętli** $\gamma_c \subset \Omega$.

b) dla $\vec{v} \in C^1$ ($\Rightarrow u \in C^2$) jeśli:

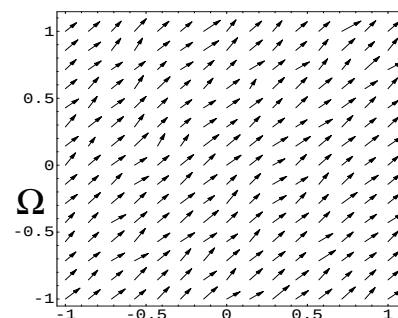
$$\boxed{\frac{\partial v_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, y) .}$$



a)



b)



c)

Rys. 12. Ciągłe* pole w Ω : a) $\neg$ całk. b) całk. c) $\neg$ ciągłe i $\neg$ całk.

Przyk. 3.:

a) Pole $C^{0,1} \ni \vec{v}^1 = (xy, 1)$ $\neg$ całk.: $x = v_{1y}^1 \neq v_{2y}^1 = 0$.

$$\Rightarrow \neg \exists u \in C^2(\Omega) \text{ z } \nabla u = (xy, 1).$$

b) Pole $C^{0,1} \ni \vec{v}^2 = (1, 1)$ całk.: $0 = v_{1y}^2 = v_{2y}^2 = 0$.

$$\Rightarrow \exists u \in C^2(\Omega) \text{ z } \nabla u = (1, 1) \text{ tj. } u(x, y) = x + y + C.$$

c) Pole $C^0 \ni \vec{v}^3 = \vec{v}^2 + \vec{N}(0, 0.15)$ $\neg$ całk. (zaszumione $\vec{v}^2$).

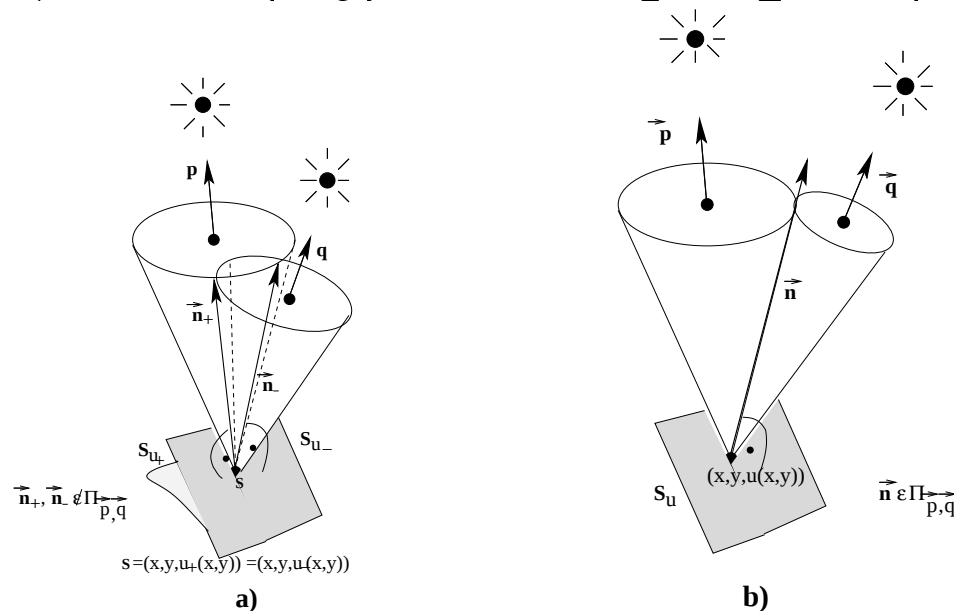
*Pikselizacja - dysk. war. całk.

3. Fotometria Stereo FS2

Jednozn.: czy jak dla $N = 1$ czy $N = 3$?

$$\boxed{\frac{\langle \vec{n} | \vec{p} \rangle}{\|\vec{n}\| \|\vec{p}\|} = E_1(x, y), \quad \frac{\langle \vec{n} | \vec{q} \rangle}{\|\vec{n}\| \|\vec{q}\|} = E_2(x, y).} \quad (2\text{RIL})$$

(2RIL): $\det(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0 \Rightarrow \forall (x, y) \in \Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \exists 2 \text{ (lub } 1) \vec{n}_{\pm}(x, y) \perp S.$

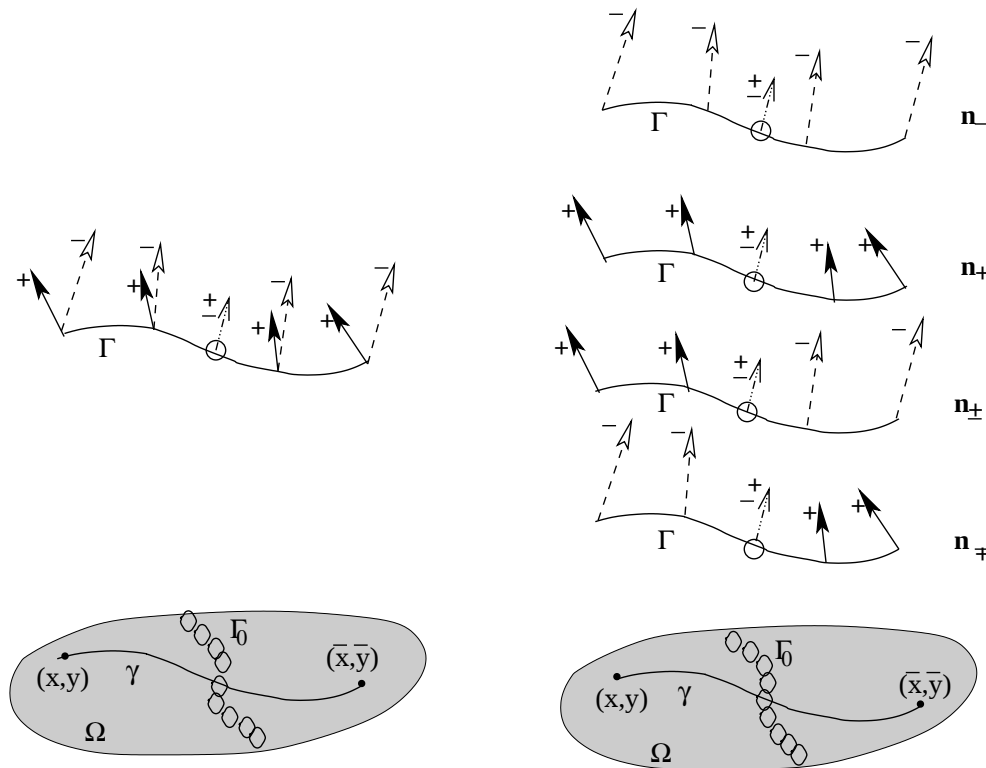


Rys. 13. (2RIL) : geometria a) $2 \vec{n}_{\pm} \notin \Pi_{\vec{p}, \vec{q}}^*$ b) $1 \vec{n} = \vec{n}_{\pm} \in \Pi_{\vec{p}, \vec{q}}$.

*Symetria $\vec{n}_+$ i $\vec{n}_-$ względem płaszczyz. $\Pi_{\vec{p}, \vec{q}}$.

Pole $\vec{n}(x, y) \perp S$ w Ω : **ciągłe** ($u \in C^1$) **gładkie** ($u \in C^2$).

2 obr. pow. Lamberta $S \Rightarrow \exists$ conajmn. 1 pole $\vec{n}$ gradientowe.



Rys. 14. Bifiurkacje w pktach $\circ$ (gdzie $\vec{n} = \vec{n}_+ = \vec{n}_-$).

Każde **sklejanie***: liczba pól $\vec{n} \perp S$ wzrasta **dwukrotnie**.

*Generycznie: bifiurkacje na gładkiej $\Gamma_0 \subset \Omega$.

FS2 - algorytm rekonstrukcji S:

(i) Gradient (algebra):

Tw. 2. (2RIL) $\vec{p}, \vec{q} \notin \text{płaszczyźnie} \Rightarrow$

$$\boxed{u_x^\pm = f_1(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \pm\Lambda, \vec{p}, \vec{q}), \quad u_y^\pm = f_2(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \pm\Lambda, \vec{p}, \vec{q}),} \quad (4)$$

$$\underline{\Lambda = g(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \vec{p}, \vec{q}).}$$

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \Omega : \boxed{\Lambda(x, y) = 0}\} \text{możliwe "ześlizgi" } \vec{n}_\pm \text{ na } \vec{n}_\mp \Rightarrow \vec{n} \in C^{0,1}.$$

$$(2\text{RIL}) \equiv 3 \text{ rów. } \mathbf{nielin.} \text{ z 3 niewiad. } \vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{(u_x, u_y, -1)}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}:$$

$$\boxed{\langle \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} | \vec{\nu} \rangle = E_1, \quad \langle \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} | \vec{\nu} \rangle = E_2, \quad \|\vec{\nu}\| = 1.} \Rightarrow \boxed{(u_x, u_y) = \frac{-(\nu_1, \nu_2)}{\nu_3}.}$$

Tw. 2. Dla $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ i $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ lin. niezal. i E_1, E_2 pochodne (u_x, u_y) spełniające (2RIL) są zadane $\forall (x, y) \in \Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$:

$$u_x = \frac{\|\vec{p}\|(q_1\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle - p_1\|\vec{q}\|^2)E_1 + \|\vec{q}\|(p_1\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle - q_1\|\vec{p}\|^2)E_2 + (p_3q_2 - p_2q_3)\varepsilon\sqrt{\Lambda}}{\|\vec{p}\|(p_3\|\vec{q}\|^2 - q_3\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle)E_1 + \|\vec{q}\|(q_3\|\vec{p}\|^2 - p_3\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle)E_2 + (p_1q_2 - p_2q_1)\varepsilon\sqrt{\Lambda}},$$

$$u_y = \frac{\|\vec{p}\|(q_2\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle - p_2\|\vec{q}\|^2)E_1 + \|\vec{q}\|(p_2\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle - q_2\|\vec{p}\|^2)E_2 + (p_1q_3 - p_3q_1)\varepsilon\sqrt{\Lambda}}{\|\vec{p}\|(p_3\|\vec{q}\|^2 - q_3\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle)E_1 + \|\vec{q}\|(q_3\|\vec{p}\|^2 - p_3\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle)E_2 + (p_1q_2 - p_2q_1)\varepsilon\sqrt{\Lambda}},$$

gdzie

$$\Lambda(x, y) = \|\vec{p}\|^2\|\vec{q}\|^2[1 - E_1^2(x, y) - E_2^2(x, y)] - \langle\vec{p}|\vec{q}\rangle[\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle - 2\|\vec{p}\|\|\vec{q}\|E_1(x, y)E_2(x, y)],$$

$$\varepsilon = \varepsilon(x, y) = \pm 1,$$

tak by funkcja

$$f(x, y) = \varepsilon(x, y)\sqrt{\Lambda(x, y)}$$

była ciągła.

Szkic dowodu Tw. 2. $\forall (x, y) \in \Omega$:

Krok 1: ϕ bijekcja

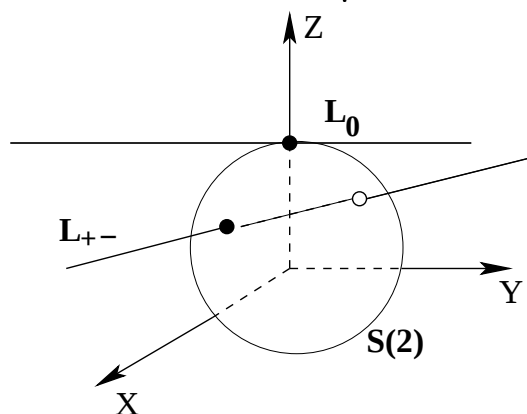
$$\phi : (u_x, u_y) \mapsto (\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{(u_x, u_y, -1)}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}.$$

Krok 2: (2RIL) z $(u_x, u_y) \equiv 2$ rów. lin. + 1 nielin.

$$\boxed{\langle \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} | \vec{\nu} \rangle = E_1, \quad \langle \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} | \vec{\nu} \rangle = E_2, \quad \|\vec{\nu}\| = 1,} \quad (5)$$

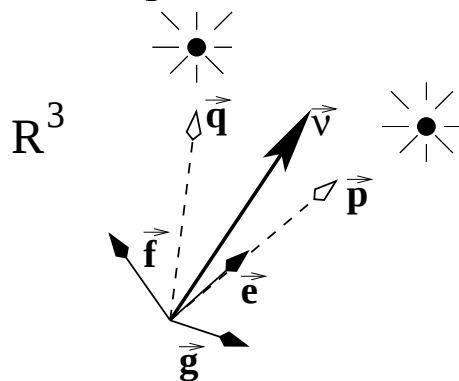
z 3 niewiad. $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

Geometria (5): przecięcie prostej L_{+-} (L_0) z jedn. sferą $S(2) \subset \mathbb{R}^3$.



Rys. 15. Układ (5) ma 1 lub 2 rozw.

Krok 3: lin. niezal. $\vec{p}$, $\vec{q}$ i ortogonal. Szmidta $\Rightarrow$ bazę $\mathcal{B} = \{\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}\}$:



Rys. 16. $\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ w bazie ortonormalnej $\mathcal{B}$: $\vec{v} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{f} + \sigma\vec{g}$.

Krok 4: Wyznaczamy (α, β, σ) :

$$\alpha = \langle \vec{v} | \vec{e} \rangle = E_1, \quad \beta = \langle \vec{v} | \vec{f} \rangle = \frac{\|\vec{p}\| \|\vec{q}\| E_2 - \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle E_1}{\sqrt{\|\vec{p}\|^2 \|\vec{q}\|^2 - \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle^2}} \Rightarrow \sigma = \pm \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2},$$

gdzie

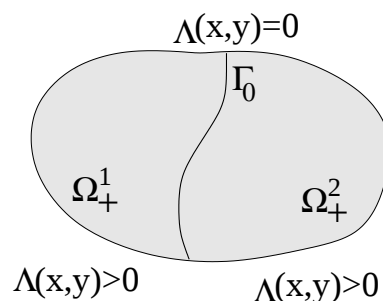
$$1 - \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\|\vec{p}\|^2 \|\vec{q}\|^2 (1 - E_1^2 - E_2^2) - \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle (\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle - 2 \|\vec{p}\| \|\vec{q}\| E_1 E_2)}{\|\vec{p}\|^2 \|\vec{q}\|^2 - \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle^2}$$

Krok 5: $\vec{v} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{f} + \sigma\vec{g} \Rightarrow u_x = \frac{-\nu_1}{\nu_3}$ i $u_y = \frac{-\nu_2}{\nu_3} \Rightarrow \text{Tw. 2..}$ □

Ciągłość $\vec{n} = (v_1, v_2, -1) \not\Rightarrow$ całkowalności (1 jest całk.).

(ii) Całkowanie (analiza):

Tw. 2 $\Rightarrow \vec{v} = (v_1, v_2)$ (jeśli całk.) $\Rightarrow$ “całkujemy” $\vec{v}$ do $u_{\vec{v}}$.



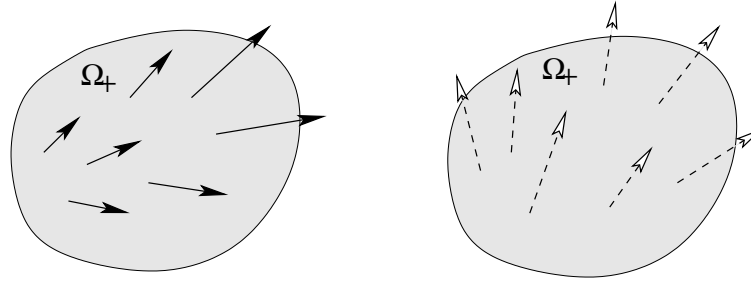
Rys. 17. Generycznie dla S : $\Omega = \Omega_+^1 \cup \Omega_+^2 \cup \Gamma_0$.

• na $\Omega_+^{1,2}$ **Tw. 2** $\Rightarrow \exists$ 2 pola: $\vec{v}^\pm = (u_x^\pm, u_y^\pm)$

• na Γ_0 **Tw. 2** $\Rightarrow \exists$ 1. pole: $\vec{v}^0 = (u_x^0, u_y^0)$

• na $\Omega \Rightarrow \exists$ 4 pola: $\vec{v}^{+,+}, \vec{v}^{-,-}, \vec{v}^{+,-}, \vec{v}^{-,+}$

PRZYPADEK: $\Lambda(x, y) > 0$ na Ω_+



Rys. 18. Dla $\Omega_+ \subset \Omega$: $\exists !2$ pola $(u_x^\pm, u_y^\pm)$ speł. (2RIL).

S Lamberta $\Rightarrow$ min. 1 pole **całk.**: (2) $\Rightarrow u \in C^2$.

$\exists !2$: **pola** (u_x^+, u_y^+) i (u_x^-, u_y^-) **całk.** (z $\vec{p} = (0, 0, -1)$) $\Leftrightarrow$:

$$\boxed{q_1 q_2 (u_{xx} - u_{yy}) + (q_1^2 - q_2^2) u_{xy} = 0 .} \quad (6)$$

(6) - **silne ograniczenie!*** $\Rightarrow$

Generyczna jednozn. rekonstr. $S \in C^2$ na $\Omega_+^{1,2}$.

*Generycznie rów. falowe nie spełnione na otwartym $\Omega_f \subset \Omega_+$.

Jeśli $\vec{v}^+$ i $\vec{v}^-$ całk. $\Rightarrow$ **związki** u^+ z u^- ?

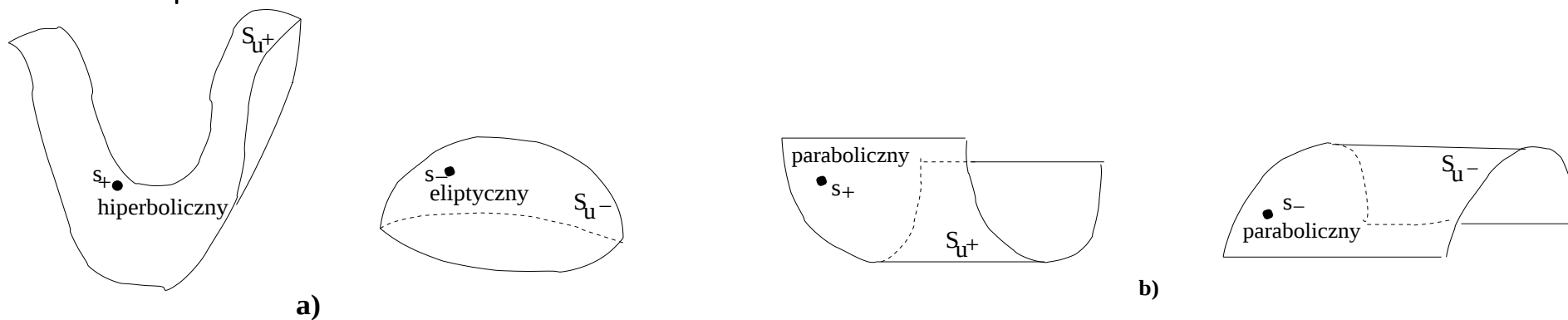
a) **analit.**: $u^+ = \phi + \psi, \quad u^- = \phi - \psi.$

$\Rightarrow$ dla u^+ (u^-) $\Rightarrow$ **sprzężone** u^- (u^+).

b) **geometr.**: $s_{\pm} = (x, y, u^{\pm}) \in S_{u^{\pm}} \Rightarrow K_{u^+}(s_+) = -K_{u^-}(s_-).$ *

$\Rightarrow \neg \exists$ 2 pow. (**wyp.** S_{u^+} i **wkl.** S_{u^-}) - (1RIL) nie.

$\Rightarrow s_+$ **wyp.** (**wkl.**) to s_- **siodłowy**[†] (i odwrot.).

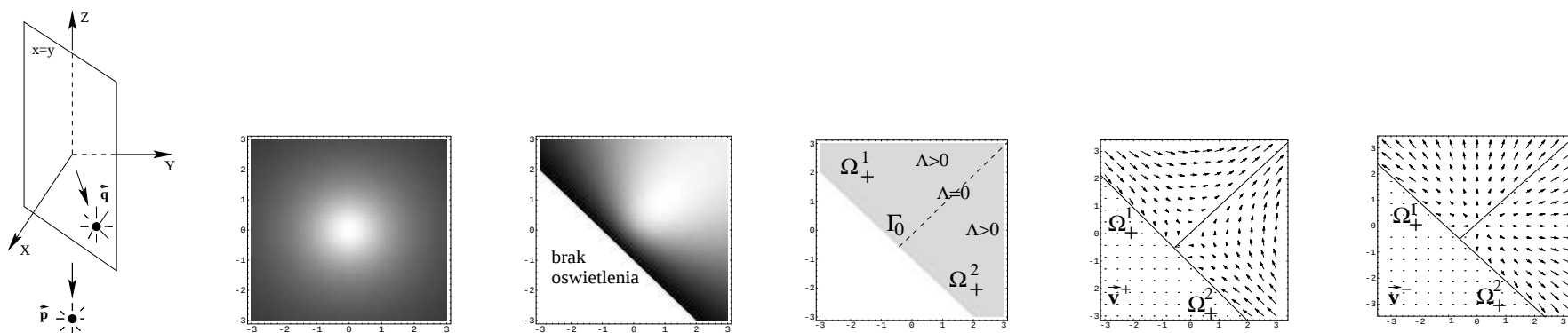


Rys. 19. Krzyw. Gaussa a) (elipt., hiperb.) b) (parab., parab.)

***Krzyw. Gaussa** w pkcie $s = (x, y, u(x, y)) \in S$: $K_u(x, y) = \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^2}.$

[†]**Lust. niejednoz.** $u_+ = -u_-$ tylko gdy $K_G(s_+) = K_G(s_-) = 0.$

Wykluczenie siodeł **ujednoznacznia** rzadką niejednozn. dla Ω_+



Rys. 20. $\vec{p} = (0, 0, -1)$ i $\vec{q} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

Przyk. 4.: Kamera $[-3, 3]^2$:

$$\frac{(\sqrt{3}, u_x + u_y + 1)}{\sqrt{3(1 + u_x^2 + u_y^2)}} = (E_{\vec{p}}(x, y), E_{\vec{q}}(x, y)) = \frac{(\sqrt{3}, x + y + 1)}{\sqrt{3(1 + x^2 + y^2)}}.$$

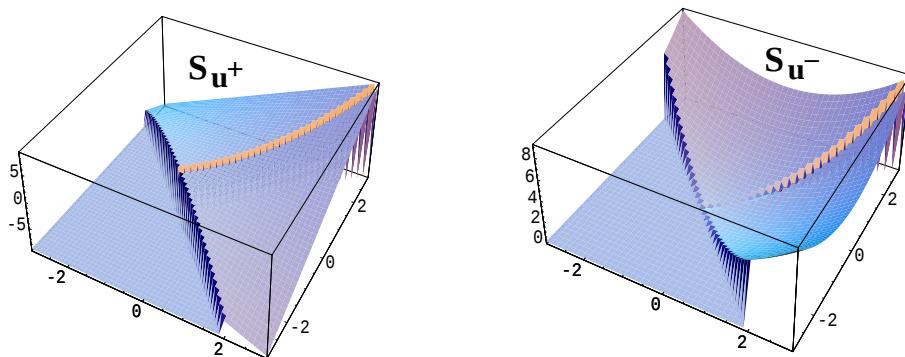
(i) Tw. 2. $\Rightarrow \boxed{\Lambda \equiv 0 \Leftrightarrow x = y.}$ Na $\Omega_+^1 = \{(x, y) : y > x, y \geq -x - 1\}$
 $(\Omega_+^2 \setminus \{(x, y) : y < x, y \geq -x - 1\}) \ni$ **!2 pola:**

$$(v_1^+, v_2^+) = (y, x), \quad (v_1^-, v_2^-) = (x, y).$$

Oba **całk.** (spełniają war. całk. $\equiv$ rów. falowe $u_{yy} - u_{xx} = 0$).

(ii) Catk. $\vec{v}^\pm$ w $\Omega_+^{1,2}$: $\Rightarrow S_{u^+}$ (siodło) S_{u^-} (paraboloida):

$$u^+(x, y) = xy + C, \quad u^-(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C. \quad (7)$$



Rys. 21. 2 rozw. C^2 w $\Omega_+^{1,2}$: siodło i paraboloida*.

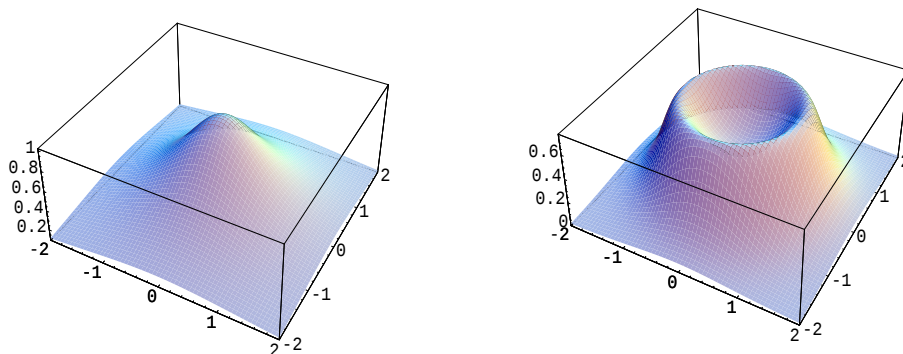
Lub: dla u^+ rozkład $u^+ = \phi + \psi$:

$$u^+(x, y) = xy = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{-(y-x)^2}{4} \Rightarrow u^- = \phi - \psi \text{ (sprężone),}$$

$$u^-(x, y) = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{-(y-x)^2}{4} = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

$\forall s_+ \in S_{u^+} \quad K_{u^+}(x, y) = \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2}$ hiper. i $\forall s_- \in S_{u^-} \quad K_{u^-}(x, y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ elipt.

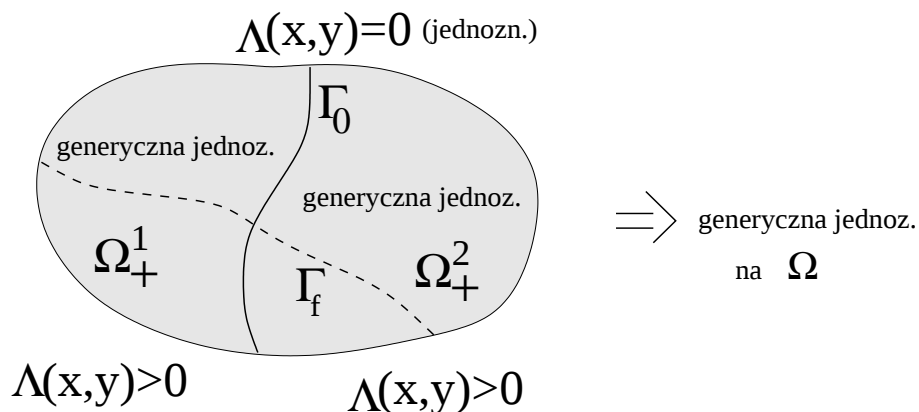
* $\forall \vec{q}, u^\pm$ z (7) spełnia $q_1 q_2 (u_{xx} - u_{yy}) + (q_1^2 - q_2^2) u_{xy} = 0 \Rightarrow$ niejednozn.



Rys. 22. Powierzchnie: górzysta i wulkaniczna.

Generycznie dla $(S, \vec{p}, \vec{q})$: np. sfera, elipsoida, pow. górzysta (wulkan.)*

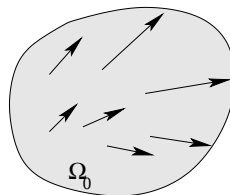
jednozn. rekonst. w $\Omega_+ \Rightarrow$ globalnie w Ω .



Rys. 23. (2RIL): generyczna jednozn. S (globalnie).

*Rów. falowe (6) jest spełnione na “cienkim” zbiorze $(\Omega_+ \supset \Gamma_f$ - krzywa).

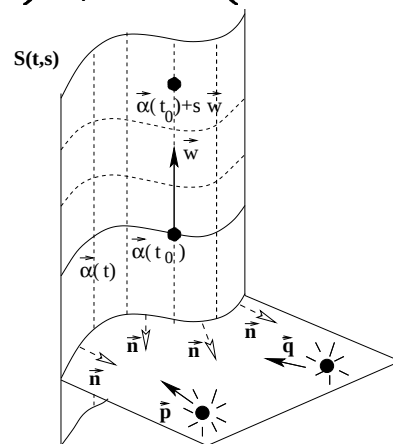
PRZYPADEK: $\Lambda(x, y) \equiv 0$ na Ω_0^*



Rys. 24. $\exists !1$ pole $\vec{v}$ na Ω_0 .

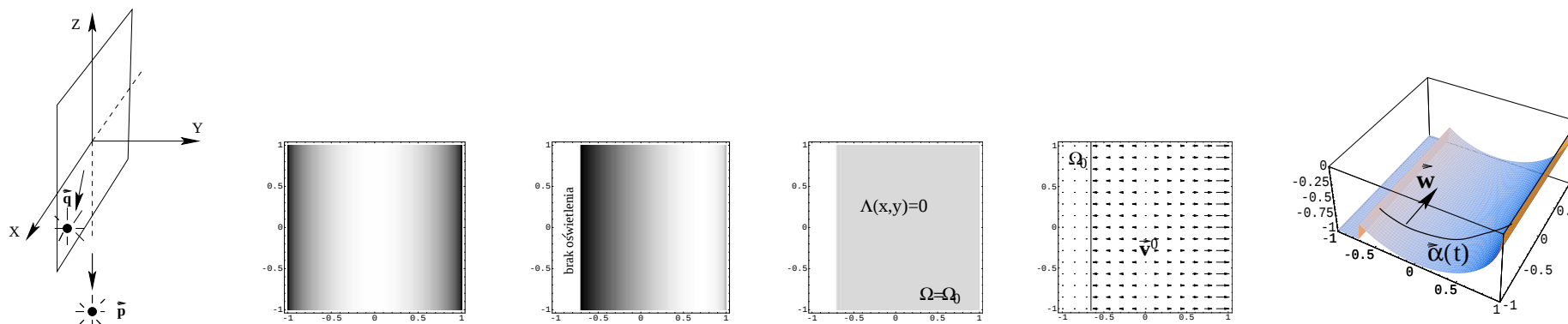
S Lamb. $\Rightarrow \vec{v}$ całk. (Ω_0 otwarty) $\Rightarrow$ jednozn. $\equiv$ (FS3).

- $\forall s \in S \ \vec{n}(s) \perp S \Rightarrow \vec{n} \in \Pi_{\vec{p}, \vec{q}}$
- **Cylindryczna** $S(t, s) = \vec{\alpha}(t) + s\vec{w}$ ($\Rightarrow$ krzyw. Gaussa = 0)



Rys. 25. S pokryta prostymi $\parallel$ (wiodzone wzdłuż $\vec{\alpha}(t)$).

*Generycznie Ω_0 redukuje się do krzywej $\Gamma_0 \subset \Omega$.



Rys. 26. $\vec{p} = (0, 0, -1)$ i $\vec{q} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$.

Przyk. 5.: Kamera $[-1, 1]^2$:

$$\frac{(\sqrt{2}, u_x + 1)}{\sqrt{2(1 + u_x^2 + u_y^2)}} = (E_{\vec{p}}(x, y), E_{\vec{q}}(x, y)) = (\sqrt{1 - x^2}, \frac{\sqrt{1 - x^2} + x}{\sqrt{2}}).$$

(i) Tw. 2: $\boxed{\Lambda \equiv 0}$ $\Omega_0 = \{(x, y) : -(1/\sqrt{2}) \leq x \leq 1\}$ (obszar) $\Rightarrow \exists ! 1$ całk. pole:

$$(v_1^0, v_2^0) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, 0 \right), \quad \Rightarrow \quad v_{1y}^0 = v_{2x}^0 = 0.$$

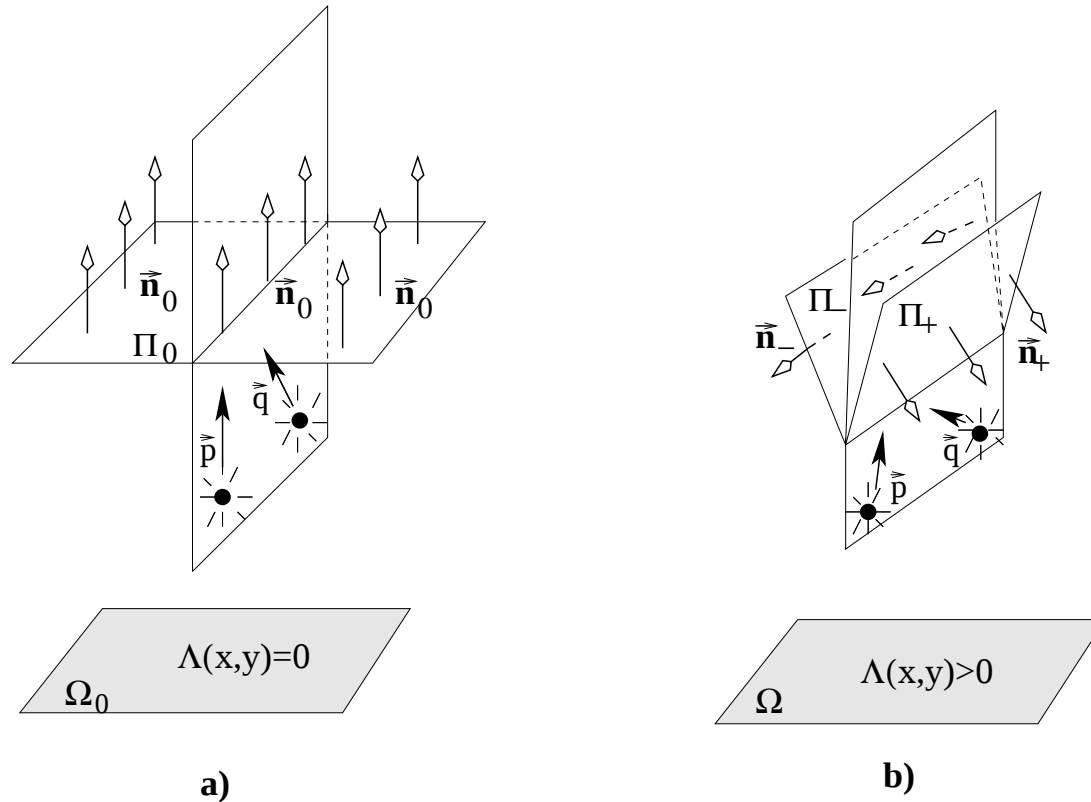
(ii) Całk. $\vec{v}^0$ w Ω_0 : $\Rightarrow S_{u^0}$ (cylinder* - $\vec{w} = (0, 1, 0)$, $\vec{\alpha}(t) = (t, 0, -\sqrt{1 - t^2})$):

$$C^2(\Omega_0) \ni u^0(x, y) = -\sqrt{1 - x^2} + C, \quad S_{u^0}(t, s) = \vec{\alpha}(t) + s\vec{w}.$$

□

*Krzyw. Gaussa $K_{u^0}(x, y) = 0$ jako, że $u_{xy}^0 = u_{yy}^0 = 0$.

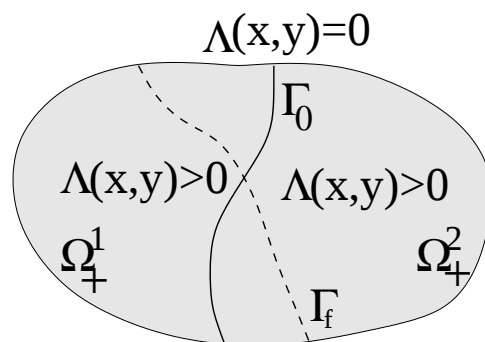
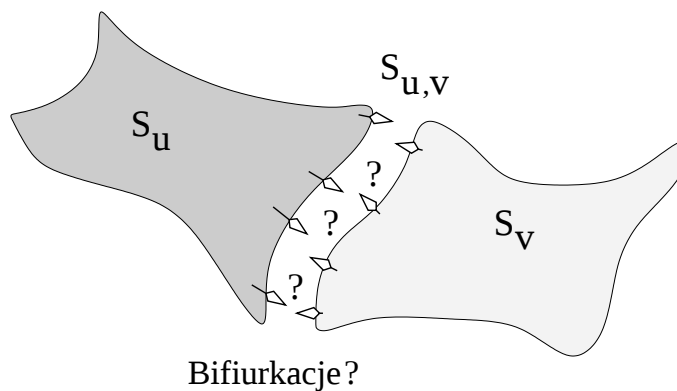
Przyk. 6.: Płaszczyzna Lamberta:



Rys. 27. Płascz. (2RIL) $\Rightarrow$ a) jednozn. Π_0 b) niejednozn. $\Pi_{\pm}$.

Jednozn. zależy od S i od kierunków oświetleń (np. płaszczyzna). $\square$

PRZYPADEK: $\Lambda(x, y) \geq 0$ na Ω



Rys. 28. Generycznie dla S : $\Omega = \Omega_+^1 \cup \Omega_+^2 \cup \Gamma_0$.

Globalna rekonstr. S : sklejanie u w Ω_+^1 z v w Ω_+^2 wzdłuż Γ_0 .

Ilość sklejeń $S_{u,v}$ i regularność (tzn. ciągłość/gładkość)?

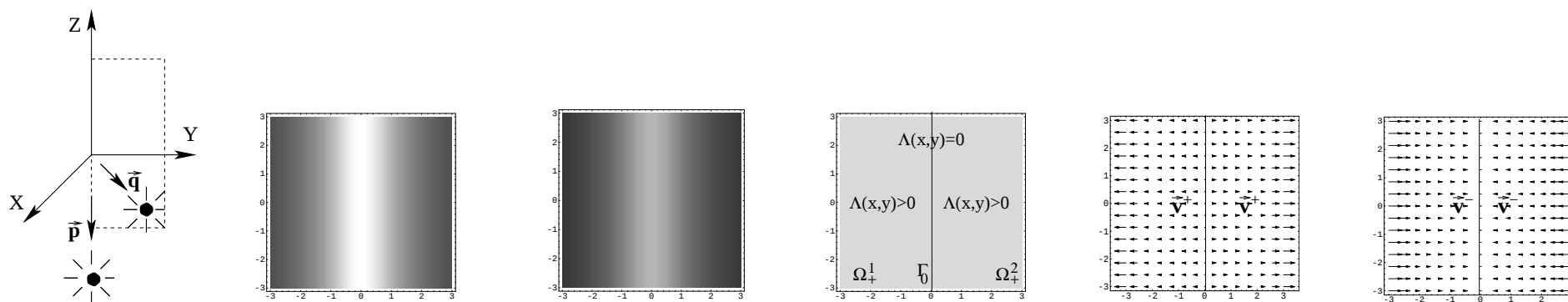
i) generycznie $\exists ! 1 \ u, v \in C^2(\Omega_+^{1,2})$:*

- 1 możliwe sklejenie $S_{u,v}$ na Ω (**Tw. 3.** $\exists \text{ const} \Rightarrow S_{u,v} \in C^1$)
- $S_{u,v} \in C^1$ (obrazy S Lamb.)
- $S_{u,v} \in C^2$ dla $S \in C^2$ (sfera, elipsoida, pow. górzysta/wulkan.)

ii) rzadki przyp. $\exists 2 \ u^\pm \in C^2(\Omega_+^1)$ i $2 \ v^\pm \in C^2(\Omega_+^2)$:

- **Tw. 4.** (u, v) bifurkuje w $C^2 \Rightarrow$ 2ga para bifurkuje w $C^2 (\Rightarrow \exists 0 \text{ lub } 2 \text{ lub } 4 \text{ rozw. } C^2(\Omega))$
- conajm. 1 $S_{u,v} \in C^1$ (obrazy S Lamb.)
- $S_{u,v} \in C^2$ (dla $S \in C^2$) $\Rightarrow$ conajm. 2 rozw. C^2 (z **Tw. 4.**)

*Rów. falowe (6) spełnione tylko na “cienkim” zbiorze (krzywej) $\Gamma_f \subset \Omega_+^{1,2}$.



Rys. 29. $\vec{p} = (0, 0, -1)$ i $\vec{q} = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Przyk. 7.: Kamera $[-3, 3]^2$:

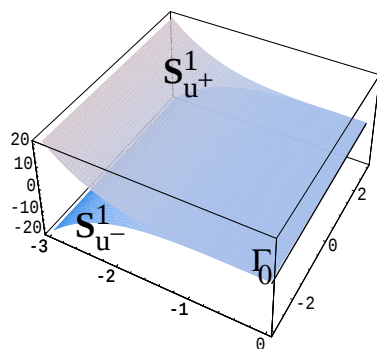
$$\frac{(\sqrt{2}, u_y + 1)}{\sqrt{2(1 + u_x^2 + u_y^2)}} = (E_{\vec{p}}(x, y), E_{\vec{q}}(x, y)) = \frac{(\sqrt{2}, 1)}{\sqrt{2(1 + x^6)}}.$$

(i) Tw. 2. $\boxed{\Lambda > 0} \Leftrightarrow x \neq 0 \Rightarrow \exists$ **2 pola** $\vec{v}^\pm$ (**catk.**) w $\Omega_+^1 = \{(x, y) : x < 0\}$ ($\Omega_+^2 = \{(x, y) : x > 0\}$):

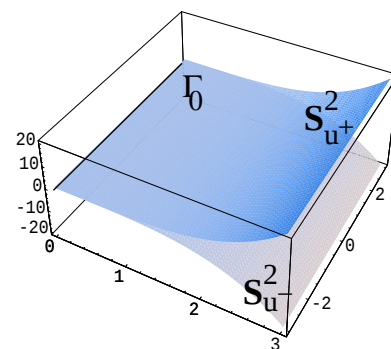
$$(v_1^\pm, v_2^\pm) = (\pm x^3, 0) \quad \Rightarrow \quad v_1^\pm_y = v_2^\pm_x = 0.$$

(ii) Catk. $\vec{v}^\pm$ w $\Omega_+^{1,2}$: $\Rightarrow$ **2 pow.** $S_{u^+}^{1,2}$ i $S_{u^-}^{1,2}$ klasy C^2 :

$$C^2(\Omega_+^{1,2}) \ni u^\pm(x, y) = \pm \frac{x^4}{4} + C.$$



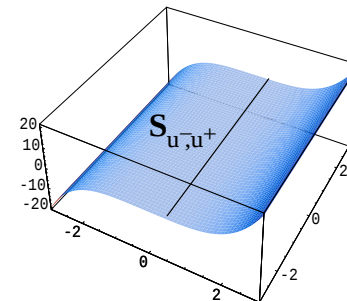
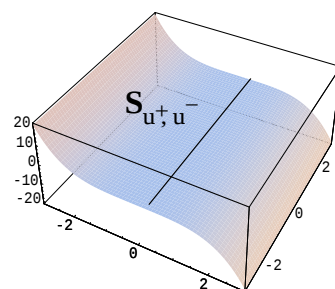
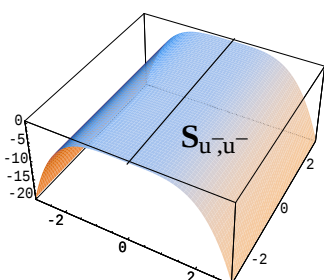
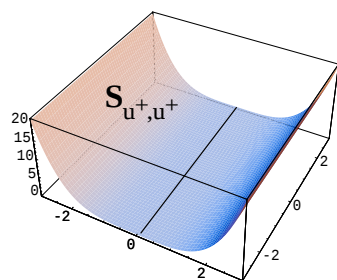
a)



b)

Rys. 30. 2 powierzchnie w części obrazu Ω a) Ω_+^1 b) Ω_+^2 .

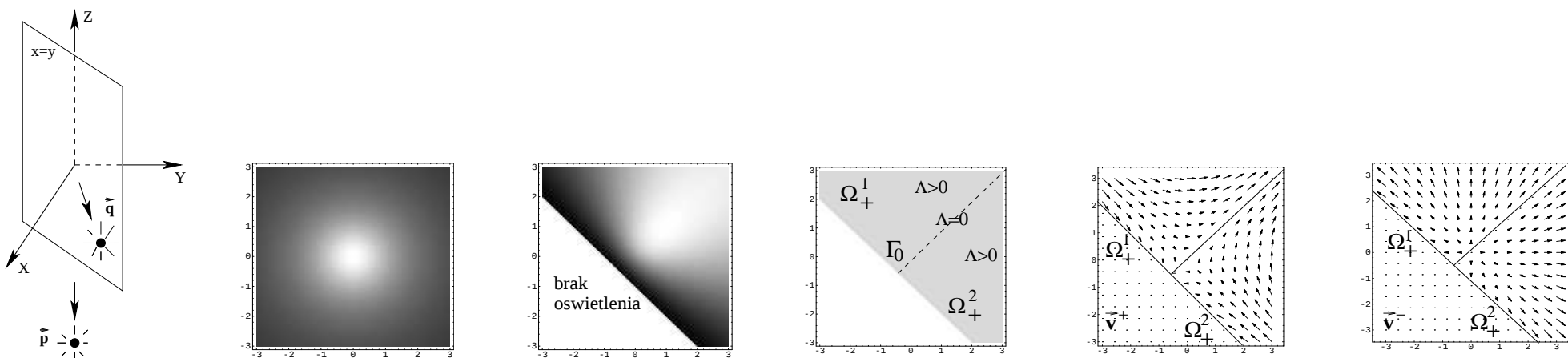
4 bifiurkacje w klasie C^2 wzdłuż $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.



Rys. 31. 4 powierzchnie klasy C^2 w całej Ω .

Lustrzane roz. $(S_{u+,u+}, S_{u-,u-})$, $(S_{u+,u-}, S_{u-,u+})$ krzyw. Gaussa = 0.

□

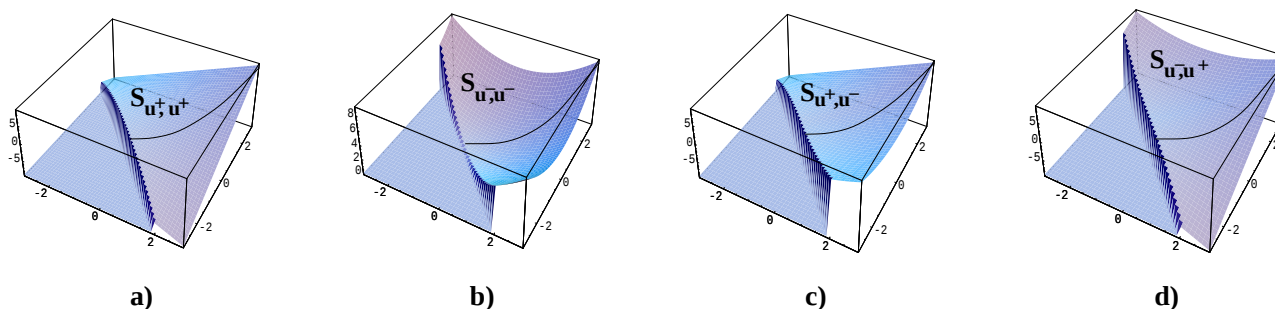


Rys. 32. $\vec{p} = (0, 0, -1)$ i $\vec{q} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

Przyk. 8.: Przyk. 4 $\Rightarrow$ **siodło i paraboloida** w $C^2(\Omega_+^{1,2})$:

$$u^+(x, y) = xy + C, \quad u^-(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C. \quad (8)$$

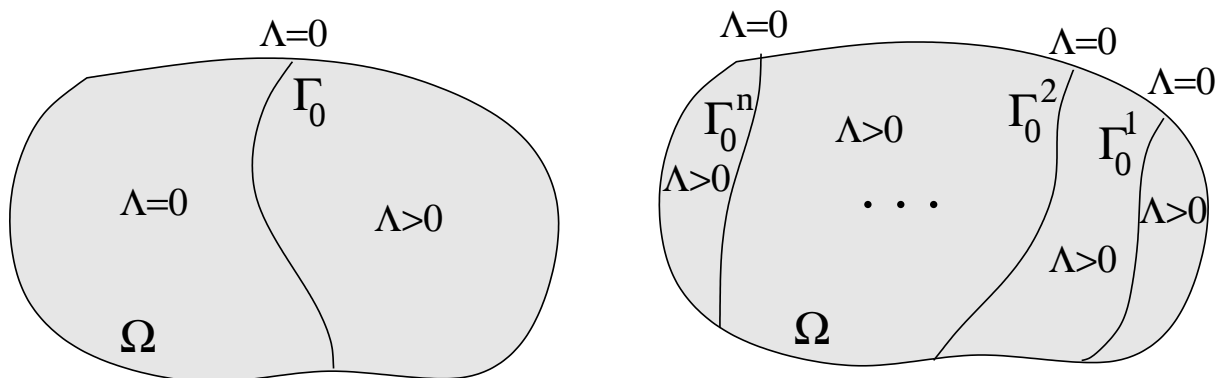
2 (i 4) bifurkacje w klasie C^2 (C^1) na $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.



Rys. 33. 2 pow. na całej Ω : klasy a)-b) C^2 c)-d) C^1 .

Klasa rozw. i topologia zb. $(\Lambda \equiv 0 \text{ i } \Lambda > 0) \Rightarrow$ **jednozn.**

Nie generyczne przyp.:



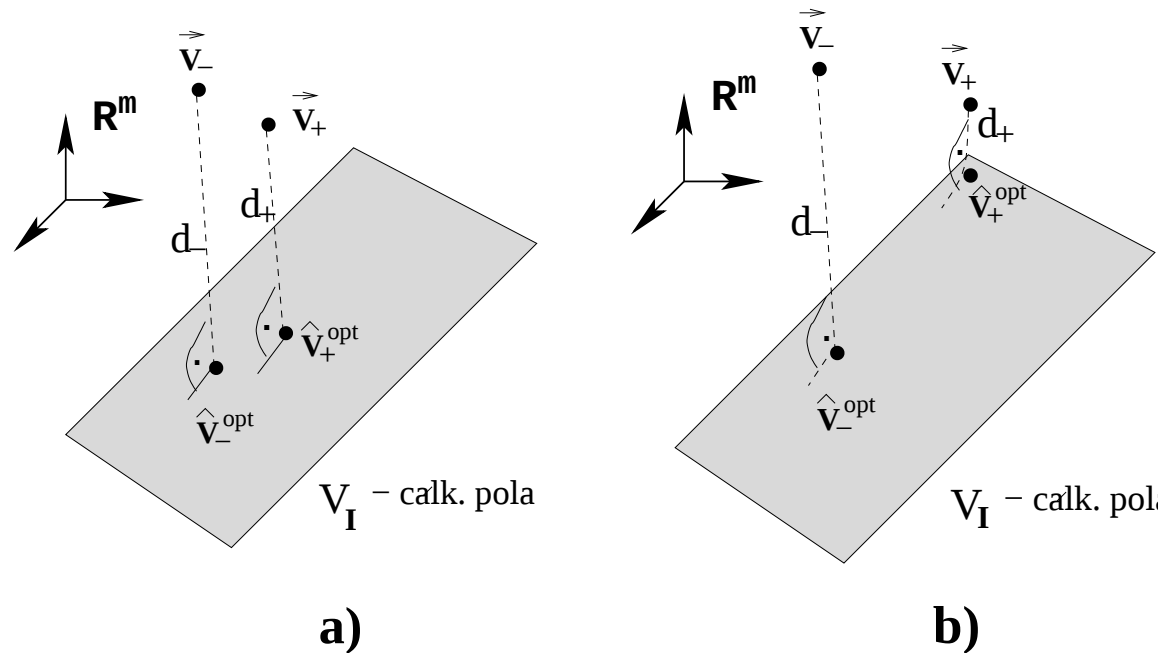
Rys. 34. a) max. 2 pow. $S \in C^{1,2}$ **b)** 2^n możliwych pow. $S \in C^{1,2}$.

$\exists$ obrazy syntetyczne E_1 i E_2 (nie Lambertowskie):

- bifurkacje tylko C^0
- $\exists$ tylko rozw. nieograniczone
- rozw. z ∞ ilością fałdów

Dyskretyzacja/Szumy: (bardziej złożona niż $N = 3$).

- wyznacz. $\Omega_+^{1,2}$ i Γ_0 (np. dla pikseli)
- oba $\vec{v}_+$ i $\vec{v}_-$ (na $\Omega_+^{1,2}$) niecałk.
- rektyfik. (lin. opt.) $\vec{v}_+$ i $\vec{v}_- \Rightarrow \hat{v}_+^{opt.}$ i $\hat{v}_-^{opt.}$ (całk.)
- jeśli $d_+ \approx d_-$ ($d_+ \not\approx d_-$) $\Rightarrow$ **2** (**1**) rozw.



Rys. 35. a) $d_+ \approx d_-$: **2** rozw. **b)** $d_+ \not\approx d_-$: **1** rozw.

- pojęcie bifurkacji $C^{1,2}$ (na Γ_0^D) traci sens dla pikselizacji
- ekstra więzy w eliminacji niejedzn. dysk. rozw. (lin./nielin. opt.):
 - rów. falowe

$$q_1 q_2 (u_{yy} - u_{xx}) + (q_1^2 - q_2^2) u_{xy} = 0 .$$

- krzywizny Gaussa

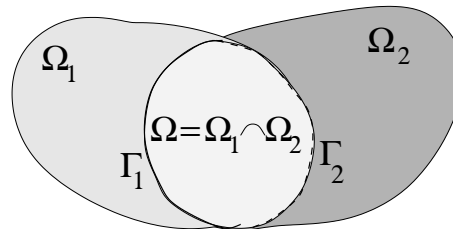
$$K_G((x, y, u^+(x, y))) = -K_G((x, y, u^-(x, y))) .$$

- postać sprzężona

$$u^+(x, y) = \phi(x, y) + \psi(x, y) \quad u^-(x, y) = \phi(x, y) - \psi(x, y) .$$

4. Podsumowanie

- **FS2** generycz. ujednozn. **SfS** w $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ - przyp. ciągły
- **FS3** jednozn. i **FS1=SfS** silna niejednoz. $\Rightarrow$ **FS2** “ $\approx$ ” **FS3**
- analiza generycznej niejednoz. w **FS2** (relacje między rozw.)
- **FS2** (dyskret.) - generycz. eliminacja 1 pola poprzez lin. lub/i nielin. optymal. + więzy (odległość do pól całk., rów. falowe, postać sprzężona, krzyw. Gaussa)
- **FS2** $\Rightarrow$ dane brzegowe dla **SfS=FS1** (z $N = 1$) na $\Omega_i \setminus \Omega$



Rys. 36. **FS2** $\Rightarrow$ $(u, \vec{n}_u)$ na Γ_1 (Γ_2) dla **SfS** na $\Omega_1 \setminus \Omega$ ($\Omega_2 \setminus \Omega$).

5. Dodatkowy Material N=3

Tw. 1. Dla E_1, E_2, E_3 pochodne (u_x, u_y) spełniające (3RIL) są zadane $\forall (x, y) \in \Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$:

$$u_x = \frac{(q_2 r_3 - q_3 r_2) E_1 \|\vec{p}\| + (p_3 r_2 - p_2 r_3) E_2 \|\vec{q}\| + (p_2 q_3 - p_3 q_2) E_3 \|\vec{r}\|}{(q_2 r_1 - q_1 r_2) E_1 \|\vec{p}\| + (p_1 r_2 - p_2 r_1) E_2 \|\vec{q}\| + (p_2 q_1 - p_1 q_2) E_3 \|\vec{r}\|},$$

$$u_y = \frac{(q_3 r_1 - q_1 r_3) E_1 \|\vec{p}\| + (p_1 r_3 - p_3 r_1) E_2 \|\vec{q}\| + (p_3 q_1 - p_1 q_3) E_3 \|\vec{r}\|}{(q_2 r_1 - q_1 r_2) E_1 \|\vec{p}\| + (p_1 r_2 - p_2 r_1) E_2 \|\vec{q}\| + (p_2 q_1 - p_1 q_2) E_3 \|\vec{r}\|},$$

gdzie $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ i $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ lin. niezależne.

Szkic dowodu Tw. 1. $\forall (x, y) \in \Omega$:

Krok 1: $(u_x, u_y) \mapsto (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ **bijekcja**, gdzie

$$\nu_1 = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}, \quad \nu_2 = \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}, \quad \nu_3 = \frac{-1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}.$$

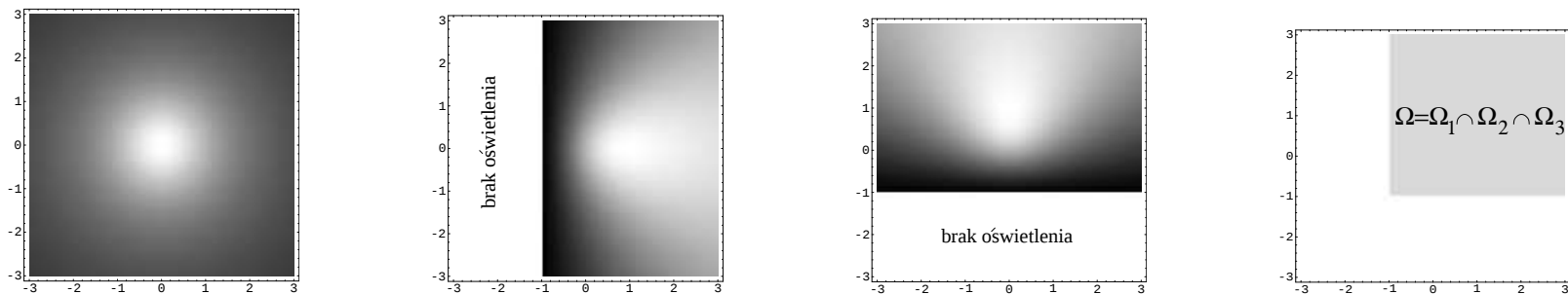
Krok 2: Nielin. **(3RIL)** z 2 niewiad. $(X, Y) = (u_x, u_y) \equiv 3$ rów. lin.

$$\left\langle \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} | \vec{\nu} \right\rangle = E_1, \quad \left\langle \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} | \vec{\nu} \right\rangle = E_2, \quad \left\langle \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} | \vec{\nu} \right\rangle = E_3, \quad (9)$$

z 3 niewiad. $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

Krok 3: lin. niezal. $\vec{p}, \vec{q}$ i $\vec{r} \Rightarrow (9)$ ma !1 rozw. $\vec{\nu}$.

Krok 4: $u_x = \frac{-\nu_1}{\nu_3}$ i $u_y = \frac{-\nu_2}{\nu_3} \Rightarrow$ **Tw. 1.** $\square$



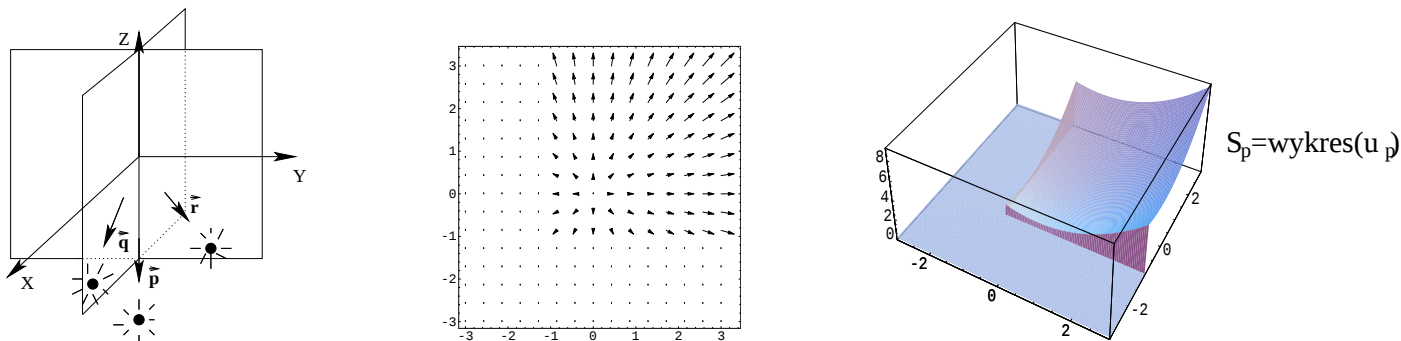
Rys. 37. $\vec{p} = (0, 0, -1)$, $\vec{q} = (1, 0, -1)$, $\vec{r} = (0, 1, -1)$.

Przyk. 9.: Kamera $[-3, 3]^2$:

$$\frac{(\sqrt{2}, u_x + 1, u_y + 1)}{\sqrt{2(1 + u_x^2 + u_y^2)}} = (E_{\vec{p}}, E_{\vec{q}}, E_{\vec{r}})(x, y) = \frac{(\sqrt{2}, x + 1, y + 1)}{\sqrt{2(1 + x^2 + y^2)}}.$$

(i) Tw. 1 $\Rightarrow$ $v_1 = x$, $v_2 = y$, $v_{1y} = v_{2x} \Rightarrow \vec{v}$ całk.

(ii) Całk. $\vec{v} \Rightarrow$ jedyne $u_P(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C$ (S_P - paraboloida).



Rys. 38. Rekonstrukcja paraboloidy S_P w $\Omega = [-1, 3]^2$. $\square$

6. Dodatkowy Material N=2

Równanie Falowe (szkic dowodu):

Krok 1: Tw. 2 $\Rightarrow$

$$u_x^- = f_1(E_1, E_2, -\Lambda, \vec{p}, \vec{q}) , \quad u_y^- = f_2(E_1, E_2, -\Lambda, \vec{p}, \vec{q}) , \quad (10)$$

i z (2RIL)

$$E_1 = h_1(u_x^+, u_y^+, \vec{p}, \vec{q}) , \quad E_2 = h_2(u_x^+, u_y^+, \vec{p}, \vec{q}) , \quad (11)$$

gdzie h_1, h_2 lewe strony (2RIL).

Krok 2: $\Lambda(E_1, E_2, \vec{p}, \vec{q})$ i (11) $\Rightarrow \Lambda(u_x^+, u_y^+, \vec{p}, \vec{q})$ i (10), (11) $\Rightarrow$

$$u_x^- = \bar{f}_1(u_x^+, u_y^+, \vec{p}, \vec{q}) , \quad u_y^- = \bar{f}_2(u_x^+, u_y^+, \vec{p}, \vec{q}) . \quad (12)$$

Krok 3: Warunek całk.* $(u_x^-)_y = (u_y^-)_x \Rightarrow$

$$\boxed{q_1 q_2 (u_{yy}^- - u_{xx}^-) + (q_1^2 - q_2^2) u_{xy}^- = 0 .} \quad \square \quad (13)$$

*Analogiczny argument dla $u^+ \Rightarrow u^+$ spełnia (13).

Postać sprzężona (szkic dowodu):

Krok 1: u^+ i u^- spełniają:

$$\boxed{q_1 q_2 (u_{yy} - u_{xx}) + (q_1^2 - q_2^2) u_{xy} = 0 .} \quad (14)$$

Reprezentacja rozw. (14)?

Krok 2: Zmiana współ. $\rho : (x, y) \mapsto (\xi, \theta)$, gdzie $\xi(x, y) = q_1 x + q_2 y$ oraz $\theta(x, y) = q_1 y - q_2 x$ zamienia (14) na

$$\boxed{\bar{u}_{\xi\theta} = 0 ,} \quad \bar{u}(\xi, \theta) = (u \circ \rho^{-1})(\xi, \theta) . \quad (15)$$

Krok 3: Całk. (15) i $u(x, y) = \bar{u}(\xi, \theta) \Rightarrow \forall \phi, \psi \in C^2$

$$\bar{u}(\xi, \theta) = \phi(\xi) + \psi(\theta) ,$$

$\Rightarrow$ rozw. (14):

$$\boxed{u(x, y) = \phi(q_1 x + q_2 y) + \psi(q_1 y - q_2 x) .} \quad (16)$$

Krok 4: $Z(16) \Rightarrow$

$$u^+(x, y) = \phi_+(q_1x + q_2y) + \psi_+(q_1y - q_2x), \quad u^-(x, y) = \phi_-(q_1x + q_2y) + \psi_-(q_1y - q_2x).$$

Krok 5: Jeśli u zafiksowane i spełnia (16) $\Rightarrow$

$$\phi(t) = u\left(\frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2}t, \frac{q_2}{q_1^2 + q_2^2}t\right) - c, \quad \psi(t) = u\left(\frac{-q_2}{q_1^2 + q_2^2}t, \frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2}t\right) + c - u(0, 0).$$

Krok 6: (u_x^+, u_y^+) dla $u^+ = \phi_+ + \psi_+$ podstawiamy do

$$u_x^- = \bar{f}_1(u_x^+, u_y^+, \vec{p}, \vec{q}), \quad u_y^- = \bar{f}_2(u_x^+, u_y^+, \vec{p}, \vec{q}). \quad (17)$$

$$\Rightarrow u_x^- = q_1\phi' + q_2\psi' \text{ i } u_y^- = q_2\phi' - q_1\psi'. \quad \Rightarrow$$

$$u^-(x, y) = \phi_+(q_1x + q_2y) - \psi_+(q_1y - q_2x).$$

$\Downarrow$

postać sprzężona*

$$(\phi_+, \psi_+) = (\phi_-, -\psi_-).$$

□

***Krzy. Gaussa** $K_u(x, y) = \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^2}$ w $(x, y, u(x, y)) \in S_u \Rightarrow K_{u^+}(x, y) = -K_{u^-}(x, y).$

Def. 1. Pow. prostokreślna $S \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists$ parametryzacja

$$\boxed{S(t, s) = \vec{\alpha}(t) + s\vec{w}(t)}, \quad (t, s) \in (a, b) \times (c, d).$$

S pokryta prostymi: $\forall t_0$ **prosta kierunkowa**:

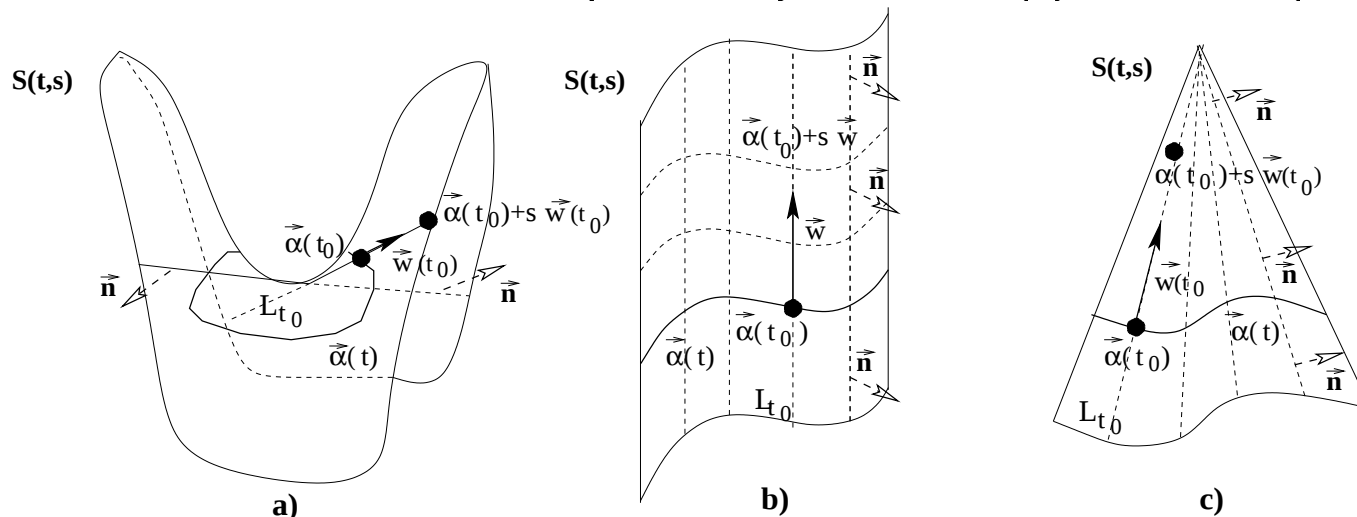
$$\boxed{L_{t_0}(s) = \vec{\alpha}(t_0) + s\vec{w}(t_0) \subset S}, \quad s \in (c, d).$$

$t \mapsto \vec{\alpha}(t) \subset S$ (dla $s = 0, t \in (a, b)$): **krzywa prowadząca**.

Def. 2. Pow. prostokreślna S jest rozwijalna:

$$\boxed{\langle \vec{w}(t) \times \vec{w}'(t) | \vec{\alpha}(t) \rangle = 0}.$$

Pow. rozwijalna: **cylind.** (**stożk.**) $\Rightarrow \vec{w}(t) = \vec{C}$ ($\vec{w}(t) \neq \vec{C}$).



Rys. 39. Pow. a) prostokreślna b) cylind. c) stożk.

Tw. 3. Niech $\Omega = \Omega_+^1 \cup \Omega_+^2 \cup \Gamma_0$, gdzie obszary $\Omega_+^1 \cap \Omega_+^2 = \emptyset$ ($\Lambda > 0$) i Γ_0 ($\Lambda = 0$) gładka krzywa. Niech $u \in C^2(\Omega_+^1)$ i $v \in C^2(\Omega_+^2)$ spełniają (2RIL). Jeśli E_1 i E_2 ciągłe na Ω i jeśli

$$\lim_{(x',y') \in \Omega_+^1 \rightarrow (x,y) \in \Gamma_0} u(x',y') = \bar{u}(x,y), \quad \lim_{(x'',y'') \in \Omega_+^2 \rightarrow (x,y) \in \Gamma_0} v(x'',y'') = \bar{v}(x,y)$$

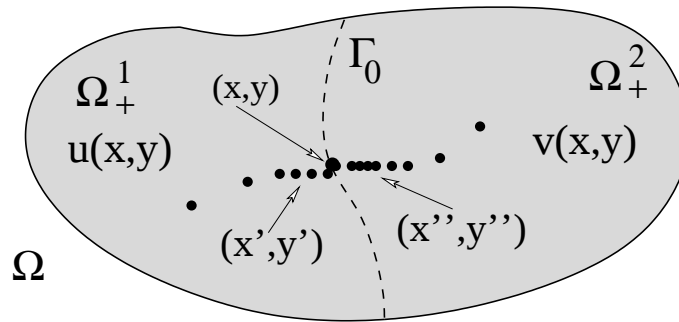
i obie granice

$$\lim_{(x',y') \in \Omega_+^1 \rightarrow (x,y) \in \Gamma_0} (u_x(x',y'), u_y(x',y')), \quad \lim_{(x'',y'') \in \Omega_+^2 \rightarrow (x,y) \in \Gamma_0} (v_x(x'',y''), v_y(x'',y''))$$

istnieją $\Rightarrow \exists \text{ Const.}$, taka że funkcja

$$z(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & \text{if } (x,y) \in \Omega_+^1, \\ \bar{u}(x,y) & \text{if } (x,y) \in \Gamma_0, \\ v(x,y) + \text{Const.} & \text{if } (x,y) \in \Omega_+^2 \end{cases}$$

$z \in C^1(\Omega)$ (sklejanie klasy C^1).



Rys. 40. Bifurkacje (u,v) w klasie C^1 wzdłuż krzywej Γ_0 .

Tw. 4. Niech $\Omega = \Omega_+^1 \cup \Omega_+^2 \cup \Gamma_0$, gdzie obszary $\Omega_+^1 \cap \Omega_+^2 = \emptyset$ ($\Lambda > 0$) i Γ_0 ($\Lambda = 0$) gładka krzywa. Niech $u, \hat{u} \in C^2(\Omega_+^1)$ i $u, \hat{v} \in C^2(\Omega_+^2)$ spełniają (2RIL). Jeśli E_1 i E_2 ciągłe na Ω i jeśli

$$\begin{aligned} \lim_{(x',y') \in \Omega_+^1 \rightarrow (x,y) \in \Gamma_0} (u(x',y'), \hat{u}(x',y')) &= (\bar{u}(x,y), \bar{\bar{u}}(x,y)), \\ \lim_{(x'',y'') \in \Omega_+^2 \rightarrow (x,y) \in \Gamma_0} (v(x'',y''), \hat{v}(x'',y'')) &= (\bar{v}(x,y), \bar{\bar{v}}(x,y)) \end{aligned}$$

i granice

$$\lim_{(x',y') \in \Omega_+^1 \rightarrow (x,y) \in \Gamma_0} (\nabla u(x',y'), \nabla \hat{u}(x',y')) , \quad \lim_{(x'',y'') \in \Omega_+^2 \rightarrow (x,y) \in \Gamma_0} (\nabla v(x'',y''), \nabla \hat{v}(x'',y''))$$

istnieją, i jeśli

$$z(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & \text{if } (x,y) \in \Omega_+^1, \\ \bar{u}(x,y) & \text{if } (x,y) \in \Gamma_0, \\ v(x,y) + c_1. & \text{if } (x,y) \in \Omega_+^2 \end{cases}$$

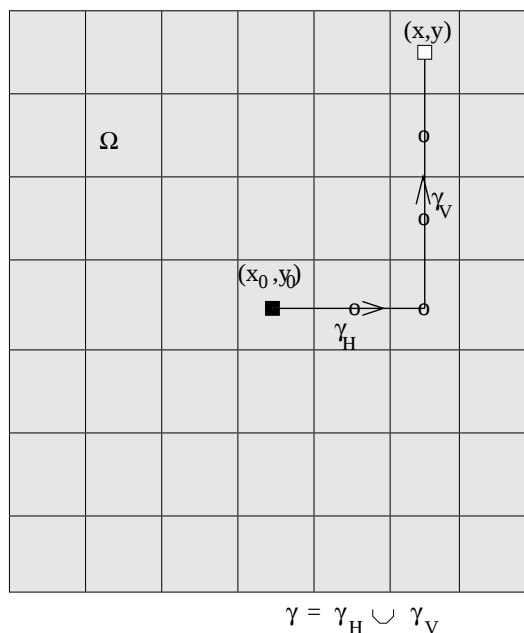
$z \in C^2(\Omega)$ (dla pewnej c_1) $\Rightarrow \exists c_2$ taka, że funkcja

$$\hat{z}(x,y) = \begin{cases} \hat{u}(x,y) & \text{if } (x,y) \in \Omega_+^1, \\ \bar{\bar{u}}(x,y) & \text{if } (x,y) \in \Gamma_0, \\ \hat{v}(x,y) + c_2. & \text{if } (x,y) \in \Omega_+^2 \end{cases}$$

$\hat{z} \in C^2(\Omega)$.*

***Sklejanie** pary (u,v) w klasie $C^2 \Rightarrow$ **sklejanie** pozostałej pary $(\hat{u}, \hat{v})$ w klasie C^2 .

7. Optymalizacja liniowa



Rys. 41. Całk. wzdłuż krzywej kawałkami lin.

- **dane ciągłe** - $\dot{\gamma} \equiv \text{const}$ (kawałkami)

$$u(x, y) = C + \int_0^1 [u_x(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \dot{\gamma}_1(t) + u_y(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t)] dt .$$

- **dane dyskretne** na pikselach (jeśli $\vec{v} = (u_x, u_y)$ - całk.)

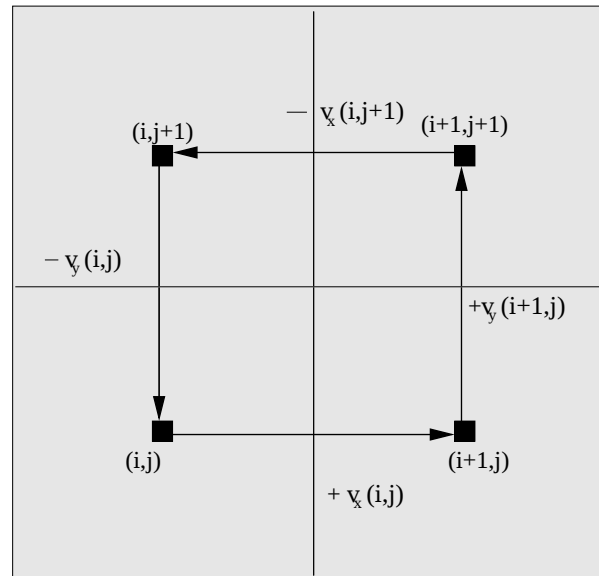
$$u(i+1, j) = u(i, j) + \Delta x u_x(i, j) , \quad u(i, j+1) = u(i, j) + \Delta y u_y(i, j) .$$

Dyskretna całk. wzdłuż atomowej pętli γ_c^{a*} :

$$\Delta x v_x[i, j] + \Delta y v_y[i + 1, j] - \Delta x v_x[i, j + 1] - \Delta y v_y[i, j] = 0 , \quad (18)$$

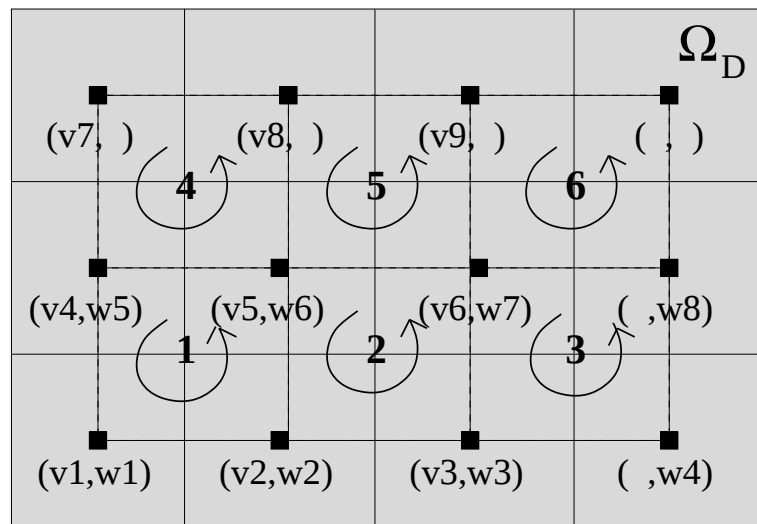
$$v_x[i, j] = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x} , \quad v_x[i, j + 1] = \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{\Delta x} ,$$

$$v_y[i, j] = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta y} , \quad v_y[i + 1, j] = \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j}{\Delta y} .$$



Rys. 42. (18) - dyskretyzacja ciąg. war. całk. (3).

*Oszacowanie ∇u met. róż. “do przodu”.



Rys. 43. 6 atom. pętli γ_c^a na Ω_D (9 pikseli).

Przyk. 10.: War. całk. (18) na 6 atom. pętlach γ_c^a :

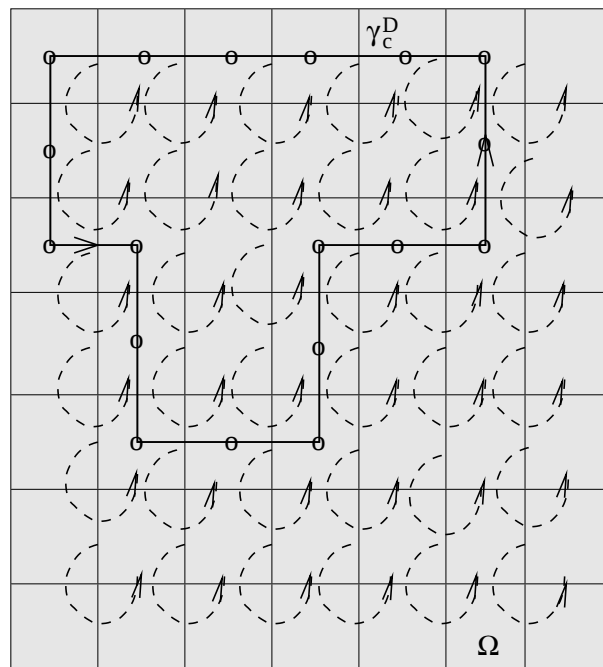
$$\begin{aligned}
 (1) \quad v_1 + w_2 - v_4 - w_1 &= 0, & (2) \quad v_2 + w_3 - v_5 - w_2 &= 0, \\
 (3) \quad v_3 + w_4 - v_6 - w_3 &= 0, & (4) \quad v_4 + w_6 - v_7 - w_5 &= 0, \\
 (5) \quad v_5 + w_7 - v_8 - w_6 &= 0, & (6) \quad v_6 + w_8 - v_9 - w_7 &= 0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

(19) - ukł. 6 rów. lin. jednorod. z 17 niewiad.:*

$$v_i \quad (1 \leq i \leq 9) \approx u_x \text{ ("do przodu").}$$

$$w_i \quad (1 \leq i \leq 8) \approx u_y \text{ ("do przodu").} \quad \square$$

*Piksele "prawe/górne" brzegu $\partial\Omega_D$ - nie zawsze przyporządkowane mają niewiad. (met. róż. "do przodu").



Rys. 44. $\forall \gamma_c^a \vec{v}$ spełnia (18) $\Rightarrow \forall \gamma_c^D$ dyskret. całka na $\gamma_c^D = 0$.

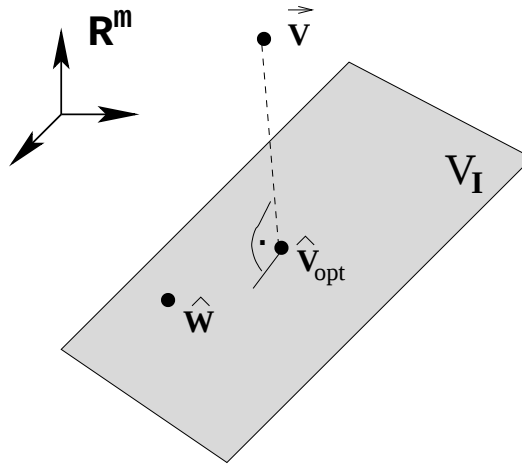
Tw. 1 dla (3RIL) (dla pikseli) $\Rightarrow$ 1 dyskr. pole $\vec{v}$ (tj. w **DFS3**).

Tw. 2 dla (2RIL) (dla pikseli) $\Rightarrow \forall$ piksela* 2 lub 1 $\vec{v}$.

Szum/Dyskret.: $\vec{v}$ nie spełnia (18) (dysk. całk.).

Rektyfikacja $\vec{v}$: najbliższe całk. pole $\hat{v}_{opt}$.

*Ilość pól w **DFS2** zależy od możliwych “dyskret. bifiurkacji”.



Rys. 45. $\hat{v}_{opt}$ - rzut ortogon. $\vec{v}$ na V_I (przestrz. lin.*).

Dyskretna całkowalność pola $X \in V_I$:

$$V_I = \{X \in \mathbb{R}^m : \boxed{L(X) = \vec{0}}\}, \quad L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{liniowy jednorod.} \} .$$

- $m \approx 2 \times \text{ilość pikseli}$ - **duże!**
- n **duże!** - ilość rów. = ilości atom. pętli γ_c^a ($m > n$)

Szum/Dyskretyz.: Tw. 1 (Tw. 2) dla (3RIL) ((2RIL)) $\Rightarrow \vec{v} \notin V_I$:

$$\boxed{L(\vec{v}) \neq \vec{0} .}$$

* V_I zależy od met. róż. (np. “do przodu”, “do tyłu”, “centralnej”) użytej do $\approx \nabla u$.

Dyskret./Szumy ciągłego modelu (3(2)RIL) $\Rightarrow$ lin. optymal.:

$$\mathcal{J}_Q(\hat{\mathbf{v}}_{opt}) = \min_{\hat{\mathbf{w}} \in V_I} \sum_{i,j=1} ((\hat{w}_1[i,j] - v_1[i,j])^2 + (\hat{w}_2[i,j] - v_2[i,j])^2) .$$

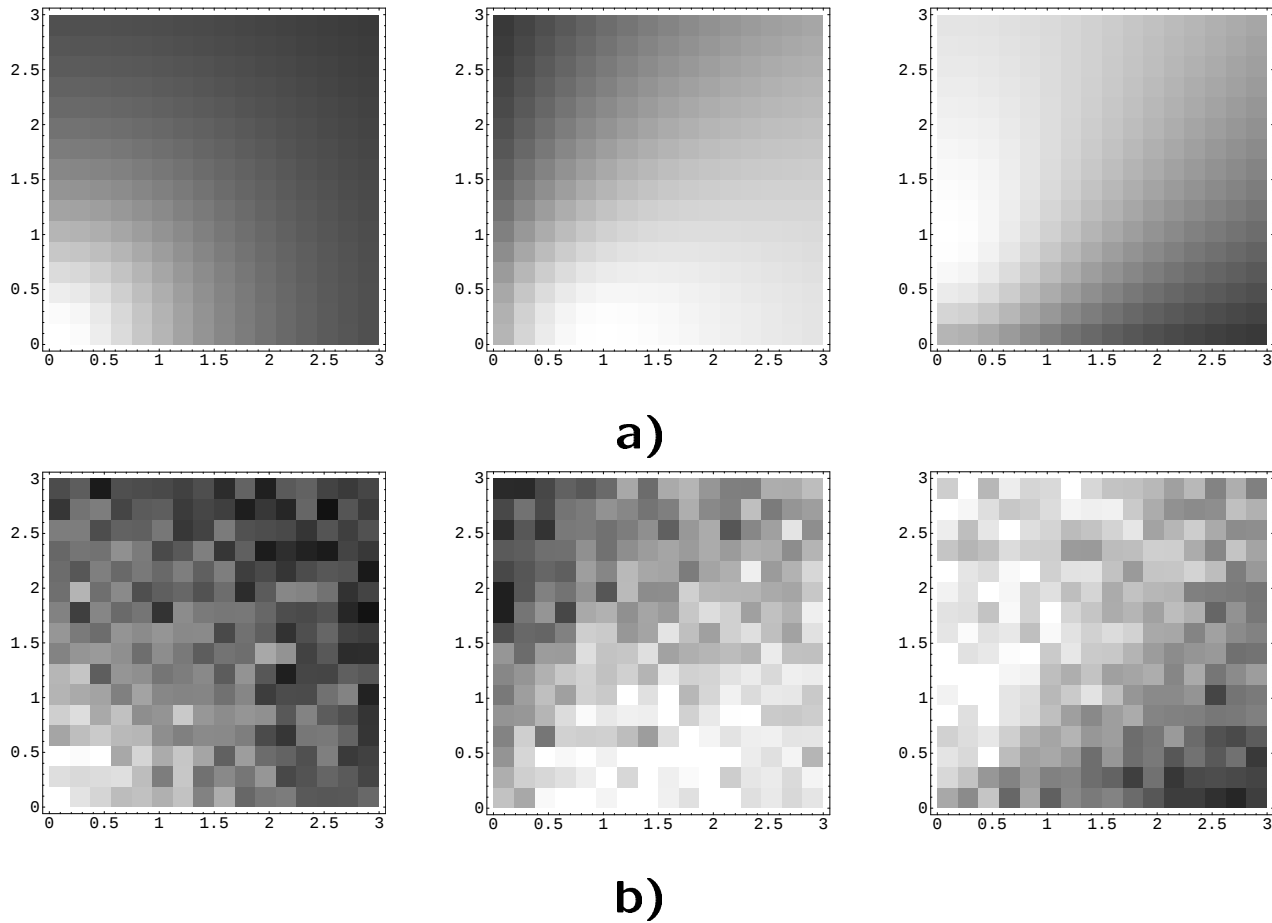
$\mathcal{J}_Q$: **kwadrat. (wypukła):** $\exists ! \hat{\mathbf{v}}_{opt} \in V_I$ (pseudo-inwersja):

$$\hat{\mathbf{v}}_{opt} = \vec{\mathbf{v}} - L^T (LL^T)^{-1} (L(\vec{\mathbf{v}})) .$$

Num. odwracanie macierzy $(LL^T)^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (n duże!).

Met. iter. (Gauss-Seidel, Leap-Frog) lub **odwracanie M rzadkich.***

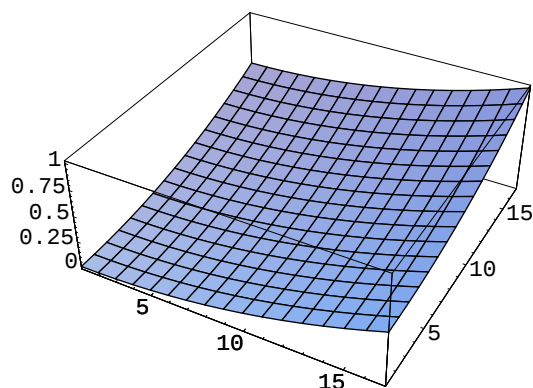
*Alternatywa: $\mathcal{I}(u) = \min_{u \in C^2(\Omega)} \int_{\Omega} ((v_1 - u_x)^2 + (v_2 - u_y)^2) dx dy$ i rów. Eulera $\Rightarrow$ rów. Poissona $\Delta u = f$.



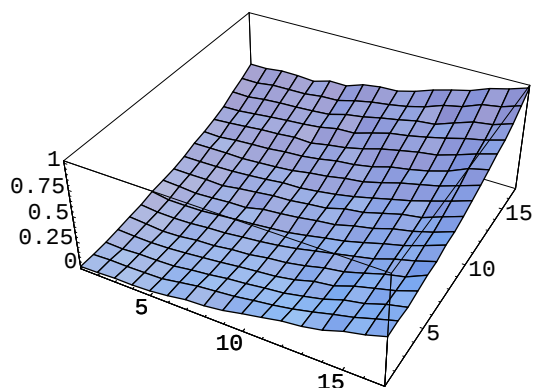
Rys. 46. Obr. dyskr. $M = 16$: **a)** bez szumu **b)** z szumem $\mathcal{N}(0, 0.1)$.

Przyk. 11.: Dane z **Przyk. 9.:** na $\Omega = [0, 1]^2$ z $\vec{p} = (0, 0, -1)$, $\vec{q} = (1, 0, -1)$, $\vec{r} = (0, 1, -1)$ i $u(x, y) = 0.5(x^2 + y^2)$ rozw.:

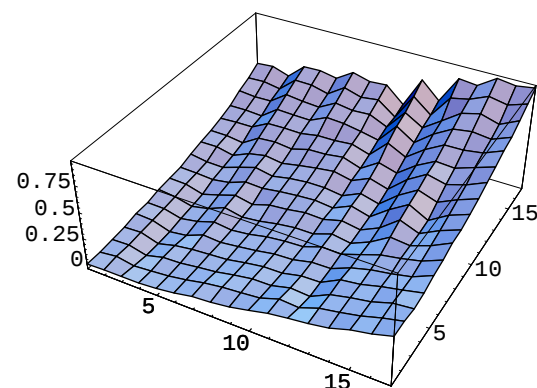
$$\frac{(\sqrt{2}, u_x+1, u_y+1)}{\sqrt{2(1+u_x^2+u_y^2)}} = (E_{\vec{p}}, E_{\vec{q}}, E_{\vec{r}})(x, y) = \frac{(\sqrt{2}, x+1, y+1)}{\sqrt{2(1+x^2+y^2)}}.$$



a)

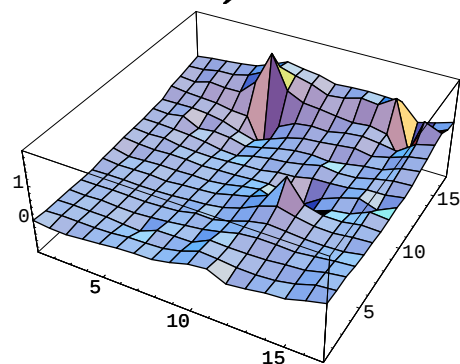


b)

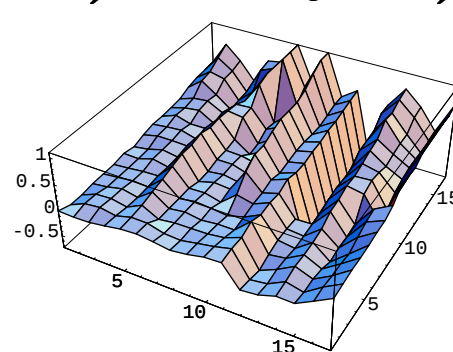


c)

Rys. 47. Rekonstr. S : a) bez szumów. b) lin. rektyf.* c) bez lin. rektyf.†



a)



b)

Rys. 48. S (szum $\mathcal{N}(0, 0.35)$) z: a) lin. rektyf. b) bez lin. rektyf. □

*Met. numer.: Leap-Frog ($k = 16, 20$ iter.).

† $\vec{v}$ nie całk. $\Rightarrow$ (2) zależy od drogi całk. γ . Piksel $(1, 1) = (x_0, y_0)$ i ścieżki $\gamma_{(1,1)}^{(i,j)}$ do piksela (i, j) “horyzontalno-pionowe”.

Liniowa rektyf. całk. $\vec{v}$ - pewne wady.

Tw. 1 “Nieliniowy filtr” dla E_i ($1 \leq i \leq 3$)

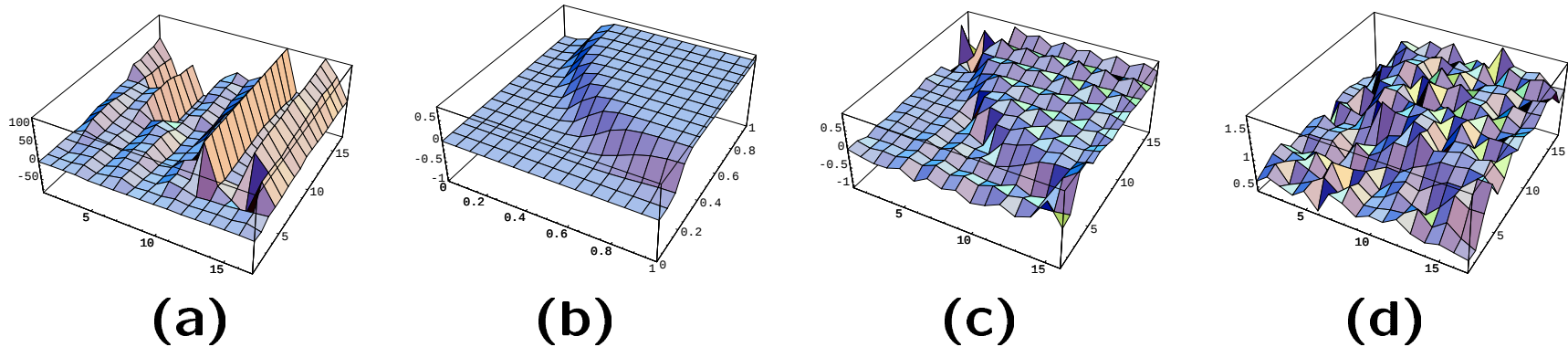
$$u_x + \mathcal{N}(0, \lambda) \neq v_1 = f_1(E_1 + \mathcal{N}(0, \sigma), E_2 + \mathcal{N}(0, \sigma), E_3 + \mathcal{N}(0, \sigma), \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}),$$

$$u_y + \mathcal{N}(0, \lambda) \neq v_2 = f_2(E_1 + \mathcal{N}(0, \sigma), E_2 + \mathcal{N}(0, \sigma), E_3 + \mathcal{N}(0, \sigma), \vec{p}, \vec{q}, \vec{r}),$$

nie zachowuje szumu Gaussa.

$\mathcal{I}_Q$ (zas. naj. wiarygod.): szum Gaussa na poziomie $\vec{v}$.

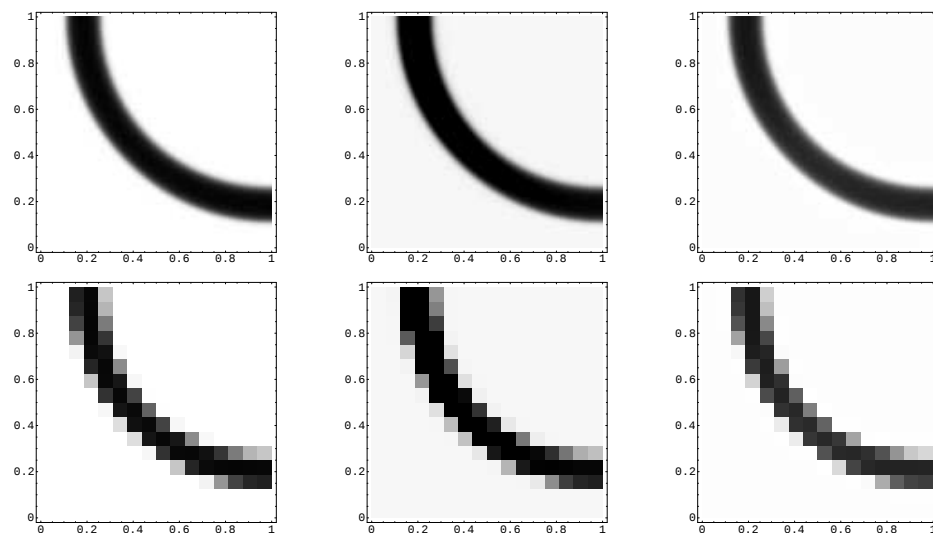
Przyk. 12.:



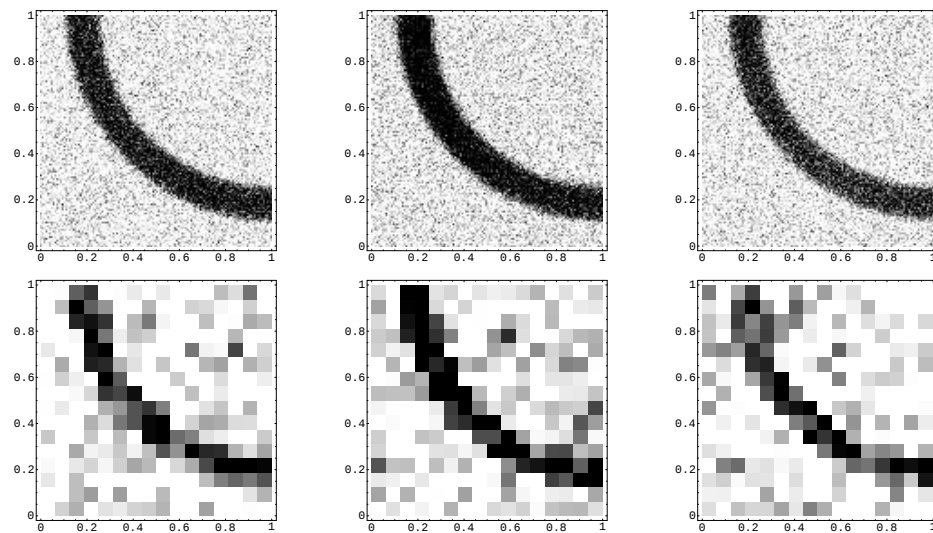
Rys. 49. Rekonst. **a)** Lin. **b)** Ciągła. **c)** Nielin. **d)** War. początk.

Dla $N = 3$ pow. tang.* $\sigma = 0.25$ (Leap-Frog; $k = 4$ 20 iter.).

* $u_{\tanh}(x, y) = \frac{1}{3}(1 - \tanh(\frac{25}{6}(4 - 6x + 3x^2 - 6y + 3y^2)))$, $\vec{p} = (0, 0, -1)$, $\vec{q} = (1 - \sqrt{3}, 0, -1 - \sqrt{3})/(2\sqrt{2})$,
i $\vec{r} = (\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{24}, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{24}, -\cos \frac{\pi}{24})$; war. pocz. $\vec{u}_0 = \vec{u}_{\tanh} + \vec{\mathcal{N}}(0, 1/8)$.



a)



b)

Rys. 50. Obrazy u_{tanh} z $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ z $M = 128(16)$: a) bez b) z szumem.

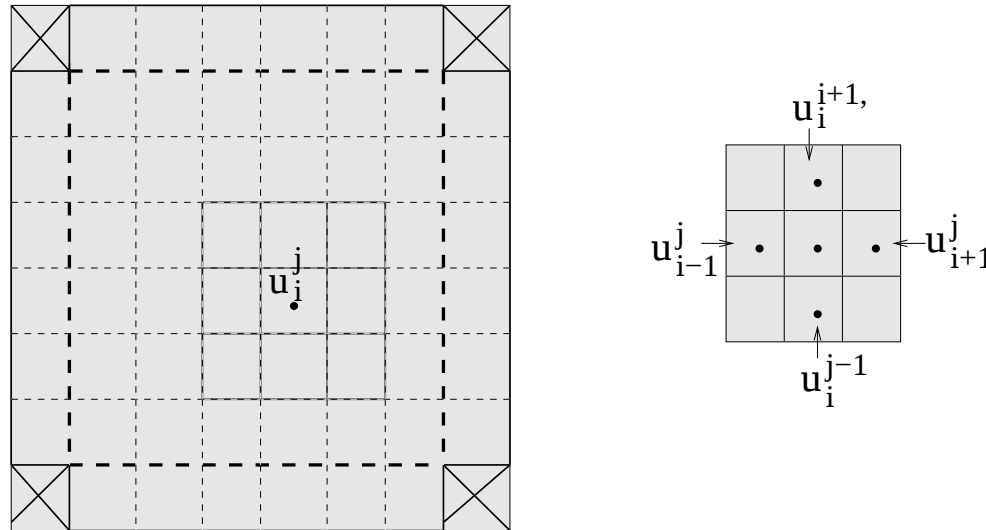


8. Optymalizacja nieliniowa

Różnice central. $\approx (u_x, u_y) \forall$ wew. piksela (i, j) ($2 \leq i, j \leq M - 1$; M liczba pikseli) w $\Omega = [0, 1]^2$:

$$\boxed{\langle \hat{\nu}_i^j, \frac{p}{\|p\|} \rangle = E^{i,j} .} \quad (\mathbf{DRIL})$$

$$\frac{\vec{n}(x_i, y_j, u_i^j)}{\|\vec{n}(x_i, y_j, u_i^j)\|} \approx \hat{\nu}_i^j = \frac{(M \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2}, M \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2}, -1)}{\sqrt{1 + (M \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2})^2 + (M \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2})^2}} .$$



Rys. 51. Dyskretyzacja **(RIL)** $\Rightarrow$ **(DRIL)** dla wew. pikseli Ω .

Wartości $\vec{u} \in V = \mathbb{R}^{M^2-4}$ w $M \times M$ **tablicy**:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1^{M-1} & u_2^M & \cdots & \cdots & u_{M-1}^M & u_M^{M-1} \\ u_2^{M-1} & u_2^{M-1} & \cdots & \cdots & u_{M-1}^{M-1} & u_M^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^2 & u_2^2 & \cdots & \cdots & u_{M-1}^2 & u_M^2 \\ u_2^1 & u_2^1 & \cdots & \cdots & u_{M-1}^1 & u_M^1 \end{pmatrix} .$$

Ilość **(DRIL)** = ilości **wew. pikseli** tj. $(M-2)^2$.

Równoważnie: $f^p : V = \mathbb{R}^{M^2-4} \rightarrow \mathbb{R}^{(M-2)^2}$

$$\boxed{f^p(\vec{u}) = E} , \quad \equiv \quad \forall (i, j) \in [2, M-1] \quad \boxed{f_{i,j}^p(\vec{u}) = E^{i,j}}$$

$$f_{i,j}^p(\vec{u}) = \langle \hat{\nu}_i^j(\vec{u}), \frac{p}{\|p\|} \rangle .$$

3 oświetlenia p^1, p^2, p^3 (**dyskretyzacja*** ∇u):

$$\boxed{f^{p^1}(\vec{u}) = E_1} , \quad \boxed{f^{p^2}(\vec{u}) = E_2} , \quad \boxed{f^{p^3}(\vec{u}) = E_3} . \quad (20)$$

*Faktycznie znaki $" = "$ w (20) i w **(DRIL)** powinno zastępować $" \approx "$.

$\bar{E}_i$ (E_i + szum Gaussa) $\Rightarrow$ (20) generycz. **nie speł.:**

$$\boxed{f^{p^1}(\vec{u}) \neq \bar{E}_1,} \quad \boxed{f^{p^2}(\vec{u}) \neq \bar{E}_2,} \quad \boxed{f^{p^3}(\vec{u}) \neq \bar{E}_3.}$$

Zasada najw. wiarygod. $\Rightarrow \vec{u}^{opt} \approx \vec{u}$:

$$\boxed{\mathcal{J}(\vec{u}^{opt}) = \min_{\vec{u} \in V} \sum_{s=1}^3 \|f^{p^s}(\vec{u}) - \bar{E}_s\|^2.} \quad (21)$$

$\mathcal{J}$ - nielin. opt. ($\Rightarrow \vec{u}^{opt}$ wprost).

Met. numer.* dla (21):

- **Newton:**[†] $\boxed{\nabla \mathcal{J} = \vec{0}}$: $(A = D^2 \mathcal{J})^{-1}$ ($\bar{a}_{ij} \approx (600 \times 800)^2$)
- **Spadek G.:**[‡] $\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n - \lambda_n \nabla \mathcal{J}(\vec{u}_n) \Rightarrow \lambda_n = ?$ ($D^2 \mathcal{J}!$)

*War. pocz. $\vec{u}_0$ a) opt. lin. b) różne c) **SFS** $\mathcal{J}(\vec{u}^{opt}) = ? \Rightarrow$ ile iter.?

[†]Dla $\nabla \mathcal{J} = \vec{0}$ **Newton** $\Rightarrow \boxed{\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n - (D^2 \mathcal{J}(\vec{u}_n))^{-1}(\nabla \mathcal{J}(\vec{u}_n)).}$

[‡] $\vec{v} = \nabla \mathcal{J}(\vec{u}_n)$ kiedy $\mathcal{J}(\vec{u}_n + t\vec{v}) \approx \mathcal{J}(\vec{u}_n) + \nabla \mathcal{J}(\vec{u}_n)t\vec{v} + \frac{1}{2}(t\vec{v})^T D^2 \mathcal{J}(\vec{u}_n)(t\vec{v})$ min.?

$$\boxed{t_{min} = -(\nabla \mathcal{J}(\vec{u}_n)^T \vec{v}) / (\vec{v}^T D^2 \mathcal{J}(\vec{u}_n) \vec{v}).}$$

	u_2^4	u_3^4	Ω_D
u_1^3	■ u_2^3	■ u_3^3	u_4^3
u_1^2	■ u_2^2	■ u_3^2	u_4^2
	u_2^1	u_3^1	

Rys. 52. Dla 3 obrazów z 16 pikseli: fun. kosztu $\mathcal{J} : \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}$.

Przyk. 13.: Dla $1 \leq s \leq 3$ i 16 pikseli $\vec{u} \in \mathbb{R}^{12}$ (21):

$$\mathcal{J}(\vec{u}) = \sum_{s=1}^3 ((\langle \hat{\nu}_2^2, \frac{p^s}{\|p^s\|} \rangle - E_s^{2,2})^2 + (\langle \hat{\nu}_2^3, \frac{p^s}{\|p^s\|} \rangle - E_s^{2,3})^2 + (\langle \hat{\nu}_3^2, \frac{p^s}{\|p^s\|} \rangle - E_s^{3,2})^2 + (\langle \hat{\nu}_3^3, \frac{p^s}{\|p^s\|} \rangle - E_s^{3,3})^2),$$

$$\hat{\nu}_i^j = \frac{(M \frac{(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j)}{2}, M \frac{(u_i^{j+1} - u_i^{j-1})}{2}, -1)}{\sqrt{1 + (M \frac{(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j)}{2})^2 + (M \frac{(u_i^{j+1} - u_i^{j-1})}{2})^2}} \approx \frac{(u_x, u_y, -1)}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|},$$

z $\nabla u \approx$ met. róż. centralna. $\square$

Niejednozn. w opt. $\mathcal{J}^*$:

- **standardowa** (przyp. ciągły):

$$f^p(\vec{u} + \vec{c}) = f^p(\vec{u}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{J}(\vec{u} + \vec{c}) = \mathcal{J}(\vec{u})}, \quad (22)$$

$\vec{c} \in \mathbb{R}^{M^2-4}$ - stała tablica.

- **niestandardowa**: dla $1 \leq k \leq 4$, $\vec{u}_k \in \mathbb{R}^{M^2-4}$ i $c_k \in \mathbb{R}$:

$$f^p(\vec{u} + \sum_{1 \leq k \leq 4} c_k \vec{u}_k) = f^p(\vec{u}).$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\mathcal{J}(\vec{u} + \sum_{1 \leq k \leq 4} c_k \vec{u}_k) = \mathcal{J}(\vec{u})}. \quad (23)$$

Niejednoznaczności $\equiv \mathbf{V}$: 4 wym. przest. lin. ($\vec{c} = \sum_{k=1}^4 \vec{u}_k$).

*Niejednoznaczność w opt. $\mathcal{J}$ wynika z zast. central. met. róż. do $\approx \nabla u$.

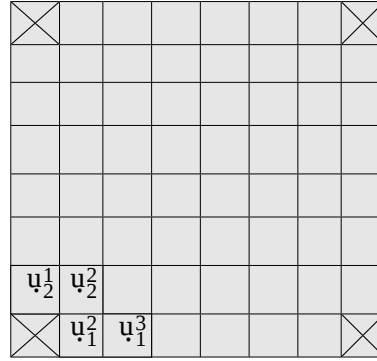
$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\vec{u}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

“Róż. centralne” (dla $\approx \nabla u$) zastosow. do $\vec{u}_i$, $1 \leq i \leq 4$:

$$\hat{\nu}_i^j(\vec{u}) = \hat{\nu}_i^j(\vec{u} + \sum_{1 \leq k \leq 4} c_k \vec{u}_k), \quad c_k \in \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\mathcal{J}(\vec{u} + \sum_{1 \leq k \leq 4} c_k \vec{u}_k) = \mathcal{J}(\vec{u}) .}$$

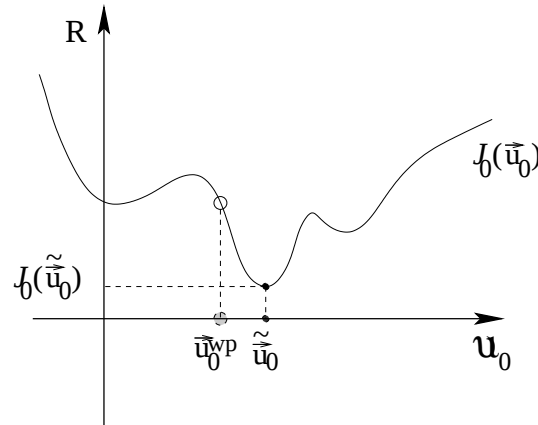


Rys. 53. Eliminacja niejednozn.: $u_1^2 = u_1^3 = u_2^1 = u_2^2 = 0$.

$\mathcal{J}_0 : \mathcal{U}_0 \rightarrow [0, \infty)$ obcięcie $\mathcal{J}$ do $\mathcal{U}_0 \equiv \mathbb{R}^{M^2-8}$ tablic $\vec{u}$:

$$\boxed{u_1^2 = u_1^3 = u_2^1 = u_2^2 = 0.} \quad (24)$$

Tw. 5. 3 obr. z szumem $\bar{E}^s$ dost. $\approx$ obr. $f^{p^s}(\vec{u}_0^{wp})$ (z $1 \leq s \leq 3$)
uzysk. z war. początk. $\vec{u}_0^{wp} \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow \exists !1$ **global. min.** $\tilde{\vec{u}}_0 \in \mathcal{U}_0$ dla $\mathcal{J}_0$.



Rys. 54. $\mathcal{J}_0$ nie jest glob. wypukła. Wypukła dla $\vec{u}_0^{wp} \approx \tilde{\vec{u}}_0$.

RELAKSACJA^{*}:

Krok 1: nonlin. opt. $\mathcal{J}_0 \Rightarrow \vec{u}_0^{opt} \in \mathcal{U}_0$.

Krok 2: lin. opt. $\Rightarrow \vec{u}_{opt}^R \in \mathcal{U}$ z relaksacji:

$$\boxed{\mathcal{J}_R(\vec{u}) = \sum (u_{i+1}^j - u_i^j)^2 + \sum (u_i^{j+1} - u_i^j)^2 .} \quad (25)$$

Dyskret. ciągł. “do przodu” dla $\boxed{\vec{u} \in \{\vec{u}^{opt} + \sum_{k=1}^4 c_k \vec{u}_k\}}.$

$\mathcal{J}_R$ kwadrat. z 4 zmien. $c_k \Rightarrow$ optymal. (25) standard.

Met. numer.[†]: $\mathcal{J}_Q$ (opt. lin.) lub $\mathcal{J}_0$ (opt. nielin.)?



2D Leap-Frog.

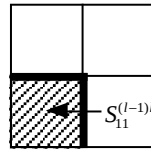
*Uwolnienie więzu $u_1^2 = u_1^3 = u_2^1 = u_2^2 = 0$.

†Opt. na macierzach o olbrzymich wymiarach!

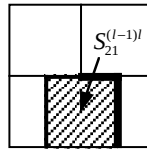
9. 2D Leap-Frog - Met. Numeryczna

2D Leap-Frog (2D-LF) numer. (i) lin. ((ii) nielin.) opt.*:

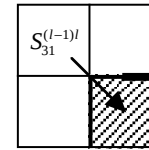
$$(i) \vec{v}_{n+1} = LF(\vec{v}_n), \quad \text{lub} \quad (ii) \vec{u}_{n+1} = LF(\vec{u}_n).$$



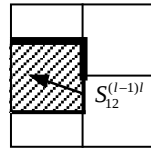
(a)



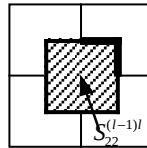
(b)



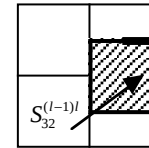
(c)



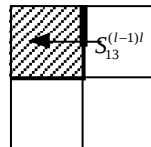
(d)



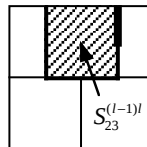
(e)



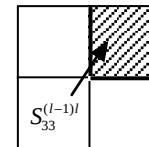
(f)



(g)



(h)



(i)

Rys. 55. 1 iter. 2D-LF: optymal. na 9 typach małych podobszarów.

†

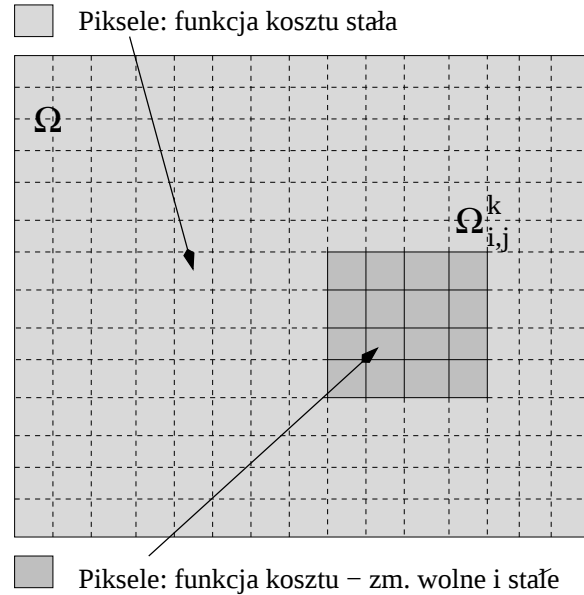
*Fun. kosztu (np. $\mathcal{J}_Q$ i $\mathcal{J}_0$ dla obr. z szumami) zależy od wielkiej ilości zm.

†Przypadek (e) generyczny.

- war. początk.* $\vec{u}_0$
- minima z nakładek[†] $\Omega_{i,j}^k$ aktual.[‡] lok. zm. $\vec{u}_n$ ($\vec{v}$):

$$\mathcal{J}_0(\vec{u}_n^+) = \mathcal{J}_0^f(\vec{u}_n^{fix}) + \boxed{\mathcal{J}_0^l(\vec{u}_n^{+opt.})} \leq \mathcal{J}_0^f(\vec{u}_n^{fix}) + \boxed{\mathcal{J}_0^l(\vec{u}_n^{lok.})} = \mathcal{J}_0(\vec{u}_n^-),$$

$$\mathcal{J}_Q(\vec{v}_n^+) = \mathcal{J}_Q^f(\vec{v}_n^{fix}) + \boxed{\mathcal{J}_Q^l(\vec{v}_n^{+opt.})} \leq \mathcal{J}_Q^f(\vec{v}_n^{fix}) + \boxed{\mathcal{J}_Q^l(\vec{v}_n^{lok.})} = \mathcal{J}_Q(\vec{v}_n^-).$$



Rys. 56. Generyczna optymal. na wew. nakładce $\Omega_{i,j}^k$ ($k = 4$).

*Istotne dla nielin. opt. Lin. opt. na $\Omega_{i,j}^k$ – stos. met. pseudo-inwersji.

[†]Nielin. lok. opt. na $\Omega_{i,j}^k$: war. pocz. – aktualne war. odpowiadających zm. “odmrożonym”.

[‡]Min. z nakł. zamieniają odpowiadające wartości w $\vec{u}_n$ ($\vec{v}$).

- **1 iter. 2D-LF** aktualizuje $\forall$ zm. $\vec{u}_n$ (i $\vec{v}_n$)
- **rozmiar** $\Omega_{i,j}^k$ i **kolejność** opt. - może się zmieniać*
- **2D-LF** $\Rightarrow$ paralelizacja
- lin. opt. (rektyf. $\neg$ całk. pola) **2D-LF** $\Rightarrow \vec{v}_n \rightarrow \hat{\mathbf{v}}_{opt.}^\dagger$
- nielin. opt. (rekonstr. $\vec{u}$ w **PS3** z szumami) **2D-LF** $\Rightarrow \vec{u}_n \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_0^\ddagger$

***1 iter. 2D-LF** $\Rightarrow$ każda zm. w $\vec{u}$ ($\vec{v}$) musi być “odmroż.” zm. chociaż w 1 $\Omega_{i,j}^k$.

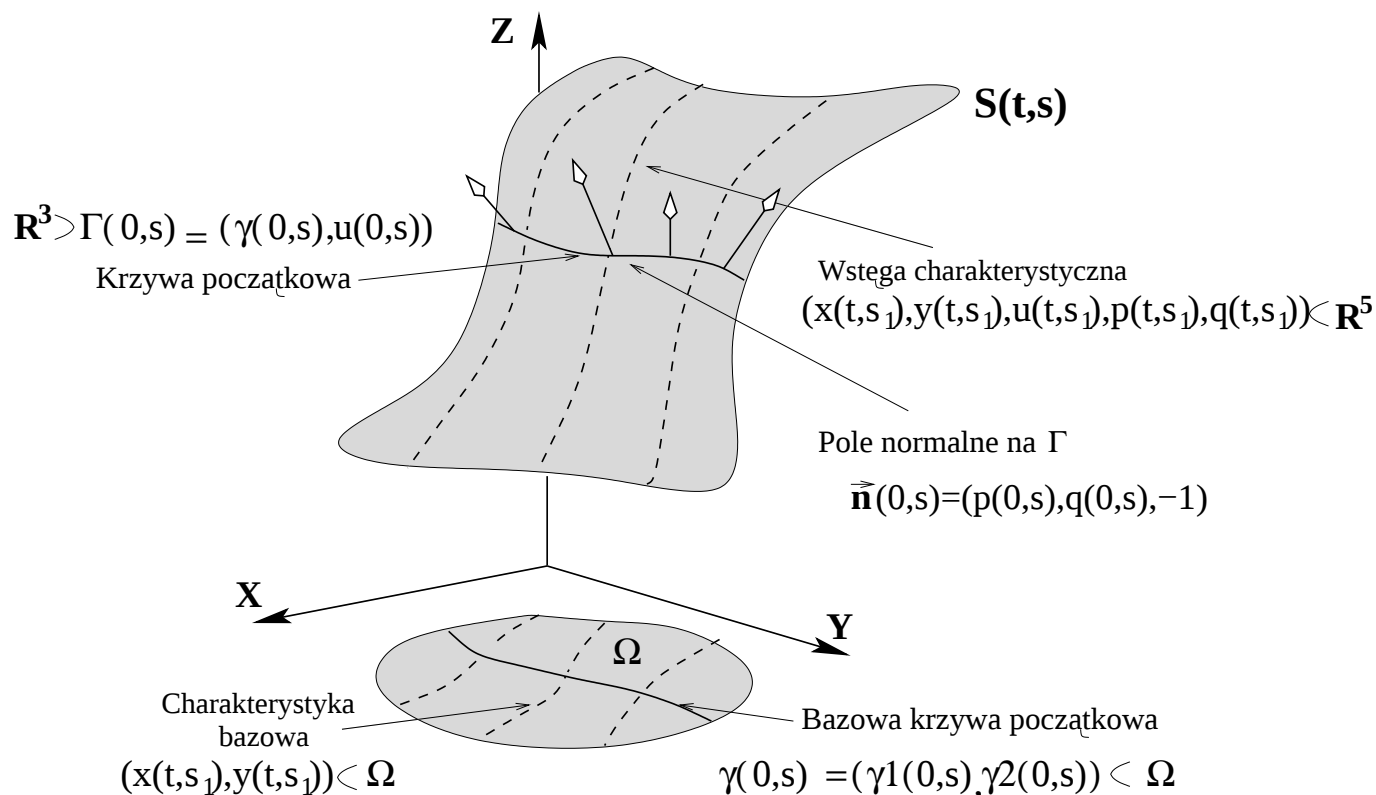
$^\dagger \hat{\mathbf{v}}_{opt.}$ - jed. glob. min. $\mathcal{J}_Q$ (opt. lin.).

$^\ddagger \tilde{\mathbf{u}}_0$ - jed. glob. min. $\mathcal{J}_0$ (opt. nielin.).

10. Wstęgi Charakterystyczne - SfS

Nielin. rów. cząstk. 1ego rzędu (np. (RIL)) Tw. Cauchy-ego.:

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0. \quad u|_{\gamma} = u(s), \quad \text{grad}(u)|_{\gamma} = (p(s), q(s)). \quad (26)$$



Rys. 57. S pokrywają "wstęgi charakterystyczne" *.

*S pokrywają rzuty wstęg na $(x(t, s), y(t, s), u(t, s))$.

(26) $\equiv$ ukł. róż. zwyczaj.:

$$\begin{aligned}x_t(t, s) &= F_p(x, y, u, p, q) , \\y_t(t, s) &= F_q(x, y, u, p, q) , \\u_t(t, s) &= pF_p(x, y, u, p, q) + qF_q(x, y, u, p, q) , \\p_t(t, s) &= -F_x(x, y, u, p, q) - pF_u(x, y, u, p, q) , \\q_t(t, s) &= -F_y(x, y, u, p, q) - qF_u(x, y, u, p, q)\end{aligned}\tag{27}$$

z (na krzyw. pocz. Γ) war. **Dirichleta**:

$$\begin{aligned}x(0, s) &= x(s) , \\y(0, s) &= y(s) , \\u(0, s) &= u(s)\end{aligned}\tag{28}$$

i z war. **Neumanna**

$$\begin{aligned}p(0, s) &= x(s) , \\q(0, s) &= y(s) .\end{aligned}\tag{29}$$

Tw. Cauchy-ego: (27), (28), (29) $\Rightarrow \exists!$ **1** rozw.* $(x, y, u, p, q)(t, s)$
 $\Rightarrow$ dla prob. Cauchy-ego[†] (26) $\exists!$ **1** rozw. $u(x, y) \in C^2$.

*Jeśli $(F_p(0, s), F_q(0, s)) \neq (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ (baz. krzywa pocz. γ nie styczna do char. baz.), $\dot{u}(s) = p(s)\dot{x}(s) + q(s)\dot{y}(s)$ i $F \in C^2$.

[†]War. pocz. (26) zred. do 1 pktu $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) \Rightarrow$ char. lok. Tw. Cauchy-ego.

Przyk. 14.: Lin. F_R (zdjęcia Księżyca; kier. ośw. $(a_1, a_2, -1)$) (**RI**):

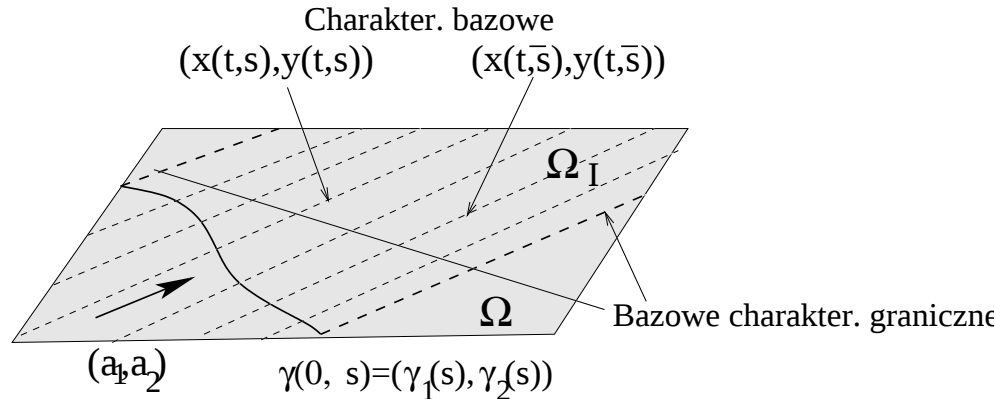
$$\frac{a_1 u_x(x, y) + a_2 u_y(x, y) + 1}{\|(a_1, a_2, -1)\|} = E(x, y) . \quad (\mathbf{RI} \mathbf{Lin})$$

Z $\mathcal{E}(x, y) = \|(a_1, a_2, -1)\|E(x, y) - 1$ (RI**Lin):**

$$a_1 u_x(x, y) + a_2 u_y(x, y) = \mathcal{E}(x, y) .$$

$\Rightarrow F(x, y, u, p, q) = a_1 p + a_2 q - \mathcal{E}(x, y)$ i **Met. Char.** $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} (a) \quad x_t(t, s) &= a_1 , \\ (b) \quad y_t(t, s) &= a_2 , \\ (c) \quad u_t(t, s) &= a_1 p + a_2 q = \mathcal{E}(x(t, s), y(t, s)) , \\ (d) \quad p_t(t, s) &= \mathcal{E}_x(x(t, s), y(t, s), u(t, s), p(t, s), q(t, s)) , \\ (e) \quad q_t(t, s) &= \mathcal{E}_y(x(t, s), y(t, s), u(t, s), p(t, s), q(t, s)) . \end{aligned} \quad (30)$$



Rys. 58. Char. baz.* $(x(t, s), y(t, s)) \parallel (a_1, a_2)$.

* $\gamma(0, s)$ i baz. char. graniczne określają podobszar $\Omega_I \subset \Omega$ rekonstr. S.

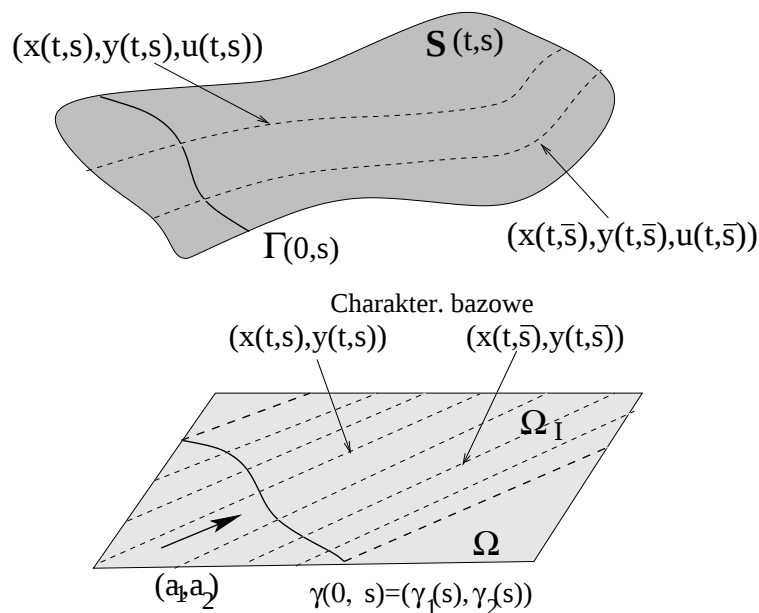
(30)(a-c) i **war. Dirichleta** $\Gamma(0, s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), u(s))$ wystarczają*.

(a) i (b) + baz. krzywa początk. $\gamma(0, s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$:

$$\boxed{x(t, s) = a_1 t + \gamma_1(s), \quad y(t, s) = a_2 t + \gamma_2(s).} \quad (31)$$

(31) + (30)(c) + $u(s)|_\gamma \Rightarrow$ **analityczne rozw.**

$$\boxed{u(t, s) = \int_0^t \mathcal{E}(a_1 t' + \gamma_1(s), a_2 t' + \gamma_2(s)) dt' + u(s).}$$



Rys. 59. Rekonstr. S wzdłuż $\parallel$ **char. baz.**

*W przyp. lin. (baz. char. $\parallel$). W przyp. nielin. 5 rów. char. niezbędnych + pełne war. pocz. Dirichleta i Neumanna.

Dla **rów. eikonatu** ($\vec{p} = (0, 0, -1)$) $\Rightarrow$

$$\boxed{u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) = \mathcal{E}(x, y)}, \quad \mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{E^2(x, y)} - 1$$

rów. char.* dla $F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2 - \mathcal{E}(x, y)$:

$$\begin{aligned} x_t(t, s) &= 2p(t, s), \\ y_t(t, s) &= 2q(t, s), \\ u_t(t, s) &= 2p^2(t, s) + 2q^2(t, s) = 2\mathcal{E}(x(t, s), y(t, s)), \\ p_t(t, s) &= \mathcal{E}_x(x(t, s), y(t, s), u(t, s), p(t, s), q(t, s)), \\ q_t(t, s) &= \mathcal{E}_y(x(t, s), y(t, s), u(t, s), p(t, s), q(t, s)). \end{aligned} \tag{32}$$

Analit. rozw. ? ((32) nielin.) $\Rightarrow$ **numeryczne**

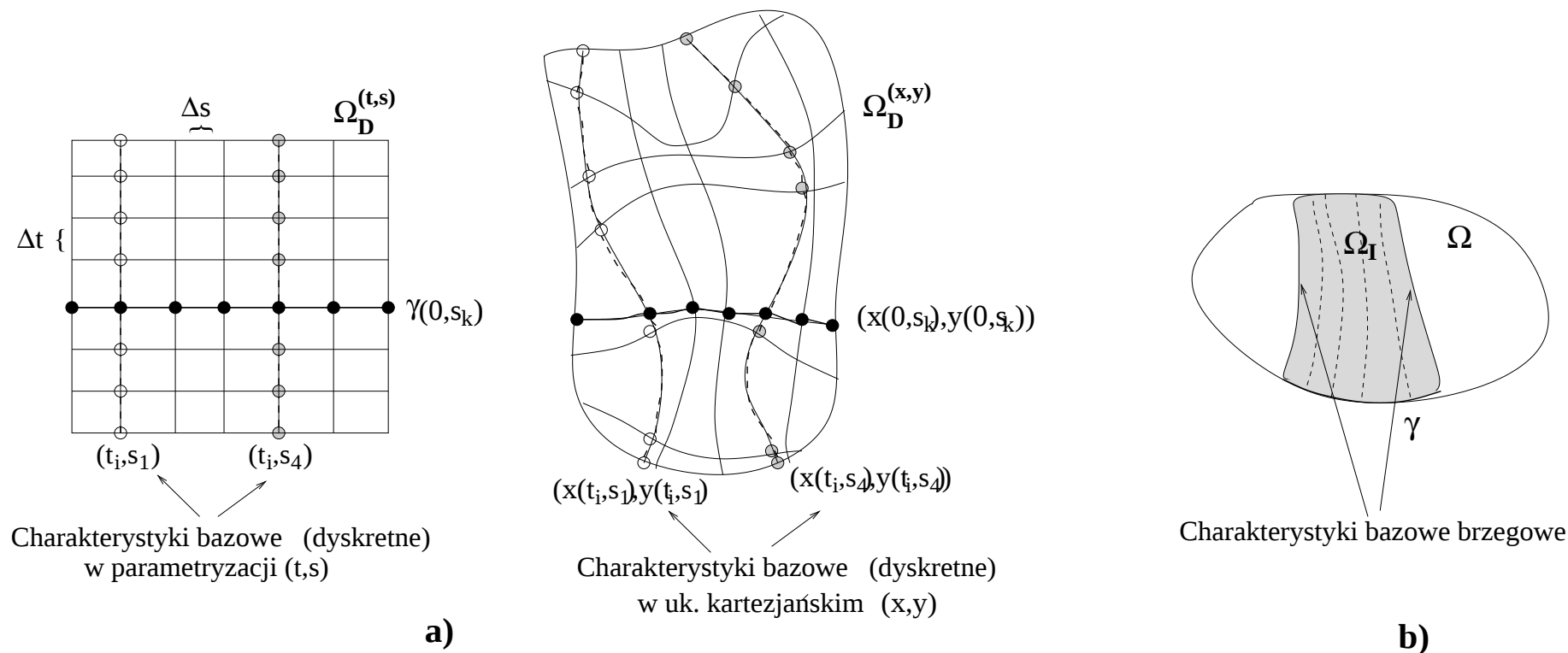
$$\begin{aligned} x(t_{i+1}, s_k) &= x(t_i, s_k) + 2\Delta t p(t_i, s_k), \\ y(t_{i+1}, s_k) &= y(t_i, s_k) + 2\Delta t q(t_i, s_k), \\ u(t_{i+1}, s_k) &= u(t_i, s_k) + 2\Delta t \mathcal{E}(x(t_i, s_k), y(t_i, s_k)), \\ p(t_{i+1}, s_k) &= p(t_i, s_k) + \Delta t \mathcal{E}_x(x(t_i, s_k), y(t_i, s_k), u(t_i, s_k), p(t_i, s_k), q(t_i, s_k)), \\ q(t_{i+1}, s_k) &= q(t_i, s_k) + \Delta t \mathcal{E}_y(x(t_i, s_k), y(t_i, s_k), u(t_i, s_k), p(t_i, s_k), q(t_i, s_k)). \end{aligned} \tag{33}$$

Problemy z met. char. w SfS:

- war. początk. Dirichleta i Neumanna generycznie nieznane

*Dla rów. eikonatu char. baz. styczne do ∇u .

- stabilność ukł. (33) (propag. błędu wzdłuż char. baz.)
- rów. siatka $(t_i, s_k) \not\Rightarrow$ rów. siatki (x_i, y_k)



60. Rekonst. u na **a)** siatce (x_i, y_k) nierów. **b)** $\Omega_I \subset \Omega$.

- obszar wyz. baz. char. Ω_I (dyskr. lub ciągłe) $\supset$ pokrywa Ω .

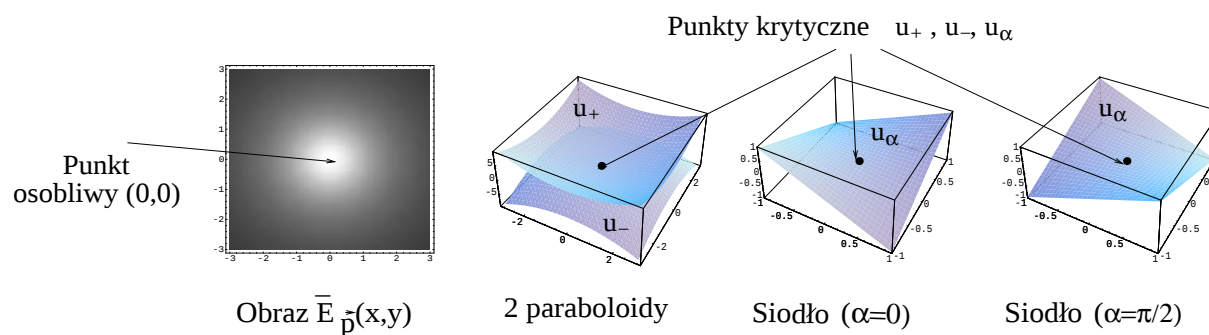
11. Pkty Osobliwe w Rekonstrukcji

Przyk. 15.: $\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} = E(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ $\vec{p} = (0, 0, -1)$

$$u_{\pm}(x, y) = \pm 0.5(x^2 + y^2),$$

$$u_{\alpha}(x, y) = (x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha))(y \cos(\alpha) - x \sin(\alpha)), \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

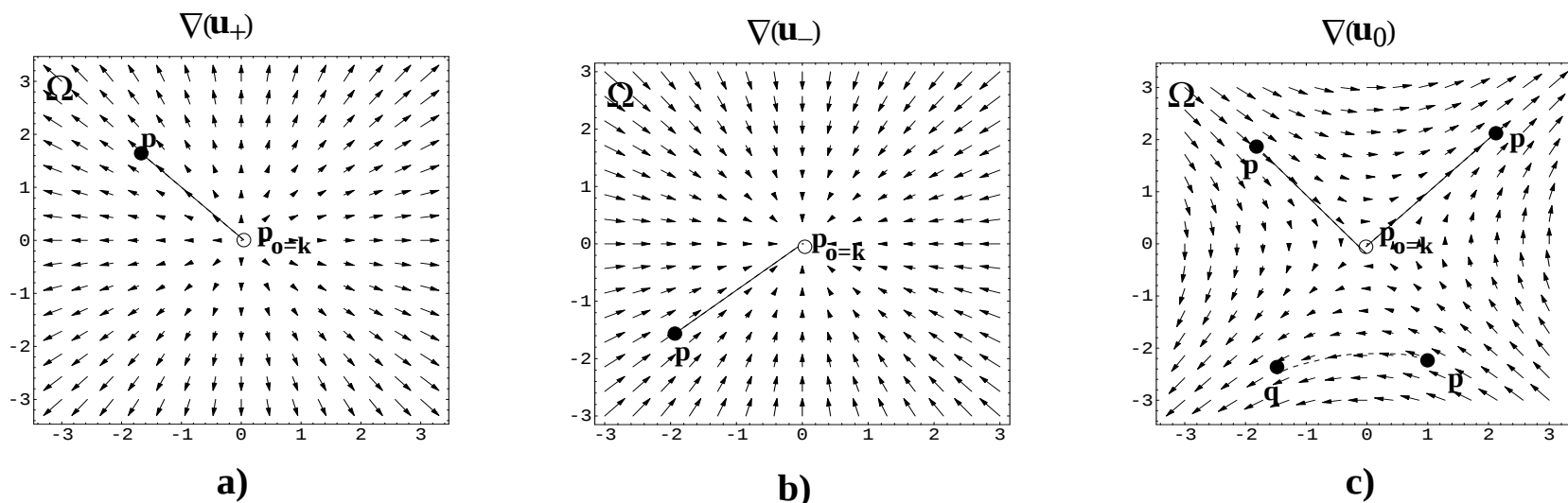
Max. $E(0, 0) = 1$ $((x_0, y_0)$ **pkt osob.** $\Rightarrow E(x_0, y_0) = 1)$.



Rys. 9. W $\Omega \exists !1$ pkt osob. $(0, 0)$ (też pkt kryt. $u_{\pm}, u_{\alpha}$).

Pkt osob. E (max.) $\Rightarrow$ min. $\mathcal{E} = E^{-2} - 1$: $\mathcal{E}(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \nabla u(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Pkt osob. E i $\mathcal{E} \Leftrightarrow$ **pkt kryt.** u .



Rys. 62. Char. baz. **a-b)** wkl./wyp. rozw. **c)** siód.

Eikonat: char. baz. styczne* do ∇u .

Różnice w a-c):

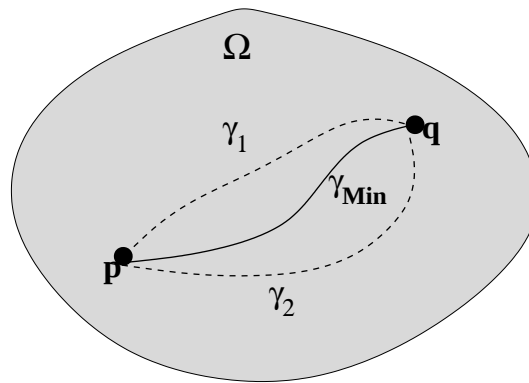
- **a-b)** (**c)**) pkt osob. $\mathcal{E}$ (kryt. u) $p_{o=k}$ łączy (nie łączy) dow. pkt $p \in \Omega$ baz. char.
- **a-b)** (**c)**) ∇u albo wpływ. albo wypływ. (wpływ. i wypływ.) z Ω .

*Met. char. $\Rightarrow (x_t, y_t) = 2(p, q) = 2\nabla u$.

Chojnacki Tw. 6. $p, q \in \Omega$ łączy char. baz. $u \in C^2$ speł. eikonał $\Rightarrow$

$$|u(q) - u(p)| = \min_{\gamma} \int_{\gamma} \sqrt{\mathcal{E}} dl, \quad (34)$$

z min.* po wszystkich $\gamma \in C^1$ łączących p z q .



Rys. 63. Min. (34) osiągnane na char. baz. $= \gamma_{Min}$.

Uwaga: char. baz. są **nieznane** (zależą od u !).

$$*\int_{\gamma} \sqrt{\mathcal{E}} dl = \int_a^b \sqrt{\mathcal{E}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \text{ dla } C^1 \ni \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ i } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q.$$

Tw. Bruss. $\mathcal{E}(x, y)$ z !1 niezdegen. dod.* pkt osob. $(x_0, y_0) \Rightarrow$ w klasie $u \in C^2$ wyp./wkl. $\exists$!2 rozw. eikonatu.

Tw. 6 $\Rightarrow$ rozw. wkl.

$$u_+(x, y) = u(x_0, y_0) + \min_{\gamma} \int_{\gamma} \sqrt{\mathcal{E}} dl , \quad (35)$$

i rozw. wyp.

$$u_-(x, y) = u(x_0, y_0) - \min_{\gamma} \int_{\gamma} \sqrt{\mathcal{E}} dl . \quad (36)$$

Przyk. 16.: $\mathcal{E}(x, y) = x^2 + y^2$ z osob. $(0, 0)$. Dla $u_{\pm}$ char. baz.[†] łącz. $(0, 0)$ z $(x, y) \in \Omega$ są **radialne**[‡]:

$$u_{\pm}(x, y) = u_{\pm}(0, 0) \pm \int_0^1 \sqrt{t^2 x^2 + t^2 y^2} \sqrt{x^2 + y^2} dt = \pm 0.5(x^2 + y^2) . \quad \square$$

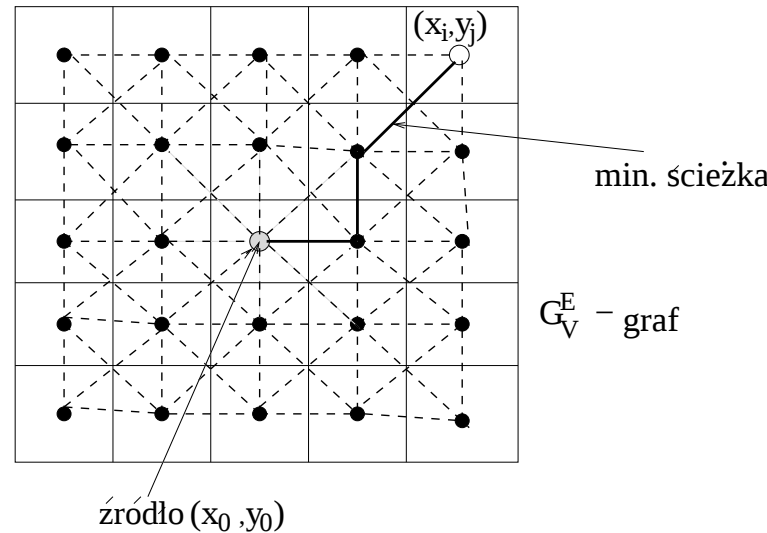
* $D^2 \mathcal{E}(x_0, y_0)(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ dla $\vec{v} \neq \vec{0}$.

[†]Min. osiągnane na char. baz.

[‡] $\gamma(t) = (tx, ty)$ z $t \in [0, 1]$.

Char. baz. nieznane! $\Rightarrow$ minimalizacja?

“Piksele” $\Rightarrow$ alg. min. ścieżek w grafie G_V^E z ustal. źródł. (x_0, y_0) :



Rys. 64. Min. ścieżka między źródł. $(x_0, y_0)^*$ i wierzch. (x_i, y_j) grafu G_V^E .

Wagi[†] krawędzi grafu G_V^E :

$$\omega((i, j), (k, l)) = \begin{cases} \frac{h}{2}(\sqrt{\mathcal{E}_{i,j}} + \sqrt{\mathcal{E}_{k,l}}) & \text{kraw. poz.-pion.,} \\ \frac{h}{\sqrt{2}}(\sqrt{\mathcal{E}_{i,j}} + \sqrt{\mathcal{E}_{k,l}}) & \text{kraw. diag.} \end{cases} \quad (37)$$

*Źródło (x_0, y_0) (pkt osob. $\mathcal{E}$) grafu G_V^E ustalone. Wierzch. (x_i, y_j) zmienne.

[†] $\int_a^b f(t)dt \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$.

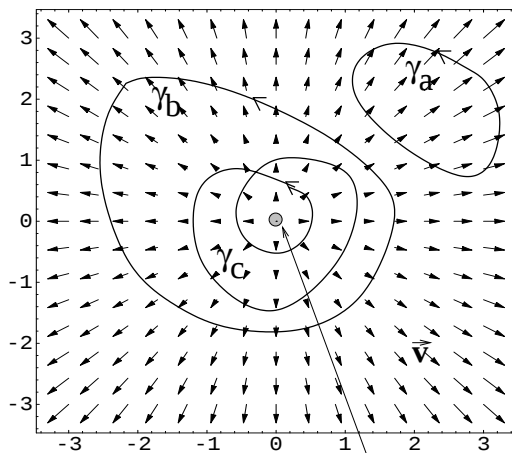
Obrazy z n -pktmi osob. ($n \geq 1$)?

Wyp./wkl. rozszerz. na **fun. Morse'a** + “convex-skirt”.



Ekstra więzy na $\vec{v} = \nabla u$.

$\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ i zorient. pętla $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ($\gamma \not\ni (x_0, y_0)$ pkt kryt. pola* $\vec{v}$) $\Rightarrow$ **indeks γ dla $\vec{v}$ (ozn. $ind_\gamma(\vec{v})$):** **licz. zorient. obrot. $\vec{v}$ na pętli γ .**

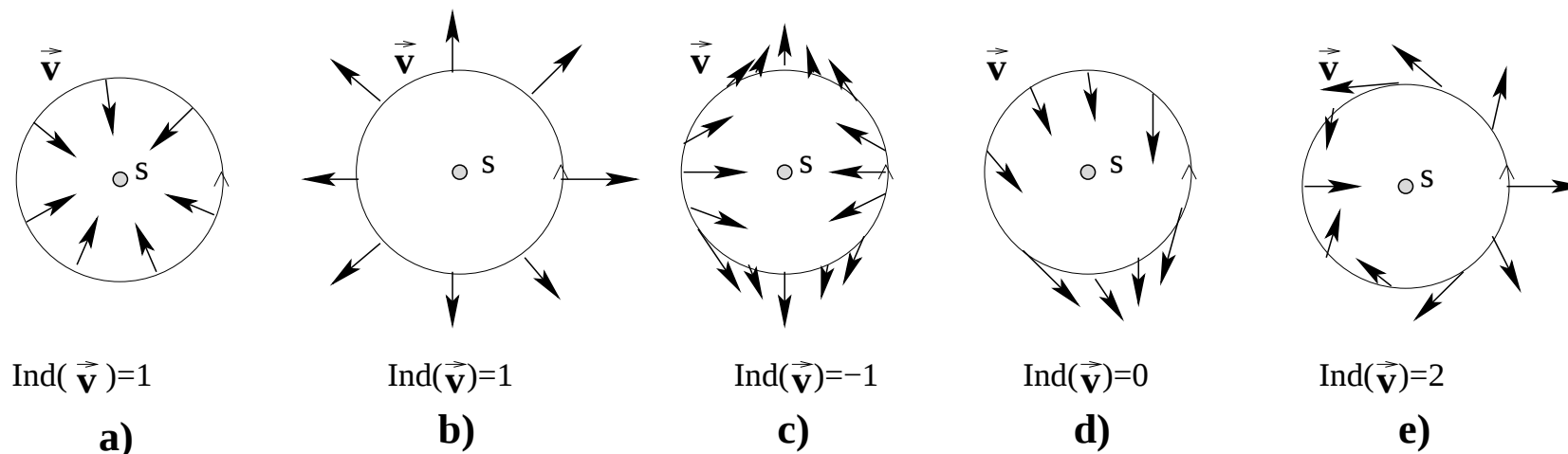


Punkt krytyczny pola $\vec{v}$

Rys. 65. Obroty $\vec{v}$ na γ **a)** $ind_{\gamma_a}(\vec{v}) = 0$ **b)** $ind_{\gamma_b}(\vec{v}) = 1$ **c)** $ind_{\gamma_c}(\vec{v}) = 2$.

* (x_0, y_0) pkt kryt. pola $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}(x_0, y_0) = \vec{0}$.

Indeks pkt. kryt. s pola $\vec{v}$: $\boxed{ind_{C_s^r}(\vec{v})}$ - C_s^r okr.: $r \approx 0$ i środ. w s .



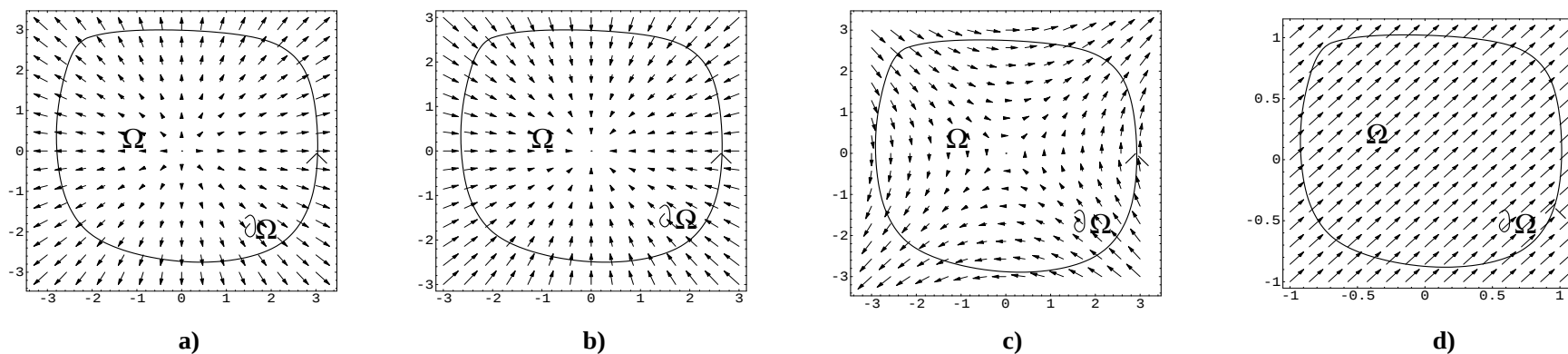
Rys. 66. $\vec{v} = \nabla u$ dla u **a)** wyp. **b)** wkl. **c)** siod.

F. Morse'a: $\mathcal{M} = \{u \in C^2 : \forall s \text{ z } \nabla u(s) = \vec{0} \Rightarrow ind_{C_s^r}(\nabla u) = \pm 1\}.$

siodła $\in \mathcal{M}$ - $ind_{C_s^r}(\vec{v}) = -1$ (dla $n = 1$)*.

u **“convex skirt”** na $\partial\Omega$: indeks brzegu Ω ($\partial\Omega$ pętla) dla $\vec{v} = \nabla u$
 $\boxed{ind_{\partial\Omega}(\nabla u) = 1}$ ($\vec{v}$ **przeptł.** przez $\partial\Omega$ w **1ym** kier.).

*Siodła istotne dla $n > 1 \Rightarrow$ w $\mathcal{M}$ $ind_{C_s^r}(\nabla u) = 1$ za silny więz na u .

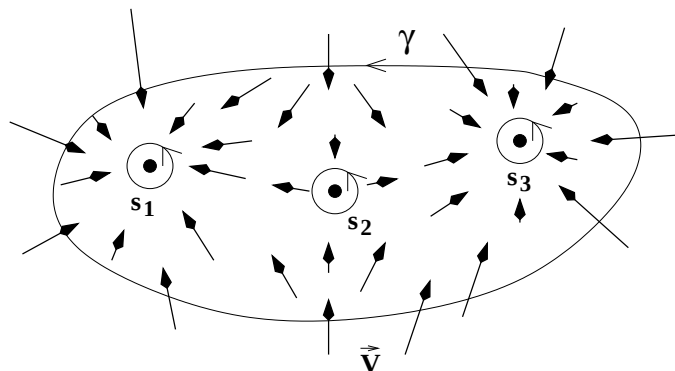


Rys. 67. “Convex-skirt” tak: **a-b)** $ind_{\partial\Omega}(\vec{v}) = 1$ nie: **c)** $ind_{\partial\Omega}(\vec{v}) = -1$ **d)** $ind_{\partial\Omega}(\vec{v}) = 0$.

$\mathcal{M}^{cs}$ klasa “convex-skirt” $u \in \mathcal{M}$.

Tw. Eulera. Pkty kryt. $\{s_i\}_{i=1}^m$ pola $\vec{v}$ “wewnątrz” γ (pętla):

$$ind_{\gamma}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^m ind_{C_{s_i}^r}(\vec{v}) .$$



Rys. 68. Indeks γ dla $\vec{v}$ = sumie ind. wew. pkt. kryt. $\vec{v}$.

$u \in \mathcal{M}^{cs}$ (z s pkt kryt. $\vec{v} = \nabla u$) i $\gamma = \partial\Omega$ (pętla):

$$\begin{aligned} ind_{C_s^r}(\vec{v}) &= 1, & (\text{min./max.}) \\ ind_{C_s^r}(\vec{v}) &= -1, & (\text{siod.}) \\ ind_{\gamma}(\vec{v}) &= 1. \end{aligned} \quad (38)$$

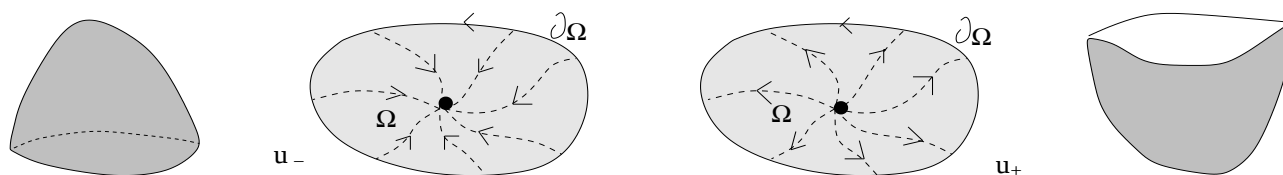
Tw. Eulera + (38) dla $u \in \mathcal{M}^{cs} \Rightarrow$

$$\boxed{N_{max} + N_{min} - N_s = 1}, \quad (39)$$

(N_{max}, N_{min}, N_s) licz. (max., min., siod.) u .

II. pkt. kryt. ∇u : $N_o = N_{max} + N_{min} + N_s$ (i (39)) $\Rightarrow \boxed{N_o = 2N_s + 1}$ (**nieparz.!**).

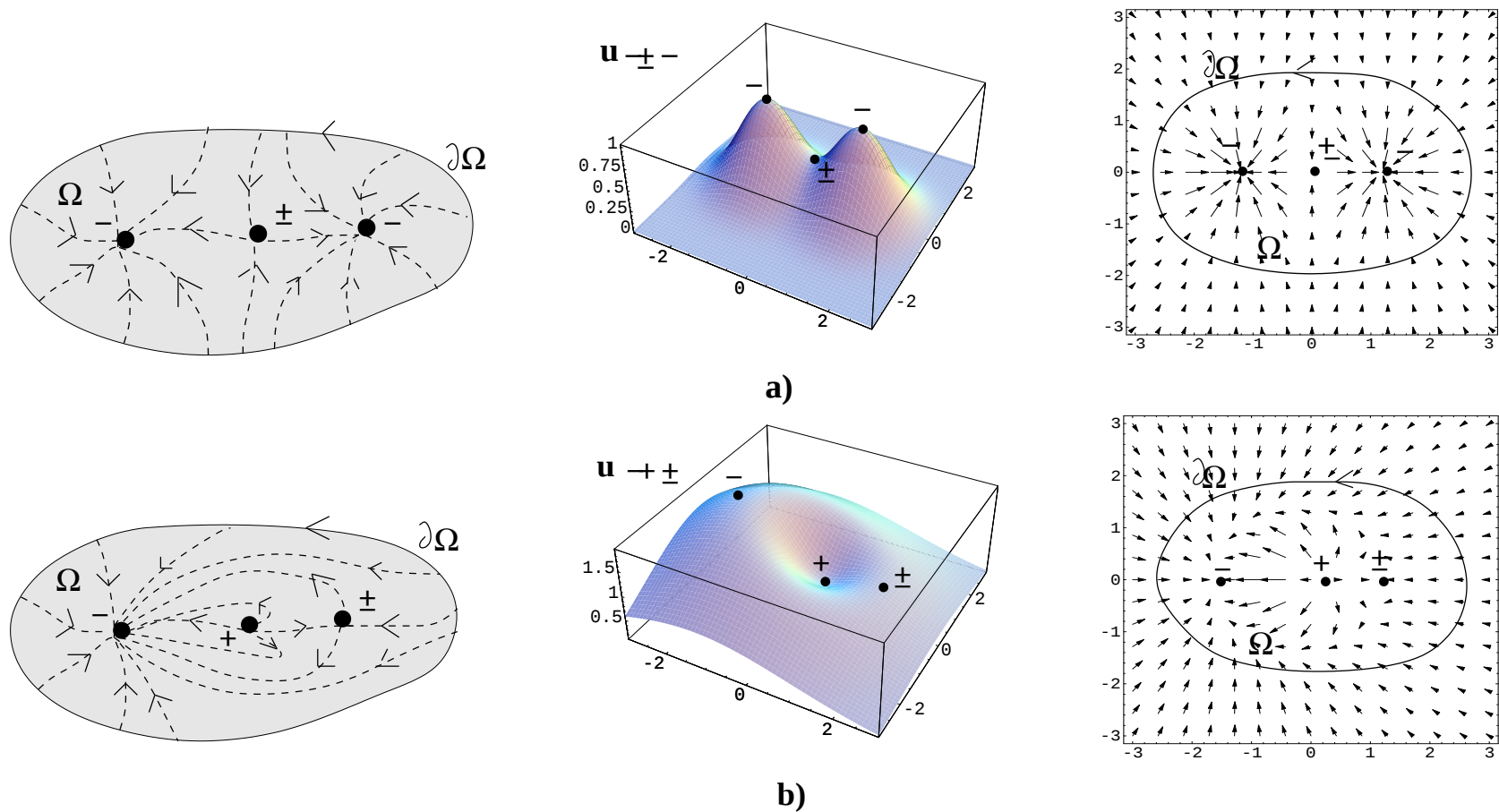
Przyp. n=1: z (39) $\exists$ 2 możliwe $u \in \mathcal{M}^{cs*}$:



Rys. 69. Char. baz. u wyp. (u_-) i wkl. (u_+).

***Eikonat:** $u_+ = -u_- + C$ ($\Rightarrow$ char. baz. (stycz. do ∇u) ident.). Eliminacja siodła!
Wzory na u_+, u_- (35), (36) (opt.). **Tw. Bruss** $\Rightarrow \exists$!2 rozw. wyp./wkl.

Przyp. $n=3$: z (39) $\exists$ 4 możliwe $u \in \mathcal{M}^{cs*}$:



Rys. 70. 4 możliwe pow. a) u_{+-} (+ sym.) b) u_{-++} (+ sym.)

***Eikonat:** $u_{+++} = -u_{+-} + C$ i $u_{+-} = -u_{-++} + C$ ($\Rightarrow$ char. baz. parami ident. zwrot przeciwny; stycz. do ∇u).

Tw. 7. 3 pkty osob. $\mathcal{E}$ z $u \in \mathcal{M}^{cs}$ ($\partial\Omega$ pętla) $\Rightarrow$! **1 para** rozw. dla eikonatu: albo $(u_{+\pm+}, u_{-\pm-})$ albo $(u_{+-\pm}, u_{-+\pm})$.

Jak wykluczyć 1 parę i znaleźć drugą?

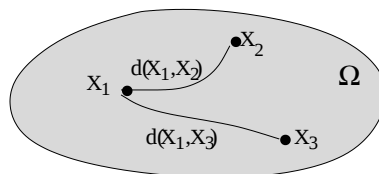
Pkt siodł. $s_{\pm}$ - nieistotny.*

Metryka:

$$d(X, Y) = \min_{\gamma} \int_{\gamma} \sqrt{\mathcal{E}} dl, \quad (40)$$

dla $\gamma \subset \Omega$ łącz. X z Y w Ω . Dla X_i, X_j i X_k z Ω :

$$D(X_i) = d(X_i, X_j) + d(X_i, X_k). \quad (41)$$



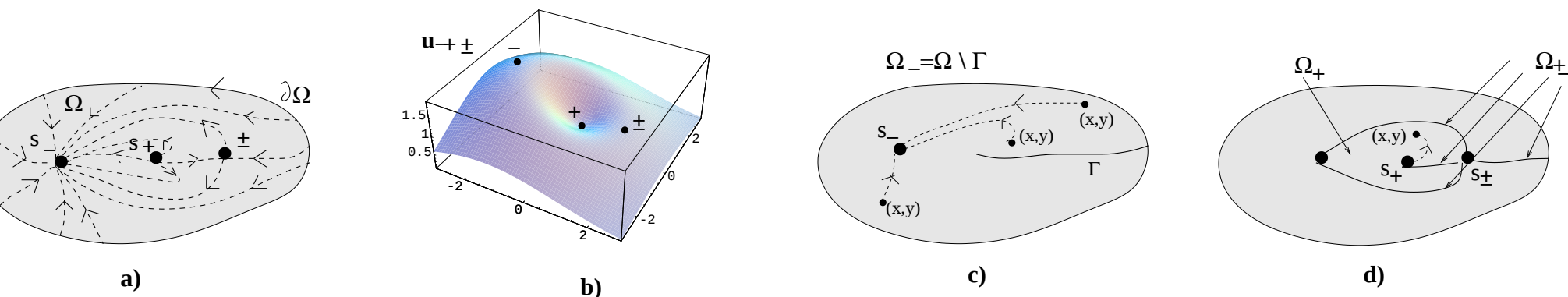
Rys. 71. $D(X_1)$ suma odleg. $d(X_1, X_2)$ i $d(X_1, X_3)$ w metryce (40).

*Baz. char. łączą $s_{\pm}$ z $(x, y) \in \Omega$ na “cienkim” podzb. Ω .

Krok 1: elimin. $s_{\pm}$:

Pkt osob. $S_i \in \Omega$ z $\boxed{\min. D(S_i)}$ $\Rightarrow$ **siod.** u .

Albo krok 2: $u_{-+\pm}$ (i $u_{+-\pm}$)?



Rys. 72. $u_{-+\pm}$ **a)** char. baz. **b)** kształt. **S c-d)** char. baz. z S_- , S_+ , $S_{\pm}$.

i) rozw. ze źródl. $S_i \in \Omega$:

$$\boxed{U_{S_i}(X) = d(S_i, X) ,} \quad \forall X \in \Omega . \quad (42)$$

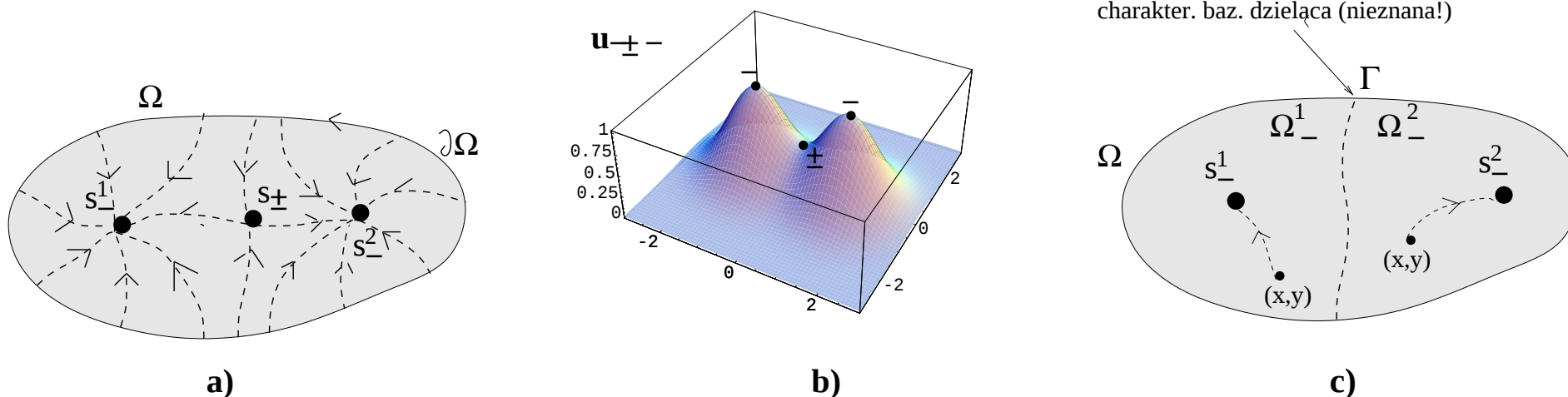
ii) char. baz. S_+ na $\Omega_+ \neq \Omega$ (numer. U_{S_+} odrzucić!).

iii) numer. rozw.* $\boxed{-U_{S_-} = u_{-+\pm} + C}$ tak gdy $-U_{S_-}$ typu $u_{-+\pm}$ (Stop**).**

iv) $U_{S_-} \dashv$ typu $u_{-+\pm}$ (odrzuć U_{S_-} !**) $\Rightarrow$ **Krok 3.****

* U_{S_-} zdef. w Ω_- (char. baz. łączą $(x,y) \in \Omega_-$ z S_-). Γ "cienki" zb. (przedł. C^0).

Albo krok 3: u_{-+-} (i u_{+--+})?



Rys. 73. u_{+--} a) char. baz. b) kształt. S c) char. baz. z S_-^1 i S_-^2 .

i) 2 numer. rozw. $-U_{S_-^1}$ i $-U_{S_-^2}$ na Ω .

ii) $-U_{S_-^1} = u$ na Ω_-^1 i $-U_{S_-^2} = u$ na Ω_-^{2*}

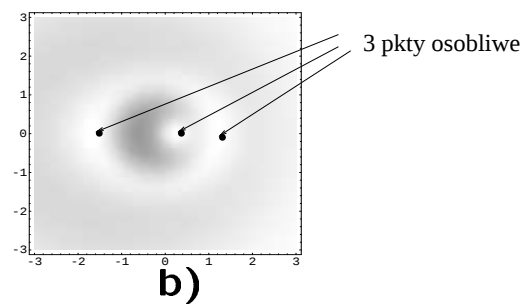
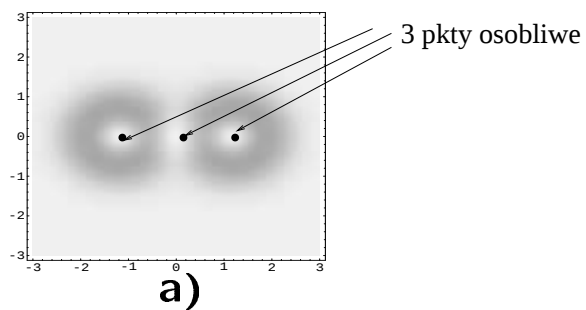
iii) $\Omega_-^{1,2}$? (bo Γ ?) **Sklejanie** $-U_{S_-^1}$ z $-U_{S_-^2}$ na Γ ?

iv) **Sklejanie** $-U_{S_-^1}$ z $-U_{S_-^2}$? $u_{1,2}$ z (43) spełnia $u_x^2 + u_u^2 = \mathcal{E}(x, y)$ na Ω :

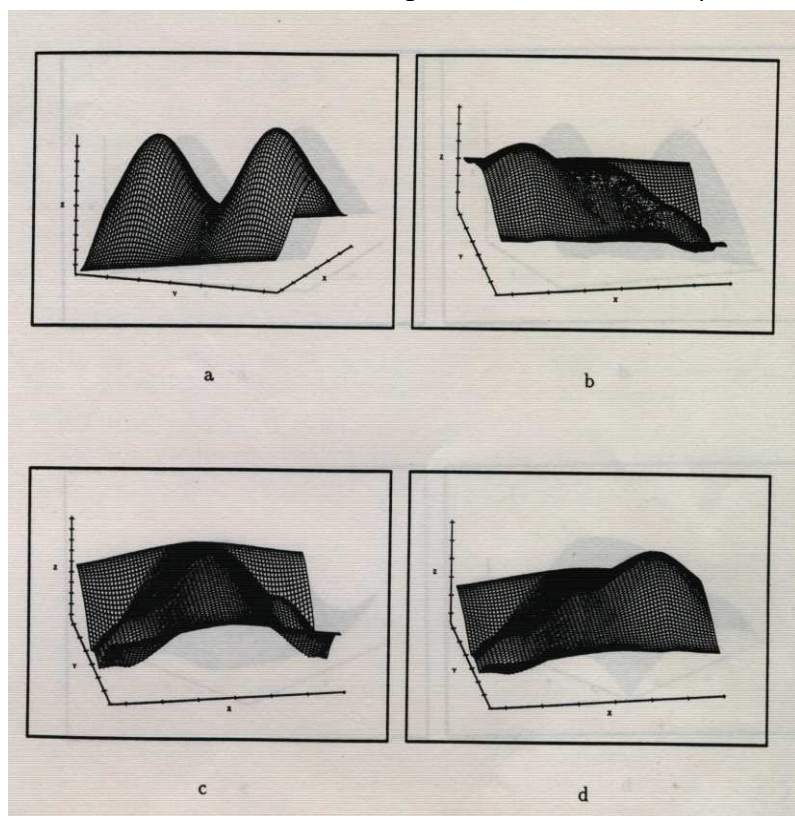
$$u_{1,2}(x) = \max\{U_{S_-^1}(S_{\pm}) - U_{S_-^1}(x), U_{S_-^2}(S_{\pm}) - U_{S_-^2}(x)\} + u_{1,2}(S_{\pm}), \quad (43)$$

i jest typu u_{-+-} (**Stop**).

* $\exists$ baz. char. między $(x, y) \in \Omega_-^{1,2}$ a $S_-^{1,2}$.

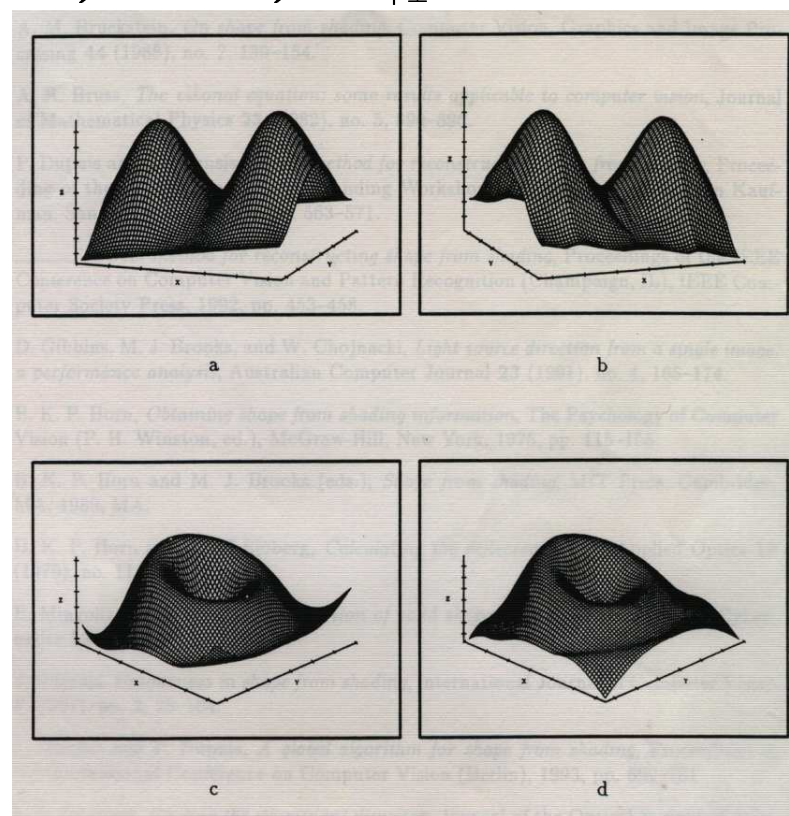


Rys. 74. Obraz powierzchni **a)** $\pm u_{--}$ **b)** $\pm u_{-++}$.



i)

Rys. 75. i) **a** u_{--} **b** $-U_{S_1}^*$ **c** $-U_{S_+}$ **d** $-U_{S_-}$; ii) albo **a** u_{--} **b** $u_{1,2}$ albo **c** u_{-++} **d** $-U_{S_-}$.



ii)

*Eksperymenty pokazują także poprawność rekonstr. dla $n = 1$.

12. Szkic Dowodu Tw. 6

$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i 1-formy $du = u_x dx + u_y dy$:

$$(du)^2 + (u_y dx - u_x dy)^2 = (u_x dx + u_y dy)^2 + (u_y dx - u_x dy)^2 \quad (44)$$

$$= (u_x^2 + u_y^2)(dx^2 + dy^2) . \quad (45)$$

Stąd

$$du^2 \leq (u_x^2 + u_y^2)(dx^2 + dy^2) ,$$

$$|du| \leq \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \sqrt{dx^2 + dy^2} . \quad (46)$$

(46) i $\mathcal{E}(x, y) = u_x^2 + u_y^2$ i $dl^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow$

$$\boxed{|du| \leq \sqrt{\mathcal{E}} dl .} \quad (47)$$

Dla $\forall \gamma \in C^1$ łączącej pkty $X, Y \in \Omega^*$ z (47) $\Rightarrow$

$$|u(Y) - u(X)| = \left| \int_{\gamma} du \right| \leq \int_{\gamma} |du| \leq \int_{\gamma} \sqrt{\mathcal{E}} dl .$$

$$\boxed{|u(Y) - u(X)| \leq \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \sqrt{\mathcal{E}} dl ,} \quad (48)$$

z infimum $\forall \gamma \in C^1$ łączących pkty $X, Y \in \Omega$.

* $\forall X, Y \in \Omega \quad u(Y) = u(X) + \int_{\gamma} du$.

Char. baz. γ_0^* w (48):

$$\boxed{|u(Y) - u(X)| \leq \int_{\gamma_0} \sqrt{\mathcal{E}} dl ,}$$

$$Z \dot{\gamma}_0(t, s^0) = (x_t(t, s^0), y_t(t, s^0)) = 2(u_x(t, s^0), u_y(t, s^0)).$$

1-formy

$$dx((1, 0)) = 1 , \quad dx((0, 1)) = 0 , \quad dy((1, 0)) = 0 , \quad dy((0, 1)) = 1 ,$$

$$\Rightarrow \text{1-forma } \boxed{\omega = u_y dx - u_x dy} \text{ na } \gamma_0^\dagger$$

$$\omega(2u_x, 2u_y) = 2u_y dx((u_x, u_y)) - 2u_x dy((u_x, u_y)) = 2(u_y u_x - u_x u_y) = 0 .$$

$$\Rightarrow (\text{z (44)}) \text{ na } \gamma_0 \quad |du| = \sqrt{\mathcal{E}} dl.$$

Eikonał (m. char.): $u_t = 2\mathcal{E} \geq 0$ ($\forall$ char. baz. γ_b) $\Rightarrow u$ **monot.** na γ_b .

$$\Rightarrow \text{dla } \gamma_0 \quad \boxed{du|_{\gamma_0} = \sqrt{\mathcal{E}} dl} \text{ albo } \boxed{du|_{\gamma_0} = -\sqrt{\mathcal{E}} dl.}$$

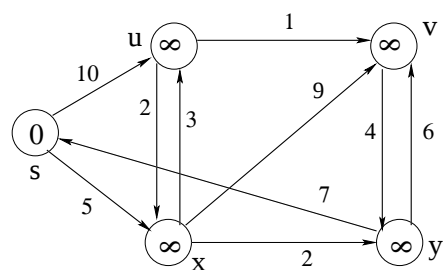
$$\boxed{\boxed{|u(Y) - u(X)| = \int_{\gamma_0} \sqrt{\mathcal{E}} dl .}}$$

□

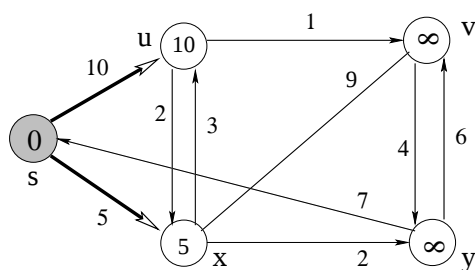
*Zał. **Tw. 6:** $\exists$ char. baz. łącząca pkty $X, Y \in \Omega$.

† Na przestrz. stycznej do γ_0 . Pomijamy w notacji (t, s^0) .

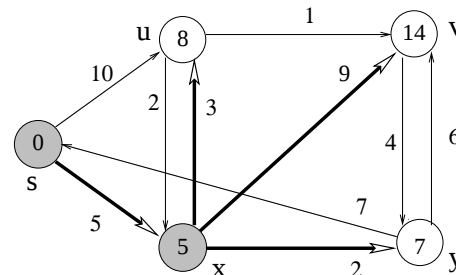
13. Algorytm Dijkstry



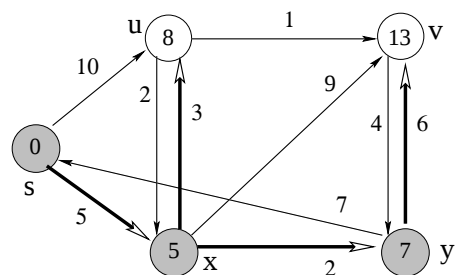
a)



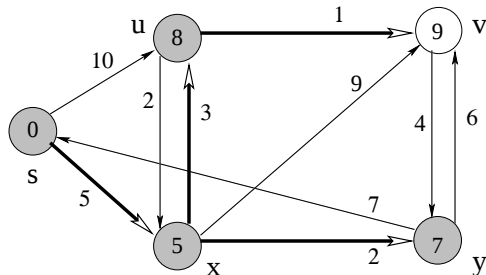
b)



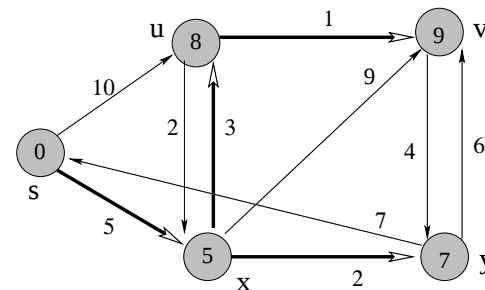
c)



d)



e)



f)

Rys. 76. Ilustracja działania alg. Dijkstry (najkrótsze ścieżki w grafie).

a) inic. atryb. $d[\cdot] = \infty$; $d[s] = 0$; $S = \emptyset$ i kol. prioryt. $Q = G = \{s, x, y, v, u\}$.

b) relak. kraw. z s do wierz. z I. sąsiedz. $Adj[s] = \{x, u\}$, $S = \{s\}$ i $Q = \{x, u, y, v\}$.

c) relak. kraw. z x do wierz. z $Adj[x] = \{y, u, v\}$, $S = \{s, x\}$ i $Q = \{y, u, v\}$.

d) relak. kraw. z y do wierz. z $Adj[y] = \{s, v\}$, $S = \{s, x, y\}$ i $Q = \{u, v\}$.

e) relak. kraw. z u do wierz. z $Adj[u] = \{x, v\}$, $S = \{s, x, y, u\}$ i $Q = \{v\}$.

f) relak. kraw. z v do wierz. z $Adj[v] = \{y\}$, $S = \{s, x, y, u, v\}$ i $Q = \emptyset$.

14. Met. Charakterystyk - Tw. Cauchy-ego

$F \in C^2(\mathbb{R}^5)^*$, $C^1 \ni \gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $C^2 \ni \phi : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ i $(P^0 = (x_1^0, y_2^0) \text{ i } D^0 = (p^0, q^0))$:

$$F(P^0, u^0, D^0) = 0, \quad u^0 = \gamma(x^0), \quad P^0 = \gamma(s^0), \quad (\phi \circ \gamma)'(s^0) = p^0 \gamma'_1(s^0) + q^0 \gamma'_2(s^0)$$

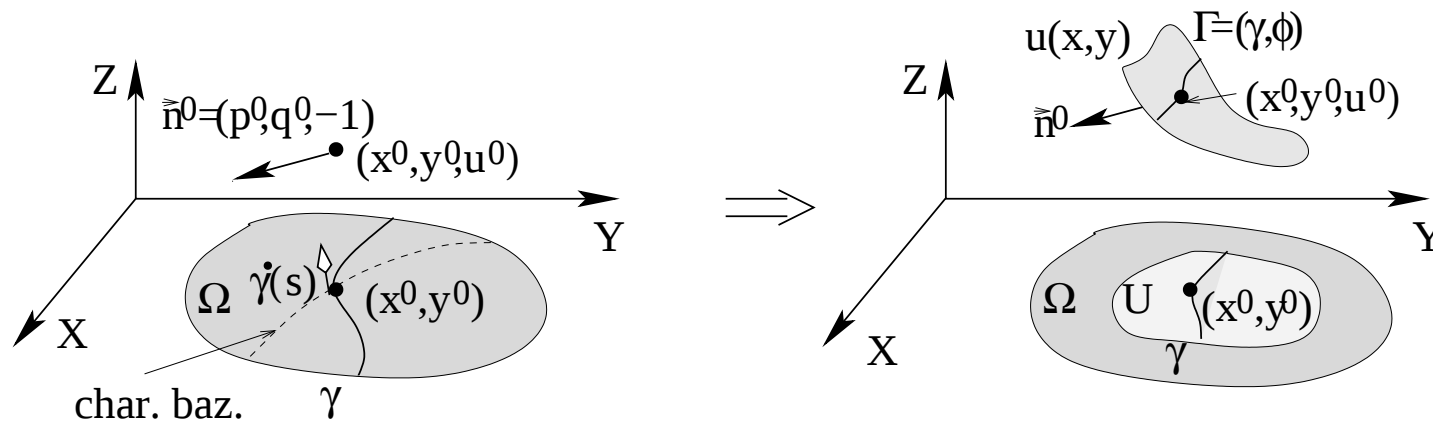
+ war. niecharakter.[†]:

$$\gamma'_2(s^0) \frac{\partial F}{\partial p}(P^0, u^0, D^0) - \gamma'_1(s^0) \frac{\partial F}{\partial q}(P^0, u^0, D^0) \neq 0.$$

$\Rightarrow$ w otocz. $(x^0, y^0) \in U \subset \Omega \exists! u \in C^2$:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad u(x^0, y^0) = u^0, \quad (\nabla u)(x^0, y^0) = (p^0, q^0), \quad u|_{\gamma \cap U} = \phi. \quad (49)$$

□



Rys. 77. Krzywa pocz. γ transwersalna do char. baz $\Rightarrow \exists! u \in C^2$ dla (49).

***Tw. Cauchy-ego** prawdziwe z $F : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

[†]War. niecharakter. $\equiv \gamma'(s^0) \perp \parallel (F_p(P^0, u^0, D^0), F_q(P^0, u^0, D^0))$ (kier. baz. char.).