

IV.  
METODY RÓŻNICOWE  
ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ  
RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Janusz Adamowski

# 1 Wstęp

W rozdziale tym zajmiemy się zastosowaniem metod różnicowych do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Rozważmy układ  $M$  zwyczajnych równań różniczkowych pierwszego rzędu o postaci

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \dots, y_M), \quad (1)$$

gdzie  $x$  jest zmienną niezależną,  $y_1, \dots, y_M$  są zmiennymi zależnymi (niewiadomymi), a  $f_j = f_1, \dots, f_M$  są znanymi funkcjami.

Równania (1) są z sobą sprzężone. Równania te można przedstawić w zapisie wektorowym jako

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad (2)$$

przy czym  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_M)$  oznacza zbiór  $M$  zmiennych zależnych, a  $\mathbf{f}$  jest funkcją wektorową (o  $M$  składowych).

Równania różniczkowe pierwszego rzędu (1) posiadają szeroki zakres zastosowań w fizyce, ponieważ większość praw fizyki klasycznej można wyrazić za pomocą układu równań o postaci (1). Jeżeli w prawie fizyki występują równania różniczkowe wyższego rzędu, to zawsze można je sprowadzić do układu równań pierwszego rzędu (1).

Redukcję równania drugiego rzędu do układu równań rzędu pierwszego pokazemy na przykładzie równania ruchu Newtona.

Rozważmy równanie Newtona dla ruchu jednowymiarowego cząstki o masie  $m$  pod działaniem siły  $F(x)$ , które ma postać

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x). \quad (3)$$

Wprowadzając pęd

$$p(t) = m \frac{dx}{dt}, \quad (4)$$

otrzymujemy układ równań

$$\frac{dp}{dt} = F(x), \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}. \quad (6)$$

A zatem otrzymaliśmy układ dwóch sprzężonych z sobą równań różniczkowych pierwszego rzędu (są to równania Hamiltona).

Wynika stąd, że przy rozwiązaniu wielu problemów fizyki klasycznej wystarczające będą metody numeryczne rozwiązywania układu (1) równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Ponadto możemy dokonać dalszej redukcji. Przy rozwiązywaniu układu równań (1) można rozważać pojedyncze równanie typu (1). Jeżeli bowiem znajdziemy metodę rozwiązywania pojedynczego równania o postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (7)$$

dla jednej zmiennej zależnej  $y \equiv y_1$ , to łatwo będziemy mogli uogólnić tę metodę na przypadek układu równań (1) rozwiązując po kolei każde z równań układu. Traktujemy przy tym pozostałe zmienne  $y = y_2, \dots, y_M$  jako parametry.

Wobec tego w rozdziale tym będziemy dyskutować metody numerycznego rozwiązywania równania (7) z zadany **warunkiem początkowym** o postaci

$$y(0) = y_0 . \tag{8}$$

**Uwaga** Zadanie warunku początkowego (8) zapewnia jednoznaczność rozwiązań.

## 2 Różnicowa postać problemu

Szukamy rozwiązania równania (7), czyli funkcji  $y(x)$  w przedziale  $x \in [0, 1]$  z warunkiem początkowym (8). Rozwiązanie w dowolnym innym przedziale uzyskamy z przeskalowania i translacji przedziału  $[0, 1]$ .

Przeskalowanie polega na zmianie przedziału

$$[0, 1] \longrightarrow [0, b] , \tag{9}$$

gdzie  $b > 0$ .

Natomiast translacja polega na następującej zmianie przedziału

$$[0, b] \longrightarrow [a, b + b_1] , \tag{10}$$

przy czym  $b + b_1 > a$ .

W celu prostej prezentacji metody w dalszym ciągu będziemy rozważali rozwiązanie w przedziale  $[0, 1]$ .

Przedział  $[0, 1]$  dzielimy na  $N$  jednakowych podprzedziałów o długości  $h = 1/N$  każdy, przy czym

$$x_n = nh \tag{11}$$

są węzłami sieci. Oznaczamy

$$y_n = y(x_n) . \tag{12}$$

Jeżeli znajdziemy **formułę rekurencyjną** wiążącą  $y_n$  z  $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$  itd., to otrzymamy metodę pozwalającą na całkowanie równania (7) krok po kroku w przedziale  $[0, 1]$ .

## 3 Metoda Eulera

Zamiast pierwszej pochodnej po lewej stronie (7) podstawimy jej różnicowe przybliżenie za pomocą różnicy przedniej, czyli

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \mathcal{O}(h) = f(x_n, y_n) . \tag{13}$$

Otrzymujemy stąd związek rekurencyjny

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \mathcal{O}(h^2) . \quad (14)$$

**Błąd lokalny**, czyli błąd popełniony w pojedynczym kroku z  $x_n$  do  $x_{n+1}$ , jest rzędu  $\mathcal{O}(h^2)$ . Natomiast **błąd globalny**, rozumiany jako błąd oszacowania po  $N$  krokach, np. wartości  $y(1)$ , jest rzędu

$$N\mathcal{O}(h^2) = \frac{1}{h}\mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h) .$$

## 4 Metoda Adamsa-Bashfortha

Wykonujemy analityczne całkowanie równania (7) w przedziale  $[x_n, x_{n+1}]$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx . \quad (15)$$

Całkę zawierającą nieznaną zmienną  $y$  wykonujemy stosując następującą liniową interpolację funkcji  $f$  względem zmiennej  $x$ :

$$f(x) \simeq f_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{h}(x - x_n) + \mathcal{O}[(x - x_n)^2] , \quad (16)$$

przy czym  $x \in [x_n, x_n + h]$ .

Obliczamy analitycznie całkę we wzorze (15) podstawiając  $x_{n+1} = x_n + h$

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx &= \int_{x_n}^{x_n+h} dx \left[ f_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{h}(x - x_n) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(x^2) \right] \\ &= f_n h + \frac{f_n - f_{n-1}}{h} \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3) \\ &= \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) + \mathcal{O}(h^3) . \end{aligned} \quad (17)$$

Podstawiając (17) do (15) otrzymujemy podstawowy wzór metody, czyli

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1}\right) + \mathcal{O}(h^3) . \quad (18)$$

Metoda Adamsa-Bashfortha (18) jest metodą dwukrokową o błędzie lokalnym  $\mathcal{O}(h^3)$  i błędzie globalnym  $\mathcal{O}(h^2)$ .

## 5 Metody implicite

W metodach explicite (jawnych) wartość  $y_{n+1}$  określona jest w sposób bezpośredni (jawny) za pomocą znanej wartości  $y_n$ . W metodach implicite (niejawnych) należy rozwiązać dodatkowe równanie, aby wyznaczyć  $y_{n+1}$  za pomocą  $y_n$ .

Rozważmy równanie (7) w punkcie  $x_{n+1/2} = (n + \frac{1}{2})h$ , czyli w połowie odcinka pomiędzy węzłami sieci  $x_n$  oraz  $x_{n+1}$ .

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_{n+1/2}} = f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}). \quad (19)$$

W równaniu (19) zastępujemy pochodną po lewej stronie przez symetryczne przybliżenie różnicowe (z zamianą  $h \rightarrow \frac{1}{2}h$ ).

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_{n+1/2}} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (20)$$

Natomiast wartość funkcji  $f_{n+1/2} = f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$  zastępujemy przez średnią wartość tej funkcji liczoną dla dwóch sąsiednich węzłów sieci

$$f_{n+1/2} = \frac{1}{2}(f_n + f_{n+1}) + \mathcal{O}(h^2). \quad (21)$$

Ze związków (20) i (21) otrzymujemy

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{1}{2}(f_n + f_{n+1}) + \mathcal{O}(h^2). \quad (22)$$

Wynika stąd związek rekurencyjny

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] + \mathcal{O}(h^3). \quad (23)$$

Równanie to zawiera  $y_{n+1}$  po obu stronach. Jego rozwiązanie (otrzymane na ogół za pomocą złożonej procedury numerycznej) dostarcza rozwiązania równania różniczkowego metodą implicite.

## 6 Metody Runge'go-Kutty

Rozważmy wynik pojedynczego kroku w całkowaniu równania (7), czyli wzór (15). Przybliżamy funkcję podcałkową  $f(x, y)$  za pomocą rozwinięcia w szereg Taylora względem zmiennej  $x$  wokół punktu  $x_{n+1/2} = (n + 1/2)h$

$$f(x, y) = f_{n+1/2} + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_{n+1/2}} (x - x_{n+1/2}) + \mathcal{O}(h^2). \quad (24)$$

Pamiętamy przy tym, że  $x \in [x_n, x_{n+1}]$ .

Podstawiamy (24) do (15) i otrzymujemy

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf_{n+1/2} + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_{n+1/2}} \int_{x_{n+1/2} - \frac{h}{2}}^{x_{n+1/2} + \frac{h}{2}} (x - x_{n+1/2}) dx \\ &\quad + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \quad (25)$$

Całka we wzorze (25) znika, ponieważ całkujemy funkcję antysymetryczną po przedziale symetrycznym. Otrzymujemy stąd

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) + \mathcal{O}(h^3). \quad (26)$$

W celu pozbycia się zależności od  $y_{n+1/2}$  po prawej stronie definiujemy

$$k = hf(x_n, y_n). \quad (27)$$

Wtedy

$$y_{n+1/2} = y(x_{n+1/2}) = y_n + \frac{k}{2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (28)$$

Zauważmy, że podstawienie (28) nie zwiększa błędu w równaniu (25).

Jako wynik końcowy otrzymujemy

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k}{2}) + \mathcal{O}(h^3). \quad (29)$$

Wykorzystanie wzoru (29) prowadzi do **metody Runge'go-Kutty drugiego rzędu**. Błąd globalny tej metody jest rzędu  $\mathcal{O}(h^2)$ .

Algorytm metody Rungego-Kutty polega na obliczaniu w każdym kroku najpierw pomocniczej wielkości  $k$  (27), a następnie  $y_{n+1}$  (29).

**Metody Runge'go-Kutty wyższych rzędów** można otrzymywać według powyższego schematu stosując coraz dokładniejsze metody obliczania całki w równaniu (15).

Np. całkowanie metodą Simpsona prowadzi do metody Rungego-Kutty rzędu trzeciego z błędem globalnym  $\mathcal{O}(h^3)$ .

W ogólnym przypadku **rzęd metody  $r$**  jest określony przez wykładnik potęgi w oszacowaniu błędu globalnego w sposób następujący:

jeżeli błąd globalny metody wynosi

$$\mathcal{O}(h^r),$$

to metoda Runge'go-Kutty jest rzędu  $r$ .