

IV.
INTERFERENCJA I DYFRAKCJA
CZĄSTEK

1 Wstęp

Przypomnienie

Interferencja fal jest superpozycją (dodawaniem wektorowym) fal emitowanych przez niewielką liczbę źródeł. Zwykle są to dwa źródła fal.

Dyfrakcja fal jest superpozycją (dodawaniem wektorowym) fal emitowanych przez dużą liczbę źródeł.

Przez dużą liczbę rozumiemy liczbę $\gg 10$.

2 Interferencja elektronów

Pod koniec XX wieku Akio Tonomura (laboratorium Hitachi, Japonia) przeprowadził eksperyment polegający na przepuszczaniu pojedynczych elektronów przez przesłonę z dwiema szczelinami. Do niedawna był to tzw. "eksperyment myślowy" (patrz podręcznik "Wykłady z fizyki" Richarda Feynmana).

W przeprowadzonym eksperymencie elektrony były emitowane przez źródło w sposób sekwencyjny (jeden po drugim), a zatem nie oddziaływały z sobą, czyli były od siebie niezależne.

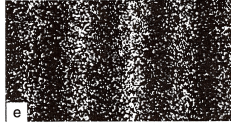
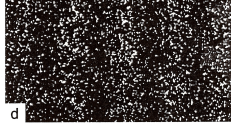
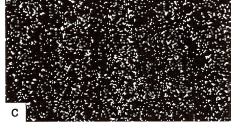
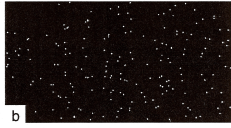
Po przejściu przez szczeliny elektrony padały na ekran, na którym podlegały detekcji.

Eksperyment ten jest analogiem eksperymentu Younga z falami świetlnymi, znanym z klasycznej optyki falowej.

Wyniki eksperymentu

Fotografie zarejestrowane przez detektor, umieszczony za przesłoną z dwiema szczelinami, odpowiadające przelotowi przez szczeliny N niezależnych elektronów.

W eksperymencie obserwowano przelot $N = 10, 100, 3000, 20000, 70000$ elektronów.

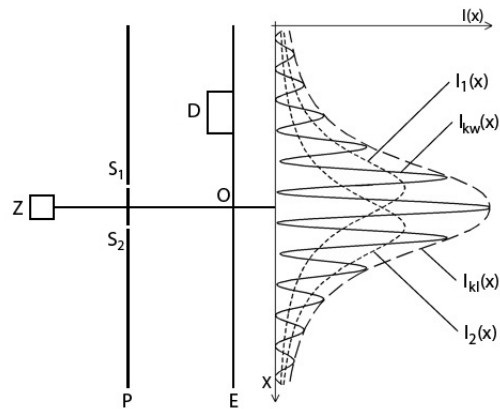


(a) $N = 10$
(b) $N = 100$

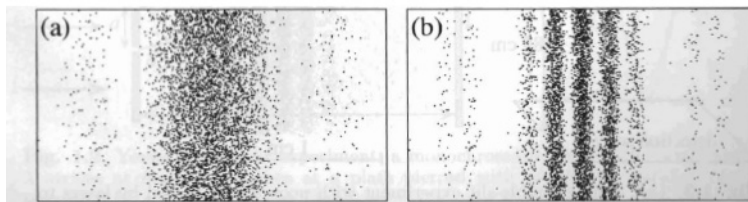
(c) $N = 3000$

(d) $N = 20000$

(e) $N = 70000$



Rysunek 1: Schematyczne przedstawienie wyników interferencji wiązki elektronicznej na dwóch szczelinach.



Rysunek 2: Obraz obserwowany na odległym ekranie po przejściu wiązki elektronicznej przez (a) pojedynczą szczelinę, (b) podwójną szczelinę. Wyniki symulacji komputerowych.

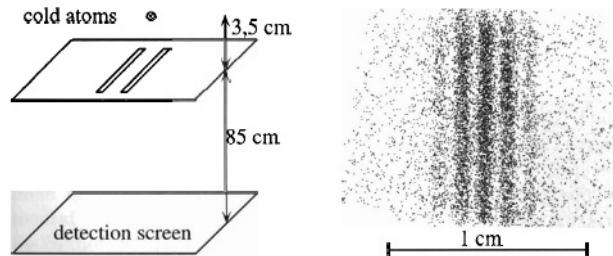
Wstępna interpretacja eksperymentu z interferencją elektronów na dwóch szczelinach

$I_1(x)$ = natężenie mierzone przy otwartej szczelinie S_1 (S_2 zamknięta)

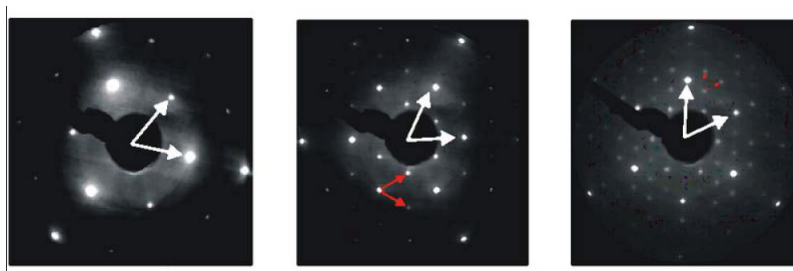
$I_2(x)$ = natężenie mierzone przy otwartej szczelinie S_2 (S_1 zamknięta)

$I_{kl}(x)$ = natężenie przy otwartych obu szczelinach (wynik przewidywany w przypadku, gdyby elektrony były cząstkami klasycznymi)

$I_{kw}(x)$ = wynik rzeczywistego eksperymentu (pojawiają się **prążki interferencyjne**)



Rysunek 3: Lewy rysunek: Schemat eksperymentu Younga polegającego na przepuszczeniu wiązki atomów neonu przez dwie szczeliny. Wcześniej atomy zostały poddane chłodzeniu laserowemu do temperatury $\sim 1\text{mK}$. Prawy rysunek: Obraz interferencyjny obserwowany na ekranie. Każdy punkt pochodzi z detekcji uderzenia pojedynczego atomu w ekran. Wyniki eksperymentu rzeczywistego.



Rysunek 4: Dyfrakcja elektronów o energii 170 eV na powierzchni węgla krzemu (SiC).

3 Dyfrakcja elektronów na kryształach

Wniosek

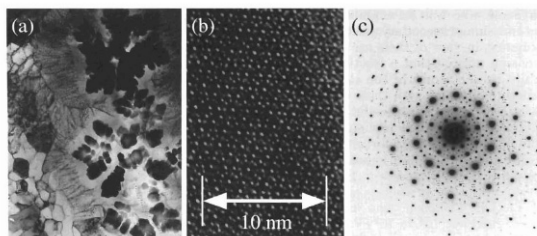
Obserwacja interferencji i dyfrakcji cząstek wykazuje, że cząstki kwantowe (elektrony, atomy, ...) posiadają własności falowe.

Natomiast inne eksperymenty wykazują **własności korpuskularne** elektronów (np. pomiar ładunku i masy spoczynkowej).

Sprzeczność ???

NIE !!!

Odpowiedź:



Rysunek 5: Obserwacja quasi-kryształów. (a) Struktura stopu AlMnSi w dużej skali obserwowana pod mikroskopem elektronowym. (b) Powiększony obraz ciemnych obszarów na rysunku (a). Widoczna jest symetria pięciokątna (pięciokąty foremne). (c) Obraz dyfrakcyjny otrzymany przy użyciu elektronów o energii 200 keV.

⇒ **dualizm falowo-korpuskularny**

Wszystkie cząstki kwantowe (fotony, elektrony, atomy) wykazują własności bądź falowe bądź korpuskularne w zależności od rodzaju wykonywanego eksperymentu.

W eksperymentach interferencyjnych i dyfrakcyjnych obserwujemy **własności falowe**.

Natomiast w innych eksperymentach, np. efekt fotoelektryczny, pomiar ładunku lub masy spoczynkowej, obserwujemy **własności korpuskularne**.

• **Istotna rola przyrządu pomiarowego (i obserwatora) w procesie pomiaru.**

4 Relacje de Broglie'a

Falowo-korpuskularne własności cząstek i promieniowania opisujemy za pomocą **relacji de Broglie'a**, które obowiązują zarówno dla cząstek o niezerowej masie spoczynkowej (elektrony, atomy) jak i dla promieniowania (fotonów).

Każdej cząstce kwantowej przypisujemy pęd \mathbf{p} oraz energię E za pomocą relacji

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (1)$$

oraz

$$E = \hbar \omega, \quad (2)$$

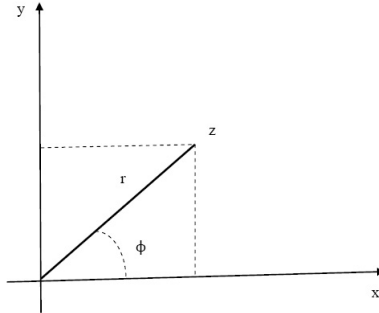
gdzie $\hbar = h/2\pi = 1.056 \times 10^{-34}$ Js,

h = **stała Plancka** jest uniwersalną stałą przyrody,

\mathbf{k} = wektor falowy o długości $k = |\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$,

λ = długość fali de Broglie'a,

ω = częstość fali.



Rysunek 6: Płaszczyzna liczb zespolonych z .

Dygresja

Matematyka: Liczby zespolone

Zapis kartezjański

$$z = x + iy, \quad (3)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$, czyli $i^2 = -1$.

Inaczej

$$z = \mathcal{R}(z) + i\mathcal{I}(z) \quad (4)$$

Sprzężenie zespolone liczby z

$$z^* = x - iy \quad (5)$$

Moduł liczby zespolonej

$$\begin{aligned} r &\equiv |z| = \sqrt{zz^*} \\ \implies |z|^2 &= r^2 = zz^* \end{aligned} \quad (6)$$

Postać wykładnicza liczby zespolonej

$$z = re^{i\varphi} \quad (7)$$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (8)$$

Kwadrat modułu $e^{i\varphi}$

$$|e^{i\varphi}|^2 = e^{i\varphi}e^{-i\varphi} = 1 \quad (9)$$

Fizyka: Fale

Fala biegnąca wzdłuż osi x

$$\psi(x, t) = Af(x \pm v_x t) \quad (10)$$

Znak $+$ odpowiada fali biegnącej w lewo, a znak $-$ odpowiada fali biegnącej w prawo.

Prędkość rozchodzenia się fali (w kierunku x)

$$v_x = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{2\pi}\omega \quad (11)$$

x -owa składowa wektora falowego

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (12)$$

\Rightarrow

$$x \pm v_x t = \frac{\lambda}{2\pi}(k_x x \pm \omega t) \quad (13)$$

Równoważna postać fali rozchodzącej się w kierunku x

$$\psi(x, t) = Af\left[\frac{\lambda}{2\pi}(k_x x \pm \omega t)\right] \quad (14)$$

Fala cosinusoidalna

$$\psi(x, t) = A \cos(k_x x \pm \omega t) \quad (15)$$

Zapis zespolony

$$\psi(x, t) = \mathcal{R}\left(Ae^{i(k_x x \pm \omega t)}\right) \quad (16)$$

Uwaga

W fizyce klasycznej rozważamy wyłącznie fale opisane funkcjami **rzeczywistymi**.

W fizyce kwantowej zajmujemy się falami opisanymi funkcjami **zespolonymi** o postaci

$$\psi(x, t) = Ae^{i(k_x x \pm \omega t)}, \quad (17)$$

przy czym amplituda A jest na ogół liczbą zespoloną.

Fala w przestrzeni 3D

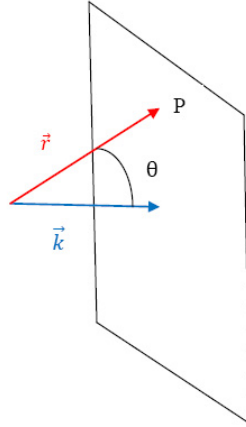
$$\Psi(x, y, z, t) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (18)$$

W zapisie wektorowym

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (19)$$

gdzie $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$ jest **wektorem falowym**, a $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ są wersorami odpowiednio w kierunkach x, y, z .

Uwaga



Rysunek 7: Wektorowe równanie płaszczyzny.

We wzorach (18) i (19) użyty został znak $-$, ponieważ fala rozchodzi się w kierunku wektora \mathbf{k} , czyli kierunki "lewy" i "prawy" tracą sens.

Faza fali

$$\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (20)$$

Czoło fali jest zbiorem punktów w przestrzeni, w których faza fali jest jednakowa (dla każdej chwili czasu t), czyli

$$\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{const}$$

Rodzaje fal w 3D

- **fala kulista**: czoło fali jest powierzchnią kuli
- **fala płaska**: czoło fali jest płaszczyzną
- ...

Równanie płaszczyzny (prostopadłej do wektora \mathbf{k})

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const} \quad (21)$$

\implies Fala o postaci

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

jest **falą płaską**.

Koniec dygresji.

Wracamy do głównego toku wykładu.

5 Równania mechaniki kwantowej dla cząstki o niezerowej masie spoczynkowej

Z eksperymentów interferencyjnych i dyfrakcyjnych wynika, że cząstka o masie spoczynkowej m_0 wykazuje własności falowe. Cząstka kwantowa nie porusza się po określonej trajektorii, lecz jej ruch jest ruchem falowym.

Ruch falowy cząstki w przestrzeni można opisać za pomocą monochromatycznej fali płaskiej o postaci

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (22)$$

gdzie A jest amplitudą fali, a \mathbf{r} jest wektorem położenia cząstki.

Związek (22) jest postulowanym **rozwiązaniem równań kwantowych** opisujących ruch cząstki swobodnej w przestrzeni.

Znajdziemy teraz te równania.

Szukamy **równań**, które są spełnione przez falę $\Psi(\mathbf{r}, t)$, a ponadto są zgodne z relacjami de Broglie'a.

Uwaga: Postępowanie to jest odwrotne do zwykle realizowanego szukania **nieznanych rozwiązań znanych równań**.

Rozważmy najpierw relację de Broglie'a dla wektora pędu cząstki

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (23)$$

W zapisie skalarnym

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (\hbar k_x, \hbar k_y, \hbar k_z). \quad (24)$$

Definiujemy **operator pędu**

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla, \quad (25)$$

gdzie ∇ jest **wektorowym operatorem nabra**

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (26)$$

a $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ są wersorami osi x, y, z .

Operatory składowych pędu

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}.$$

Działamy operatorami pędu na funkcję Ψ (22)

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi = \hbar k_x \Psi$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \Psi = \hbar k_y \Psi$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \Psi = \hbar k_z \Psi$$

Wynik działania operatora pędu na funkcję Ψ (22) w zapisie wektorowym

$$-i\hbar \nabla \Psi = \hbar \mathbf{k} \Psi . \quad (27)$$

Zgodność równania (27) z relacjami de Broglie'a dla pędu dostaniemy, gdy dokonamy identyfikacji

$$\hbar \mathbf{k} = \mathbf{p} .$$

Równanie (27) jest **równaniem własnym operatora pędu**.

Po lewej stronie równania (27) działamy operatorem pędu $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$ na **funkcję własną operatora pędu Ψ** i otrzymujemy w wyniku **wartość własną pędu** równą

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

[prawa strona równania (27)].

Rozważmy teraz pochodną funkcji Ψ (27) po czasie. Różniczkujemy Ψ po czasie i mnożymy wynik przez $i\hbar$. W rezultacie otrzymujemy

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hbar \omega \Psi . \quad (28)$$

Równanie (28) jest zgodne z relacją de Broglie'a dla energii, gdy położymy

$$\hbar \omega = E .$$

Ogólna postać równania własnego

$$\hat{A} \Psi = a \Psi , \quad (29)$$

gdzie \hat{A} jest operatorem wielkości fizycznej A , np. pędu, energii,

Ψ jest **funkcją własną operatora \hat{A}** (funkcja ta jest na ogół funkcja zespolona),

a jest **wartością własną operatora \hat{A}** (jest to liczba rzeczywista).

Wartość własna jest wynikiem pomiaru wielkości A .

W mechanice klasycznej energia całkowita cząstki jest określona za pomocą **funkcji Hamiltona**, która wyraża energię jako funkcję wektorów położenia i pędu cząstki

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) . \quad (30)$$

W celu otrzymania kwantowego operatora energii zastępujemy we wzorze (30) pęd operatorem pędu

$$\mathbf{p} \longrightarrow \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla . \quad (31)$$

W wyniku tego zastąpienia otrzymujemy **operator Hamiltona (hamiltonian)**

$$H \longrightarrow \hat{H}(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla), \quad (32)$$

który jest **operatorem energii całkowitej cząstki**.

Jawna postać operatora energii całkowitej cząstki

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}, \quad (33)$$

gdzie \hat{T} jest **operatorem energii kinetycznej cząstki**

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2, \quad (34)$$

przy czym

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z},$$

a \hat{U} jest **operatorem energii potencjalnej cząstki**

$$\hat{U} = U(\mathbf{r}) \quad (35)$$

Operator \hat{U} jest operatorem mnożenia przez funkcję $U(\mathbf{r})$.

W rezultacie powyższych operacji mamy do dyspozycji dwa operatory energii: operator

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t},$$

występujący w równaniu (28), oraz hamiltonian (33)

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}.$$

Pojawia się zatem niejednoznaczność określenia operatora energii.

Niejednoznaczność tę usuwamy żądając, aby oba te operatory były sobie równe. Równość operatorów oznacza, że wyniki ich działania na dowolną funkcję są sobie równe, a zatem

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi. \quad (36)$$

W rezultacie otrzymujemy **zależne od czasu równanie Schrödingera**, które jest **kwantowym równaniem ruchu**.

W celu rozwiązania zależnego od czasu równania Schrödingera (36) potrzebne są:

- (1) warunki brzegowe $\Psi(\mathbf{r}_{brzeg})$,
- (2) warunki początkowe $\Psi(t = t_0)$.

Zależne od czasu równanie Schrödingera (36) pełni w mechanice kwantowej rolę analogiczną jak 2. zasada dynamiki Newtona w mechanice klasycznej.

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (37)$$

Równanie (37) jest **klasycznym równaniem ruchu**.

Zależne od czasu równanie Schrödingera jest **kwantowym równaniem ruchu**.

Jeżeli hamiltonian \hat{H} nie zależy od czasu, to rozwiązaniami zależnego od czasu równania Schrödingera są tzw. **stany stacjonarne**

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar} . \quad (38)$$

Dla stanów stacjonarnych równanie własne operatora Hamiltona ma postać

$$\hat{H}\psi = E\psi , \quad (39)$$

gdzie E jest **wartością własną energii**.

Równanie (39) jest tzw. **niezależnym od czasu równaniem Schrödingera**.

6 Funkcja falowa

Rozwiązaniem zależnego od czasu równania Schrödingera (36) jest **funkcja falowa** $\Psi(\mathbf{r}, t)$, która także zależy od czasu.

Rozwiązaniem niezależnego od czasu równania Schrödingera (39) jest **niezależna od czasu funkcja falowa** $\psi(\mathbf{r})$.

Interpretacja fizyczna funkcji falowej

Funkcja falowa nie jest bezpośrednio mierzalna.

Posiada ona tzw **interpretację probabilistyczną**.

Oznacza ona, że

$$\varrho(\mathbf{r}, t) \stackrel{def}{=} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (40)$$

jest **gęstością prawdopodobieństwa** znalezienia cząstki w stanie kwantowym Ψ w położeniu \mathbf{r} w czasie t .

Znając gęstość prawdopodobieństwa (40) obliczamy **prawdopodobieństwo** P znalezienia cząstki w stanie kwantowym Ψ w części przestrzeni o objętości Ω w chwili t jako

$$P(t) = \int_{\Omega} d^3r \varrho(\mathbf{r}, t) . \quad (41)$$

Prawdopodobieństwo $P(t)$ może być zmierzone, np. za pomocą wielokrotnego pomiaru wykonanego na tej samej cząstce w tym samym stanie kwantowym lub mierząc rozkład wielu identycznych cząstek w tym samym stanie kwantowym.

Natomiast – w odróżnieniu od cząstki klasycznej – nie możemy ani zmierzyć położenia cząstki kwantowej z dowolną dokładnością ani wyznaczyć jej trajektorii.

Jeżeli całkowanie we wzorze (41) wykonamy po całej przestrzeni ($\Omega = \Omega_\infty$), to otrzymamy prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego, czyli

$$\int_{\Omega_\infty} d^3r |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = 1 \quad \forall t. \quad (42)$$

Wzór (42) jest **warunkiem unormowania funkcji falowej**.

Pytanie: Jaką cząstkę opisuje funkcja falowa o postaci fali płaskiej (22)?

Przypomnienie postaci fali płaskiej

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

Odpowiedź: Jest to funkcja falowa cząstki swobodnej.

Uzasadnienie:

Dla cząstki swobodnej $\hat{U} = 0$, czyli hamiltonian cząstki swobodnej ma postać

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \right). \quad (43)$$

Wstawiamy (22) i (43) do zależnego od czasu równania Schrödingera (36). Po wykonaniu różniczkowań otrzymujemy

$$E\Psi_{fp} = \frac{\hbar^2}{2m_0} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \Psi_{fp}, \quad (44)$$

co oznacza, że energia całkowita cząstki jest równa jej energii kinetycznej, czyli

$$E \equiv E_{kin} = \frac{\hbar^2}{2m_0} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} = \frac{p^2}{2m_0}. \quad (45)$$

Tę własność posiada wyłącznie energia cząstki swobodnej.

7 Zasada nieoznaczoności Heisenberga

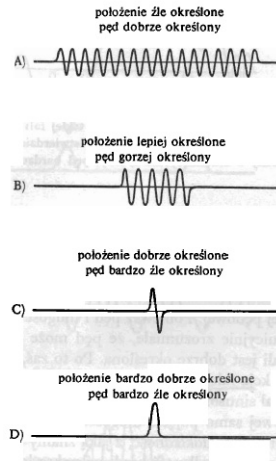
Falowo-korpuskularne własności cząstek prowadzą do istotnych ograniczeń pomiarowych. Ograniczenia te nie wynikają z niedoskonałości przyrządów pomiarowych, lecz z **kwantowej, czyli falowo-korpuskularnej, natury cząstek**.

W sposób ilościowy ograniczenia te wyraża **zasada nieoznaczoności** wprowadzona przez **Wernera Heisenberga**.

Nieoznaczoność położenie-pęd

Jeżeli w tej samej chwili czasu mierzymy x -owe składowe położenia i pędu cząstki, to zachodzi następująca nierówność:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (46)$$



Rysunek 8: Ilustracja nieoznaczoności położenie-pęd.

Δx = nieoznaczoność (niepewność, błąd) pomiaru składowej x -owej położenia cząstki

Δp_x = nieoznaczoność (niepewność, błąd) pomiaru składowej x -owej pędu cząstki

Nieoznaczoność czas-energia

Jeżeli pomiar energii E stanu kwantowego trwa przez czas Δt , to zachodzi następująca nierówność:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (47)$$

ΔE = nieoznaczoność (niepewność, błąd) pomiaru energii stanu kwantowego
 Δt = czas pomiaru (czas życia stanu kwantowego)

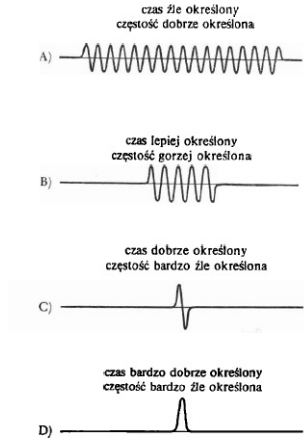
Nieoznaczoność czas-częstość

$$E = \hbar\omega \implies$$

$$\Delta\omega \Delta t \geq \frac{1}{2} \quad (48)$$

8 Zastosowanie dyfrakcji cząstek

Długość fali de Broglie'a



Rysunek 9: Ilustracja nieoznaczoności czas-częstość.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v}, \quad (49)$$

gdzie m_0 jest masą spoczynkową cząstki. Energia kinetyczna cząstki

$$E_{kin} = \frac{m_0 v^2}{2} \implies v = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m_0}} \quad (50)$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_{kin}}} \quad (51)$$

Jeżeli cząstka posiada ładunek q i zostaje przyspieszona do prędkości v przez napięcie V , to

$$E_{kin} = qV. \quad (52)$$

Wtedy

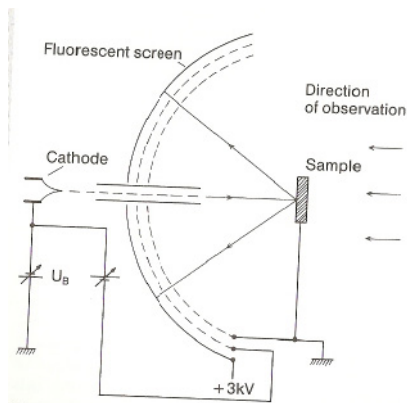
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 qV}} \quad (53)$$

Natomiast dla neutronów termicznych zachodzi

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} k_B T, \quad (54)$$

gdzie T jest temperaturą wiązki neutronowej. Długość fali de Broglie'a neutronów

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3m_0 k_B T}}. \quad (55)$$



Rysunek 10: Schemat aparatury LEED.

Do badań struktury kryształów używamy cząstek o długości fali de Broglie'a

$$\lambda \simeq 0.1 \div 1 \text{ \AA},$$

czyli

$$\lambda \simeq a ,$$

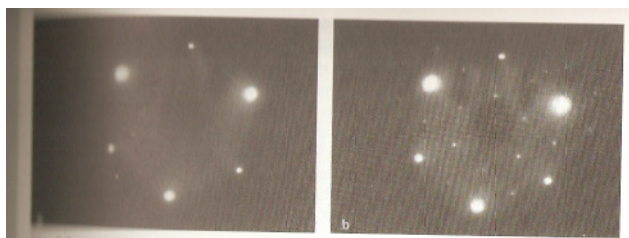
gdzie a jest stałą sieci kryształu.

Wartości te odpowiadają energiom cząstek

- 10 eV – 1 keV dla elektronów,
- 10 meV – 1 eV dla neutronów i lekkich atomów,
- 1 keV – 100 keV dla fotonów.

Dyfrakcja elektronów

- badanie powierzchni ciał stałych: dyfrakcja niskoenergetycznych elektronów (LEED)
- kontrola procesów wzrostu warstw w technologii epitaksji z wiązek molekularnych (MBE)
- litografia elektronowa
- mikroskopia elektronowa



Rysunek 11: Obrazy dyfrakcyjne LEED zaobserwowane na powierzchni kryształu Ni.

Dyfrakcja neutronów

- badanie struktury kryształów i układów biologicznych

Dyfrakcja atomów i molekuł

- badanie powierzchni ciał stałych
Najczęściej stosowane są wiązki atomów He i H₂.

Mikroskopia elektronowa

- **elektronowy mikroskop transmisyjny**

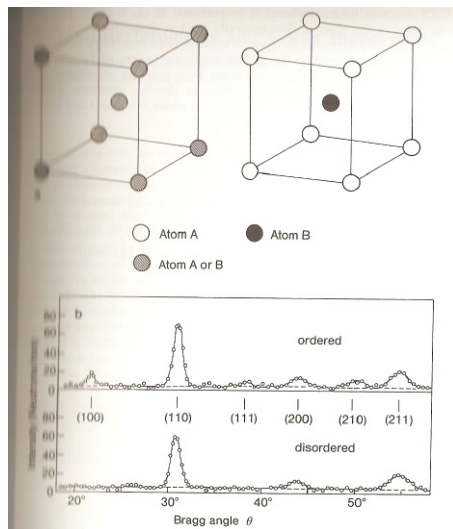
Zdolność rozdzielcza każdego mikroskopu jest ograniczona przez zjawisko dyfrakcji, czyli ilościowo przez długość fali. Dla elektronów przyspieszonych napięciem rzędu 100 kV długość fali de Broglie'a jest mniejsza od 0.01 nm. A zatem elektrony te mogą być używane do obserwacji pojedynczych atomów.

- **skaningowy mikroskop elektronowy**

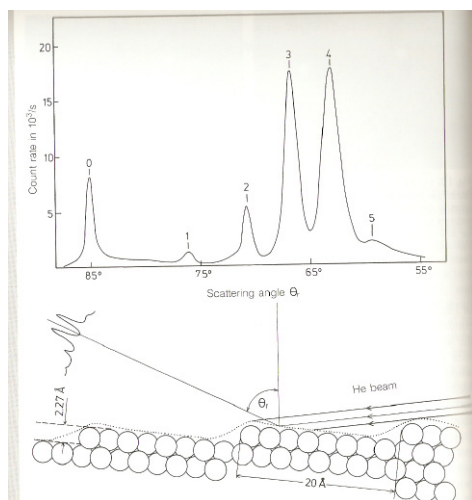
Wiązka elektronowa przemiata (skanuje) powierzchnię punkt po punkcie.

- **skaningowy mikroskop tunelowy**

Mierzony jest prąd tunelowy pomiędzy ostrzem a badaną powierzchnią. Prąd ten maleje eksponencjalnie w funkcji odległości ostrze-powierzchnia.



Rysunek 12: Schemat i wyniki dyfrakcji neutronów.



Rysunek 13: Dyfrakcja atomów He na powierzchni.