I.
GENERATORY LICZB PRZYPADKOWYCH

Janusz Adamowski

1 Dyskretna reprezentacja liczb w komputerze

Liczby są zapisywane w pamięci komputera przy użyciu **systemu dwójkowego**.

Oznacza to, że w odróżnieniu od ciągłej reprezentacji liczb, czyli zbiorów liczbowych mocy kontinuum, którymi posługujemy się w obliczeniach analitycznych, w obliczeniach numerycznych wykonywanych na komputerach używamy **dyskretnej zero-jedynkowej reprezentacji liczb**.

Jeżeli długość słowa komputerowego jest 64-bitowa, to dowolna liczba rzeczywista x jest zapisywana w pamięci komputera następująco:

$$x = \pm m \times 2^{e-e_0} \ , \tag{1}$$

gdzie m = 64-bitowa mantysa, e = wykładnik potęgowy wprowadzany do pamięci komputera, e_0 = bazowy wykładnik potęgowy ustalony dla danego komputera.

Błędy zaokrągleń

Przy wykonywaniu obliczeń komputerowych należy pamiętać o tym, że dyskretna reprezentacja liczb [wzór (1)] prowadzi do nieodłącznych błędów zaokrągleń. Błędy te wymagają zachowania ostrożności przy wykonywaniu operacji na bliskich sobie liczbach. Szczególnie czułe na błędy zaokrągleń są operacje porównywania, odejmowania oraz kombinacje wielu operacji.

Mając świadomość dyskretnego charakteru reprezentacji liczb można uniknąć wielu błędów numerycznych, mających swoje źródło w błędach zaokrągleń.

2 Liczby przypadkowe

Liczby przypadkowe (liczby losowe) znajdują powszechne zastosowania w obliczeniach komputerowych. Najczęściej liczby przypadkowe stosowane są w obliczeniach z użyciem metod Monte Carlo (MC). Jakość wyników otrzymanych za pomocą metod MC zależy od tego, czy liczby wzięte do obliczeń są **naprawdę przypadkowe**.

Niestety zwykle tak nie jest.

2.1 Liczby rzeczywiście przypadkowe

Ciąg liczb rzeczywiście (naprawdę) przypadkowych jest **nieprzewidywalny i niereprodukowalny**. Taki ciąg może być generowany wyłącznie w **procesie pomiaru wielkości fizycznej**. Wynika stąd, że generatorem ciągu liczb naprawdę przypadkowych może być urządzenie dokonujące pomiaru wielkości fizycznej.

Przykładowe zjawiska fizyczne, mogące być wykorzystane do generowania liczb przypadkowych:

- rozpad jąder promieniotwórczych
- szumy termiczne w urządzeniach elektronicznych
- przejścia elektronowe w atomach

Praktyczna realizacja generatora liczb rzeczywiście przypadkowych

Baza danych w Argonne National Laboratory, USA. W bazie tej zgromadzone są ciągi liczb, spełniających warunek prawdziwej przypadkowości, które zostały wygenerowane w pomiarach rozpadów jąder promieniotwórczych.

2.2 Liczby pseudoprzypadkowe

Liczby te są generowane za pomocą **ścisłych wzorów matematycznych**, a więc są **reprodukowalne**. Są jednak **nierozróżnialne** od ciągów naprawdę przypadkowych. Każdy generator liczb pseudoprzypadkowych jest charakteryzowany przez **okres**, który podaje długość ciągu liczb pomiędzy pozycją danej liczby a pozycją, przy której ta sama liczba pojawia się znowu.

Typowe generatory liczb pseudoprzypadkowych są oparte na **operacji modulo (mod)**, czyli wyznaczania reszty z dzielenia.

Przykładowe generatory liczb pseudolosowych

$$\xi_i = (a\xi_{i-1})(\mathrm{mod}\ m) \tag{2}$$

$$\xi_i = (a\xi_{i-1} + b)(\mathrm{mod}\ m) \tag{3}$$

m = moduł, a = mnożnik, b = stała addytywną, ξ_0 = wartość startowa (wybierana w sposób dowolny)

Wzory powyższe generują ciągi liczb pseudoprzypadkowych ξ_i.

2.3 Liczby quasi-przypadkowe

Ciąg liczb jest quasi-przypadkowy, jeżeli jest **niekoniecznie odróżnialny** od ciągu przypadkowego, lecz prowadzi do **prawidłowego rozwiązania problemu** metodą Monte Carlo. Odpowiedni generator liczb quasi-przypadkowych jest dopasowany do rozwiązywanego problemu.

Przykład generatora liczb quasi-przypadkowych

$$\xi_i = \sqrt{2}\frac{i(i+1)}{2} - E\left[\sqrt{2}\frac{i(i+1)}{2}\right] \tag{4}$$

$i = 1, 2, \ldots$ Generator ten oblicza część ułamkową z liczby $\sqrt{2}i(i+1)/2$, przy czym $E(x)$ oznacza część całkowitą liczby x. Należy zauważyć, że w odróżnieniu od generatorów liczb pseudoprzypadkowych generator (4) nie wykorzystuje poprzednio obliczonych liczb ciągu.

3 Rozkłady prawdopodobieństwa

Przedstawimy tu najczęściej stosowane w fizyce rozkłady prawdopodobieństwa w wersji jednowymiarowej.

Rozkład prawdopodobieństwa jest określony przez podanie **gęstości prawdopodobieństwa** $\varrho(x)$. Rozkłady prawdopodobieństwa powinny być unormowane, czyli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \varrho(x) = 1 \; . \tag{5}$$

Najczęściej używane rozkłady prawdopodobieństwa:

(1) jednorodny rozkład prawdopodobieństwa w przedziale jednostkowym

$$\varrho(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli} \quad 0 \leq x \leq 1 \; , \\ 0, & \text{jeżeli} \quad x < 0 \;\; \text{lub} \;\; x > 1 \; , \end{cases} \tag{6}$$

(2) jednorodny rozkład prawdopodobieństwa w dowolnym przedziale $[a, b]$

$$\varrho(x) = \begin{cases} 1/(b-a) \; , & \text{jeżeli} \quad a \leq x \leq b \; , \\ 0 \; , & \text{jeżeli} \quad x \notin [a, \; b] \; , \end{cases} \tag{7}$$

(3) rozkład normalny (Gaussa)

$$\varrho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \; , \tag{8}$$

wartość oczekiwana $= < x >= \mu$, wariancja $= < x^2 >= \sigma^2$, odchylenie standardowe $= \sigma$

3.1 Generacja rozkładu Gaussa

W celu generacji rozkładu Gaussa korzystamy z **centralnego twierdzenia granicznego**.

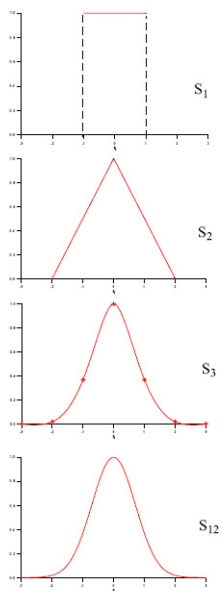
Twierdzenie Suma N niezależnych zmiennych losowych podlega zawsze rozkładowi normalnemu (rozkładowi Gaussa) bez względu na to, jakim rozkładom podlegają poszczególne zmienne losowe, pod warunkiem, że posiadają one skończone wartości średnie i wariancje, a N jest wystarczająco duże.

Przykładowy generator rozkładu Gaussa

Powiedzmy, że dysponujemy generatorem liczb losowych ξ_i o rozkładzie jednorodnym w przedziale $[-1, 1]$. Obliczamy

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \xi_i \tag{9}$$

Dla różnych wygenerowanych ciągów N liczb ξ_i i dla odpowiednio dużego N liczby S_N podlegają rozkładowi Gaussa. W praktyce wystarczy $N = 12$.



Generacja rozkładu Gaussa