

**XII.**  
**RÓWNANIA PARABOLICZNE**

# 1 Wstęp

Rozważać będziemy następujące, często używane w fizyce, równania paraboliczne:

- (1) równanie dyfuzji,
- (2) zależne od czasu równanie Schrödingera.

Najpierw przypominamy postać równania Schrödingera dla cząstki o masie  $m$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U \psi, \quad (1)$$

gdzie  $\psi = \psi(x, y, z, t)$  jest funkcją falową cząstki, a  $U = U(x, y, z, t)$  jest energią potencjalną cząstki w pewnym polu zewnętrznym, które zmienia się w przestrzeni i czasie.

# 2 Równanie dyfuzji

Wyprowadzimy prawa dyfuzji dla układu cząstek, których gęstość zmienia się w funkcji położenia i czasu. Prawa te pozwalają na przewidywanie zmian gęstości cząstek.

Oznaczamy przez  $n = n(x, y, z, t)$  **koncentrację cząstek**, czyli liczbę cząstek w jednostce objętości.

Definiujemy ponadto **wektor gęstości strumienia cząstek  $\mathbf{j}$**  jako wektor o wartości  $j = |\mathbf{j}|$  równej liczbie cząstek przelatujących w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni prostopadłej do wektora  $\mathbf{e}_n = d\boldsymbol{\sigma}/|d\boldsymbol{\sigma}|$ , gdzie  $d\boldsymbol{\sigma}$  jest wektorem elementu powierzchni  $d\sigma$ .

Zwrot wektora  $\mathbf{j}$  określamy następująco:

jeżeli liczba cząstek wewnątrz pewnej objętości zamkniętej maleje, to  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_n > 0$ ,

jeżeli natomiast liczba ta rośnie, to  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_n < 0$ .

Jeżeli rozkład cząstek jest niejednorodny, czyli  $\nabla n \neq 0$ , to w przybliżeniu liniowym

$$\mathbf{j} = -D \nabla n, \quad (2)$$

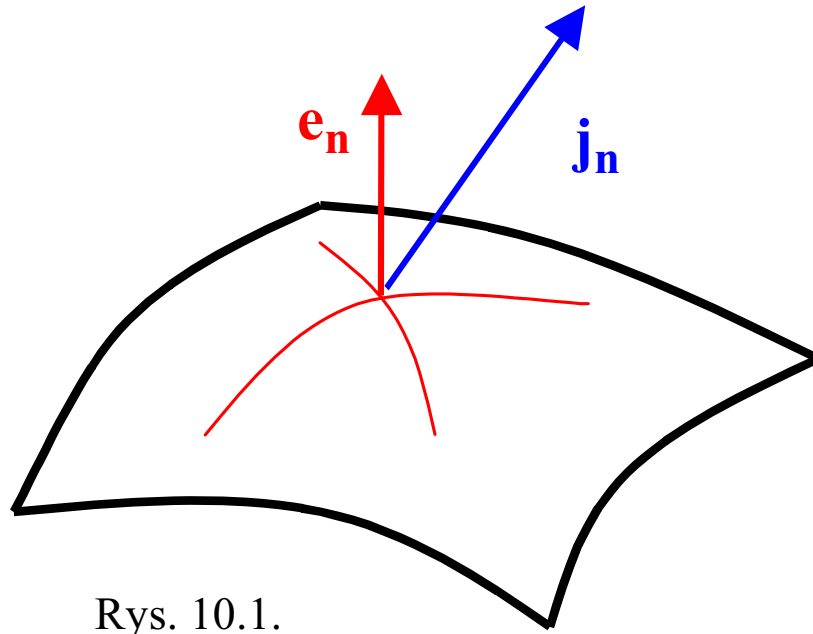
gdzie  $D$  jest **współczynnikiem samodyfuzji**.

Wzór (2) to jedno z podstawowych praw dyfuzji, tzw. **prawo Ficka**, zgodnie z którym strumień cząstek przepływa z miejsc o większej koncentracji do miejsc o mniejszej koncentracji. Zjawisko transportu cząstek w procesie dyfuzji zachodzi zgodnie z równaniem (2).

Zauważmy, że  $\mathbf{j} = 0$  dla  $n = \text{const}$ .

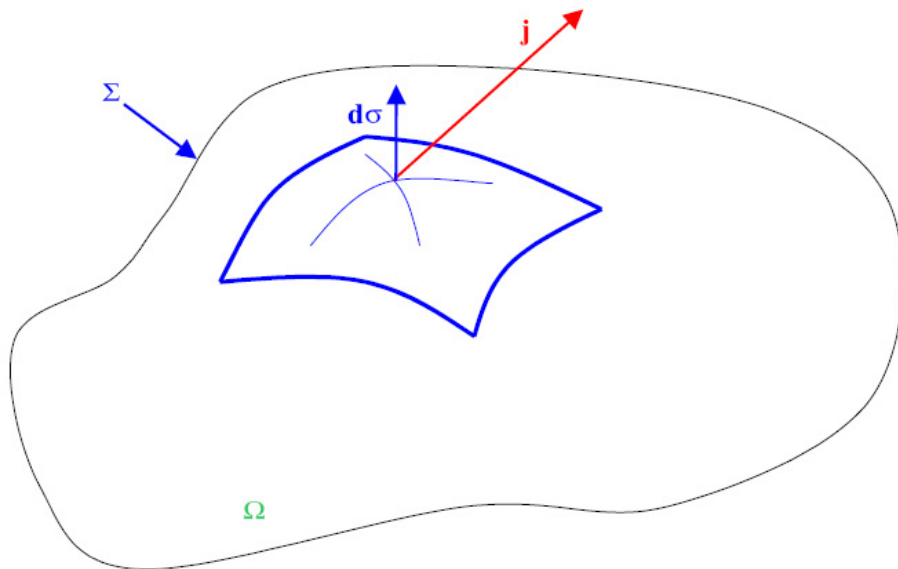
W ogólnym przypadku współczynnik samodyfuzji może zależeć od położenia, czyli  $D = D(x, y, z)$ .

Korzystamy teraz z zasady zachowania liczby cząstek w objętości  $\Omega$  zamkniętej powierzchnią  $\Sigma$ .



Rys. 10.1.

Rys. 1. Wektor gęstości strumienia cząstek.



Rys. 2. Ilustracja do zasady zachowania liczby cząstek.

Zmiana liczby cząstek wewnątrz objętości  $\Omega$  wynika z występowania strumienia cząstek przez powierzchnię  $\Sigma$ , czyli

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} n d^3r = - \oint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} . \quad (3)$$

Dla niezależnej od czasu objętości  $\Omega$  zamieniamy po lewej stronie równania (3) kolejność operacji różniczkowania i całkowania, a prawą stronę przekształcamy zgodnie z twierdzeniem Gaussa. W rezultacie otrzymujemy

$$\int_{\Omega} d^3r \frac{\partial n}{\partial t} = - \int_{\Omega} d^3r \nabla \cdot \mathbf{j} . \quad (4)$$

Równanie całkowe (4) zachodzi dla dowolnej objętości  $\Omega$ . Wynika stąd, że spełnione jest następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} . \quad (5)$$

Równanie (5) interpretujemy jako **zasadę zachowania liczby cząstek w postaci różniczkowej**.

Jest to **równanie ciągłości** dla procesu dyfuzji.

Podstawiamy (5) do (2) i otrzymujemy

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla n) . \quad (6)$$

Równanie (6) jest **równaniem dyfuzji**, które jest słuszne w przypadku, gdy

$$D = D(x, y, z) \neq const .$$

Jeżeli natomiast  $D = const$ , to otrzymujemy równanie dyfuzji w uproszczonej postaci

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n . \quad (7)$$

Jest to **najczęściej stosowana postać równania dyfuzji**.

Równanie dyfuzji (6) możemy uogólnić na przypadek występowania źródła cząstek o wydajności  $S$ .

W ten sposób otrzymujemy **najogólniejszą postać równania dyfuzji**

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla n) + S , \quad (8)$$

gdzie  $S = S(x, y, z, t)$  jest **funkcją źródła**.

Należy zauważyć, że problem dyfuzji jest problemem z zadanymi warunkami początkowymi, np. dla  $t = t_0$ , i zadanymi warunkami brzegowymi, np. na powierzchni  $\Sigma$ .

### 3 Dyskretyzacja jednowymiarowego równania dyfuzji

Rozważamy jednowymiarowe równanie dyfuzji dla stałego współczynnika dyfuzji  $D$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + S(x, t). \quad (9)$$

W równaniu (9) wybraliśmy takie jednostki, że  $D = 1$ .

Szukana funkcja  $\varphi = \varphi(x, t)$  oznacza wielkość fizyczną podlegającą procesowi dyfuzji; może to być koncentracja cząstek  $n(x, t)$ , ciepło  $Q(x, t)$ , lub inna wielkość.

W przestrzeni położeń wprowadzamy jednorodną sieć węzłów  $x_k = kh$ , gdzie  $k = 0, 1, \dots, N$ . Dla przedziału  $0 \leq x \leq 1$  stała sieci  $h = 1/N$ .

Zapisujemy równanie (9) na siatce przestrzennej. Aproxymujemy przy tym drugą pochodną zgodnie z przybliżeniem trójpunktowym

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{x=x_k} \simeq \frac{\varphi_{k-1} - 2\varphi_k + \varphi_{k+1}}{h^2} = \frac{(\Delta^2 \varphi)_k}{h^2}, \quad (10)$$

gdzie wprowadziliśmy operator różnicowy

$$(\Delta^2 \varphi)_k \stackrel{def}{=} \varphi_{k-1} - 2\varphi_k + \varphi_{k+1}. \quad (11)$$

Pochodną po czasie w równaniu (9) aproxymujemy za pomocą prostego dwupunktowego wzoru różnicowego wprowadzając krok czasowy  $\Delta t$  taki, że  $t_l = l \Delta t$ , gdzie  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\varphi_k^l = \varphi(x_k, t_l), \quad (12)$$

równanie (9) po dyskretyzacji, wykonanej w przestrzeni i czasie, przyjmuje postać

$$\frac{\varphi_k^{l+1} - \varphi_k^l}{\Delta t} = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 \varphi^l)_k + S_k^l, \quad (13)$$

gdzie

$$S_k^l = S(x_k, t_l).$$

Rozwiązujemy równanie (13) ze względu na  $\varphi_k^{l+1}$

$$\varphi_k^{l+1} = \varphi_k^l + \frac{\Delta t}{h^2} (\Delta^2 \varphi^l)_k + S_k^l \Delta t. \quad (14)$$

Definiujemy operator różnicowy

$$\tilde{H} \varphi_k^l \stackrel{def}{=} -\frac{1}{h^2} (\Delta^2 \varphi^l)_k \quad (15)$$

i otrzymujemy zwartą postać rozwiązania

$$\varphi_k^{l+1} = (1 - \tilde{H} \Delta t) \varphi_k^l + S_k^l \Delta t. \quad (16)$$

Wzór (16) podaje **jawne (explicite) rozwiązanie problemu dyfuzji**.

Jeżeli funkcja  $\varphi$  dana jest dla pewnej chwili czasu, to wartości tej funkcji w chwilach późniejszych znajdujemy według wzoru (16).

### Dyskusja jakości otrzymanego rozwiązania numerycznego

Zajmiemy się zależnością od czasu znanych analitycznych rozwiązań równania dyfuzji. W tym celu rozważamy równanie dyfuzji dla  $S = 0$ , czyli

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = H\varphi, \quad (17)$$

gdzie

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (18)$$

Rozwiązujemy równanie (17) metodą separacji zmiennych, zgodnie z którą

$$\varphi(x, t) = \varphi^0(x)\chi(t). \quad (19)$$

Po separacji zmiennych (19) równanie (17) przyjmuje postać

$$-\frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{\varphi^0} H\varphi^0 = \varepsilon, \quad (20)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest stałą separacji.

Jeżeli  $\chi(0) = 1$ , to

$$\chi(t) = e^{-\varepsilon t}. \quad (21)$$

Ponadto zgodnie z (20) spełnione są równania własne

$$H\varphi_\lambda^0 = \varepsilon_\lambda \varphi_\lambda^0, \quad (22)$$

gdzie  $\varepsilon_\lambda$  są wartościami własnymi operatora  $H$ , a  $\varphi_\lambda^0$  są funkcjami własnymi operatora  $H$ .

Dla danej wartości własnej  $\varepsilon_\lambda$  rozwiązanie równania (17) ma postać

$$\varphi_\lambda(x, t) = e^{-\varepsilon_\lambda t} \varphi_\lambda^0(x). \quad (23)$$

Funkcje (23) stanowią bazę ortonormalną zupełną, a więc rozwiązanie ogólne równania (17) ma postać rozwinięcia w szereg

$$\varphi(x, t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \varphi_{\lambda}(x, t). \quad (24)$$

W dalszych rozważaniach rozpatrujemy zależność czasową pojedynczej funkcji bazowej. W tym celu ustalamy  $x = x_l$  oraz  $t = l\Delta t$ . W reprezentacji dyskretnej (z opuszczonym wskaźnikiem  $k$ ) otrzymujemy

$$\varphi_{\lambda}^l = e^{-l\varepsilon_{\lambda}\Delta t} \varphi_{\lambda}^0. \quad (25)$$

Dla małych  $\Delta t$  zachodzi

$$\varphi_\lambda^l \simeq (1 - \varepsilon_\lambda \Delta t)^l \varphi_\lambda^0. \quad (26)$$

Jest to inna wersja przybliżonego rozwiązania (16) równania (17). Porównajmy teraz przybliżone rozwiązanie (26) z rozwiązaniem (16) dla  $S_k^l = 0$ . W tym celu po prawej stronie (16) wykonujemy  $l$  kroków czasowych zaczynając od  $l = 0$ . Rozwiązanie numeryczne (16) przechodzi w

$$\varphi^l = (1 - \tilde{H} \Delta t)^l \varphi^0. \quad (27)$$

Jeżeli przyjmiemy, że dla operatora  $\tilde{H}$  spełnione jest przybliżone równanie własne

$$\tilde{H} \varphi_\lambda^0 \simeq \varepsilon_\lambda \varphi_\lambda^0, \quad (28)$$

to rozwiązanie (27) przyjmuje postać

$$\varphi^l \simeq (1 - \varepsilon_\lambda \Delta t)^l \varphi_\lambda^0, \quad (29)$$

a zatem rozwiązania (26) i (27) są sobie równoważne.

Wynika stąd, że wzór (27), a więc i (26), jest dobrym przybliżeniem dokładnego rozwiązania dla odpowiednio małego  $\Delta t$ . Jeżeli natomiast  $\Delta t$  jest zbyt duże, to rozwiązanie numeryczne (27) źle przybliży rozwiązania dokładne. W szczególności, jeżeli  $|1 - \varepsilon_\lambda \Delta t| > 1$ , to otrzymujemy rozwiązanie niestabilne.

## 4 Metody implicite dla równania dyfuzji

Metody implicite (niejawne) podają sposoby usuwania niestabilności rozwiązań numerycznych otrzymanych według algorytmu explicite (16).

Zajmiemy się dwoma metodami implicite, które opierają się na zmodyfikowanej aproksymacji pochodnych w różnicowej postaci równania dyfuzji.

### (1) Zmodyfikowana aproksymacja drugiej pochodnej przestrzennej

Równanie dyfuzji (9) przekształcamy do postaci różnicowej stosując aproksymację drugiej pochodnej przestrzennej  $\partial^2 \varphi / \partial x^2$  dla węzła sieci  $x = x_k$  oraz chwili czasowej  $t = t_{l+1} = (l+1)\Delta t$ .

Zamiast równania (13) otrzymujemy

$$\frac{\varphi_k^{l+1} - \varphi_k^l}{\Delta t} = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 \varphi^{l+1})_k + S_k^l. \quad (30)$$

Niewiadoma  $\varphi_k^{l+1}$  występuje po obu stronach równania (30), stąd ten sposób rozwiązywania równania dyfuzji nazywamy **metodą implicite**.

Rozwiązujemy teraz równanie (30) ze względu na  $\varphi_k^{l+1}$  i otrzymujemy

$$\varphi_k^{l+1} = (1 + \tilde{H} \Delta t)^{-1} (\varphi_k^l + S_k^l \Delta t). \quad (31)$$

Dla małych  $\Delta t$  otrzymujemy

$$(1 + \tilde{H}\Delta t)^{-1} = 1 - \tilde{H}\Delta t + \mathcal{O}[(\Delta t)^2], \quad (32)$$

co oznacza, że z dokładnością rzędu  $(\Delta t)^2$  rozwiązanie (31) jest równoważne rozwiązaniu jawnemu (16).

Wartości własne operatora  $(1 + \tilde{H}\Delta t)^{-1}$  są równe  $(1 + \varepsilon_\lambda \Delta t)^{-1}$ , czyli

$$|(1 + \varepsilon_\lambda \Delta t)^{-1}| < 1 \quad \forall \Delta t. \quad (33)$$

Wynika stąd, że zastosowanie schematu niejawnego (31) daje rozwiązanie stabilne (choć niekoniecznie dokładne).

Rozwiązanie implícite (31) prowadzi do układu równań liniowych, który możemy rozwiązać za pomocą odpowiedniej procedury numerycznej.

## (2) Uśredniona aproksymacja drugiej pochodnej przestrzennej

Obliczamy  $\partial^2 \varphi / \partial x^2$  dla dwóch kolejnych chwil czasowych  $t_l$  i  $t_{l+1}$  i uśredniamy wyniki. Prowadzi to do równania

$$\frac{\varphi_k^{l+1} - \varphi_k^l}{\Delta t} = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 (\varphi_k^l + \varphi_k^{l+1}) + S_k^l, \quad (34)$$

z którego otrzymujemy

$$\varphi_k^{l+1} = \left(1 + \frac{1}{2} \tilde{H} \Delta t\right)^{-1} \left[ \left(1 - \frac{1}{2} \tilde{H} \Delta t\right) \varphi_k^l + S_k^l \Delta t \right]. \quad (35)$$

Podobnie jak w poprzedniej metodzie [wzór (31)] rozwiązanie (35) dla każdego kroku czasowego zmniejszane jest o czynnik o module mniejszym od 1, a zatem jest to metoda stabilna.

## 5 Metoda Cranka-Nicolsona

Równanie (34) zapisujemy następująco:

$$\begin{aligned} \varphi_k^{l+1} - \varphi_k^l &= \frac{\Delta t}{2h^2} (\varphi_{k-1}^l - 2\varphi_k^l + \varphi_{k+1}^l \\ &\quad + \varphi_{k-1}^{l+1} - 2\varphi_k^{l+1} + \varphi_{k+1}^{l+1}) \\ &\quad + \Delta t S_k^l. \end{aligned} \quad (36)$$

W dalszym ciągu wprowadzamy oznaczenie

$$a = \Delta t / 2h^2. \quad (37)$$

Rozwiązujemy (36) ze względu na  $\varphi^{l+1}$  i otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned}
& (1 + 2a)\varphi_k^{l+1} - a\varphi_{k-1}^{l+1} - a\varphi_{k+1}^{l+1} \\
= & (1 - 2a)\varphi_k^l + a\varphi_{k-1}^l + a\varphi_{k+1}^l \\
& + \Delta t S_k^l.
\end{aligned} \tag{38}$$

Definiujemy macierze kwadratowe  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  o rozmiarach  $(N + 1) \times (N + 1)$  jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & 1 + 2a & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & 1 + 2a & -a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 - 2a & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 - 2a & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Ponadto definiujemy macierze jednokolumnowe o rozmiarze  $(N + 1)$  numerowane wskaźnikiem  $l$

$$\mathbf{\Phi}^l = \begin{pmatrix} \varphi_0^l \\ \varphi_1^l \\ \vdots \\ \varphi_N^l \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}^l = \Delta t \begin{pmatrix} S_0^l \\ S_1^l \\ \vdots \\ S_N^l \end{pmatrix}, \tag{41}$$

gdzie  $\varphi_0^l$  i  $\varphi_N^l$  są warunkami brzegowymi.

Układ równań liniowych (38) można zapisać jako równanie macierzowe

$$\mathbf{A}\mathbf{\Phi}^{l+1} = \mathbf{B}\mathbf{\Phi}^l + \mathbf{C}^l. \tag{42}$$

Rozwiązanie rekurencyjne układu równań (42) jest podstawą metody (schematu) Cranka-Nicolsona. Rozwiązanie to jest stabilne dla dowolnych  $\Delta t$ .

## 6 Równanie dyfuzji w dwóch wymiarach

Rozważamy dwuwymiarowe równanie dyfuzji dla funkcji źródła  $S = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi, \tag{43}$$

gdzie  $\varphi = \varphi(x, y, t)$ .

Podobnie jak poprzednio pracujemy w takich jednostkach, że  $D = 1$ . Dokonujemy dyskretyzacji równania (43) na dwuwymiarowej sieci węzłów  $x_m = mh$ ,

gdzie  $m = 0, 1, \dots, M$ ,  $y_n = nh$ , gdzie  $n = 0, 1, \dots, N$ . Aproxymujemy drugie pochodne w równaniu (43) według wzoru

$$(\tilde{H}\varphi)_{mn} \stackrel{def}{=} -\frac{1}{h^2} [(\Delta_m^2\varphi)_{mn} + (\Delta_n^2\varphi)_{mn}] . \quad (44)$$

Stosujemy algorytm (31) uogólniony na przypadek dwuwymiarowy

$$\varphi_{mn}^{l+1} = (1 + \tilde{H}\Delta t)^{-1} \varphi_{mn}^l . \quad (45)$$

Zgodnie z (44)

$$\tilde{H} = H_m + H_n , \quad (46)$$

gdzie

$$H_m = -\frac{1}{h^2} \Delta_m^2 . \quad (47)$$

Wtedy z dokładnością do wyrazów liniowych w  $\Delta t$  równanie (45) przechodzi w

$$\varphi_{mn}^{l+1} = (1 + H_m\Delta t)^{-1} (1 + H_n\Delta t)^{-1} \varphi_{mn}^l . \quad (48)$$

Zastosowanie algorytmu (48) prowadzi do układu równań liniowych z macierzami trójprzekątniowymi, który można rozwiązać, np. za pomocą schematu Cranka-Nicolsona.

## 7 Rozwiązywanie numeryczne zaleźnego od czasu równania Schrödingera

Rozważmy kwantowo-mechaniczny opis cząstki poruszającej się wzdłuż osi  $x$  (problem jednowymiarowy). Przyjmujemy takie jednostki, że  $\hbar = 2m = 1$ . Zależne od czasu równanie Schrödingera przyjmuje wtedy postać

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -iH\psi , \quad (49)$$

gdzie  $H = T + U$  jest hamiltonianem układu,  $U = U(x, t)$  jest energia potencjalną cząstki, a  $\psi = \psi(x, t)$  jest jej funkcją falową.

Zgodnie z algorytmem (34) przybliżenie różnicowe równania (49) ma postać

$$\frac{\psi_k^{l+1} - \psi_k^l}{\Delta t} = -i\tilde{H} \left[ \frac{1}{2} (\psi_k^l + \psi_k^{l+1}) \right] , \quad (50)$$

przy czym

$$\tilde{H}\psi_k^l \stackrel{df}{=} -\frac{1}{h^2} (\Delta^2\psi^l)_k + U_k^l \psi_k^l . \quad (51)$$

Rozwiązaniem równania (50) jest

$$\psi_k^{l+1} = \left( 1 + \frac{i}{2} \tilde{H}\Delta t \right)^{-1} \left( 1 - \frac{i}{2} \tilde{H}\Delta t \right) \psi_k^l . \quad (52)$$

Przekształcamy wzór (52) korzystając z równości operatorowej

$$(1 + iA)^{-1}(1 - iA) = 2(1 + iA)^{-1} - 1 ,$$

która jest słuszna dla operatora hermitowskiego  $A$ . W rozważanym przypadku

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{i}{2}\tilde{H}\Delta t\right)^{-1} \left(1 - \frac{i}{2}\tilde{H}\Delta t\right) \\ &= 2 \left(1 + \frac{i}{2}\tilde{H}\Delta t\right)^{-1} - 1 . \end{aligned} \quad (53)$$

Ze wzorów (52) i (53) otrzymujemy

$$\psi_k^{l+1} = \left[ 2 \left(1 + \frac{i}{2}\tilde{H}\Delta t\right)^{-1} - 1 \right] \psi_k^l . \quad (54)$$

Definiujemy funkcję pomocniczą

$$\chi_k^l \stackrel{def}{=} 2 \left(1 + \frac{i}{2}\tilde{H}\Delta t\right)^{-1} \psi_k^l . \quad (55)$$

Wprowadzamy funkcję pomocniczą (55) do wzoru (54)

$$\psi_k^{l+1} = \chi_k^l - \psi_k^l . \quad (56)$$

Funkcję pomocniczą  $\chi_k^l$  można obliczyć ze wzoru (55) zapisanego jako

$$\left(1 + \frac{i}{2}\tilde{H}\Delta t\right) \chi_k^l = 2\psi_k^l . \quad (57)$$

Rozpisujemy operator  $\tilde{H}$  zgodnie z (51)

$$\tilde{H}\chi_k^l = \frac{1}{h^2} (2\chi_k^l - \chi_{k-1}^l - \chi_{k+1}^l) + U_k^l \chi_k^l . \quad (58)$$

Otrzymujemy układ równań

$$\chi_{k-1}^l + \left(\frac{2ih^2}{\Delta t} - 2 - h^2 U_k^l\right) \chi_k^l + \chi_{k+1}^l = \frac{4ih^2}{\Delta t} \psi_k^l . \quad (59)$$

Układ równań (59) jest układem równań liniowych z macierzą trójdiagonalną, a zatem do jego rozwiązania możemy stosować schemat Cranka-Nicholsona.