

V.
RÓWNANIA RUCHU MECHANIKI
KLASYCZNEJ

Janusz Adamowski

1 Wstęp

Rozważamy ruch jednej cząstki klasycznej w jednym wymiarze. Otrzymane wyniki będzie można łatwo uogólnić na przypadek pojedynczej cząstki poruszającej się w dwóch i trzech wymiarach. W uogólnieniu tym wykorzystujemy **zasadę superpozycji**.

Korzystając z II zasady dynamiki Newtona można zapisać równania jednowymiarowego ruchu cząstki jako

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = a. \quad (2)$$

Naszym zadaniem jest znalezienie numerycznego rozwiązania układu równań (1) i (2) dla pewnej chwili czasu, czyli znalezienie **rozwiązania lokalnego**. Znając rozwiązania lokalne dla kolejnych chwil czasowych otrzymamy **rozwiązanie globalne** za pomocą sumowania rozwiązań lokalnych, czyli całkowania numerycznego.

Rozwiązanie lokalne polega na podaniu **procedury rekurencyjnej** wiążącej wartości położenia x_{n+1} i prędkości v_{n+1} w $(n+1)$ -ym kroku czasowym z wartościami tych wielkości w kroku n -tym, czyli z x_n i v_n , przy czym

$$x_n = x(t_n), \quad v_n = v(t_n), \quad (3)$$

oraz

$$t_{n+1} = t_n + h. \quad (4)$$

2 Metoda Eulera

Zgodnie z tą metodą stosujemy przybliżenie pierwszej pochodnej za pomocą różnicy przedniej dla położenia i prędkości. W wyniku otrzymujemy

$$x_{n+1} = x_n + v_n h + \mathcal{O}(h^2), \quad (5)$$

$$v_{n+1} = v_n + a_n h + \mathcal{O}(h^2). \quad (6)$$

Błąd lokalny metody jest rzędu $\mathcal{O}(h^2)$, natomiast błąd globalny jest rzędu $\mathcal{O}(h)$.

W ogólnym przypadku przez **rzęd metody r** rozumiemy wykładnik potęgi w wyrażeniu, które określa rząd błędu globalnego, czyli

$$\mathcal{O}(h^r).$$

Metoda Eulera jest zatem metodą pierwszego rzędu ($r = 1$).

Metodę Eulera możemy ponadto sklasyfikować jako **metodę samostartującą**.

Oznacza to, że znając położenie i prędkość w chwili t_n możemy wyznaczyć te wielkości w kolejnej chwili t_{n+1} .

W szczególności startując z zadanych **warunków początkowych** dla $t = t_0$ obliczamy położenia x_n i prędkości v_n dla kolejnych chwil czasowych, czyli t_1, t_2, \dots

3 Metoda Eulera-Cromera

W metodzie tej stosujemy **przybliżenie ostatniego punktu**, zgodnie z którym

$$v_{n+1} = v_n + a_n h + \mathcal{O}(h^2) \quad (7)$$

oraz

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1} h + \mathcal{O}(h^2). \quad (8)$$

Metoda ta nie poprawia dokładności metody Eulera. Podobnie jak metoda Eulera jest metodą samostartującą.

4 Metoda punktu pośredniego

Prędkość i położenie wyznaczamy według tej metody za pomocą następujących wzorów:

$$v_{n+1} = v_n + a_n h + \mathcal{O}(h^2) \quad (9)$$

oraz

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(v_n + v_{n+1}) + \mathcal{O}(h^3). \quad (10)$$

Powyższe wzory wynikają z metody implícite rozwiązywania równań różniczkowych. Podstawiając (9) do (10) otrzymujemy

$$x_{n+1} = x_n + v_n h + \frac{h^2}{2} a_n + \mathcal{O}(h^3). \quad (11)$$

Jest to metoda samostartująca, będąca metodą pierwszego rzędu dla prędkości, a drugiego rzędu dla położenia.

5 Metoda Newtona-Feynmana

W metodzie tej wprowadzamy chwile pośrednie $t_{n+1/2}$ w środkach przedziałów czasowych $[t_n, t_{n+1}]$ i obliczamy prędkości średnie. Jako prędkość średnią wybieramy prędkość w chwili $t_{n+1/2}$. Algorytm metody opiera się na następujących wykonywanych kolejno operacjach podstawienia:

$$v_{n+1/2} = v_{n-1/2} + a_n h + \mathcal{O}(h^3) \quad (12)$$

oraz

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1/2} h + \mathcal{O}(h^3). \quad (13)$$

Błąd globalny metody jest rzędu $\mathcal{O}(h^2)$, a zatem jest to metoda drugiego rzędu.

Metoda ta **nie jest metodą samostartującą**. Oznacza to, że zastosowanie powyższego algorytmu nie pozwala na obliczenie $v_{1/2}$. W celu wyznaczenia $v_{1/2}$ należy zastosować jakąkolwiek inną metodę samostartującą, np. metodę Eulera, zgodnie z którą

$$v_{1/2} = v_0 + \frac{1}{2} a_0 h. \quad (14)$$

6 Algorytmy Verleta

Algorytmy Verleta są najczęściej stosowane w dynamice molekularnej. Zapewniają one rozsądny kompromis pomiędzy szybkością obliczeń a ich dokładnością.

7 Podstawowy algorytm Verleta

Napiszmy rozwinięcie w szereg Taylora dla x_{n+1} i x_{n-1}

$$x_{n+1} = x_n + v_n h + \frac{1}{2} a_n h^2 + \mathcal{O}(h^3), \quad (15)$$

$$x_{n-1} = x_n - v_n h + \frac{1}{2} a_n h^2 + \mathcal{O}(h^3). \quad (16)$$

Dodając stronami (15) i (16) otrzymujemy

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2x_n + a_n h^2 + \mathcal{O}(h^4), \quad (17)$$

ponieważ wyrazy rzędu $\mathcal{O}(h^3)$ znoszą się.

Z równania (17) otrzymujemy

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + a_n h^2 + \mathcal{O}(h^4). \quad (18)$$

Natomiast odejmując stronami (16) od (15) otrzymujemy

$$v_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (19)$$

Podstawowy algorytm Verleta opiera się na formułach (18) i (19). Wynika z nich, że błąd globalny tego algorytmu jest $\mathcal{O}(h^3)$ dla położenia, a $\mathcal{O}(h^1)$ dla prędkości.

Można zauważyć, że wzór (19) jest symetryczną (trójpunktową) aproksymacją różnicową pierwszej pochodnej.

Podstawowy algorytm Verleta nie jest samostartujący.

8 Prędkościowa forma algorytmu Verleta (zmodyfikowany algorytm Verleta)

Algorytm ten stanowi implementację następujących wzorów:

$$x_{n+1} = x_n + v_n h + \frac{1}{2} a_n h^2 + \mathcal{O}(h^3) \quad (20)$$

oraz

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} (a_n + a_{n+1}) h + \mathcal{O}(h^2). \quad (21)$$

Wyprowadzenie tych wzorów podane jest w Uzupełnieniu A.

Można zauważyć, że wzór (20) jest aproksymacją położenia w dowolnym ruchu za pomocą znanego wzoru na położenie w ruchu jednostajnie zmiennym.

Wzory (20) i (21) tworzą algorytm Verleta w zmodyfikowanej postaci.

Jest to tzw. **prędkościowa wersja algorytmu Verleta**.

Jak widać algorytm ten jest samostartujący, co jest jego zaletą w zastosowaniach do obliczeń metodami dynamiki molekularnej.

Błędy tego algorytmu dla prędkości są takie same jak dla podstawowego algorytmu Verleta.

9 Przesępny algorytm Verleta

Nazwa algorytmu

Angielska nazwa tego algorytmu (**leap-frog formulation of the Verlet algorithm**) jest często niepoprawnie tłumaczona jako algorytm "zabiegu skoku".

W języku angielskim "leap frog" oznacza zabawę polegającą na kolejnym przeskakiwaniu poszczególnych uczestników zabawy stojących ze zgiętymi plecami przez innych jej uczestników. Inaczej jest to typowy trening grupy sportowców.

W polskim tłumaczeniu nazwy można skorzystać z tego, że **leap year** oznacza **rok przesyenny**.

A zatem możemy mówić o **algorytmie przesyennym**.

Poniżej podany jest ciąg wzorów algorytmu. Kolejno obliczamy

$$v_{n-1/2} = \frac{x_n - x_{n-1}}{h} + \mathcal{O}(h^2), \quad (22)$$

$$v_{n+1/2} = v_{n-1/2} + ha_n + \mathcal{O}(h^2), \quad (23)$$

$$x_{n+1} = x_n + hv_{n+1/2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (24)$$

$$v_n = \frac{1}{2}(v_{n-1/2} + v_{n+1/2}) + \mathcal{O}(h^2). \quad (25)$$

Wzory te przedstawiają ewolucję czasową układu w sposób oczywisty, a więc nie wymagają wyprowadzenia.

Algorytm ten nie jest samostartujący.

Stosujemy go w ten sposób, że w każdym kroku obliczamy kolejno wartości po lewych stronach równań (22), (23), (24) i (25).

10 Algorytm Beemana-Schofielda

Algorytm ten opiera się na następujących wzorach:

$$x_{n+1} = x_n + v_n h + \frac{h^2}{6}(4a_n - a_{n-1}) + \mathcal{O}(h^4), \quad (26)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6}(2a_{n+1} + 5a_n - a_{n-1}) + \mathcal{O}(h^3). \quad (27)$$

Wyprowadzenie tych wzorów podane jest w Uzupełnieniu B.

Algorytm ten nie jest samostartujący.

Błędy przy obliczaniu położenia są takie jak w podstawowym algorytmie Verleta, natomiast algorytm ten jest dokładniejszy przy wyznaczaniu prędkości.

Algorytm ten posiada ważną zaletę:

obliczone za jego pomocą wartości energii bardzo dobrze spełniają zasadę zachowania energii całkowitej.

11 Metoda predykcji-korekcji

Metoda ta różni się od poprzednio przedstawionych podejść tym, że w każdym kroku czasowym wykonywana jest pętla iteracyjna. Zgodnie z tą metodą przewidujemy nowe położenie jako

$$\tilde{x}_{n+1} = x_{n-1} + 2hv_n . \quad (28)$$

Nowa wartość położenia \tilde{x}_{n+1} pozwala nam wyznaczyć przewidywane przyspieszenie \tilde{a}_{n+1} jako

$$\tilde{a}_{n+1} = \frac{1}{m} F(\tilde{x}_{n+1}) . \quad (29)$$

Używamy następnie \tilde{a}_{n+1} w celu wyznaczenia poprawionych (skorygowanych) wartości v_{n+1} i x_{n+1} , czyli

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}(\tilde{a}_{n+1} + a_n)h \quad (30)$$

oraz

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)h . \quad (31)$$

Poprawiona wartość x_{n+1} jest używana do wyznaczenia nowej wartości przewidywanego przyspieszenia a_{n+1} wg. (29), a to przyspieszenie stosujemy do wyznaczenia v_{n+1} i x_{n+1} wg. (30) i (31).

W każdym kroku czasowym wykonujemy następującą pętlę iteracyjną:

$$(29) \implies (30) \implies (31) \implies (29) \implies (30) \dots$$

Iteracje powyższe powtarzane są dotąd, aż spełniona zostanie nierówność

$$|\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}| < \varepsilon ,$$

gdzie ε jest żądaną dokładnością.

Metoda ta nie jest samostartująca.

12 Metoda Runge'go-Kutty drugiego rzędu

Znaną metodę Runge'go-Kutty, wprowadzoną poprzednio dla pojedynczego równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu, adaptujemy do rozwiązania układu równań ruchu (1) i (2).

Wielkości pomocnicze k w metodzie Runge'go-Kutty definiujemy oddzielnie dla położenia (k_x) i prędkości (k_v) w sposób następujący:

$$k_x \stackrel{def}{=} v_n h = h f_x(t_n), \quad (32)$$

gdzie $f_x = v$, oraz

$$k_v \stackrel{def}{=} a_n h = h f_v(t_n), \quad (33)$$

gdzie $f_v = a$.

Zgodnie z metodą Runge'go-Kutty dla równania różniczkowego piszemy wzory dla położenia

$$x_{n+1} = x_n + h v(t_{n+1/2}) + \mathcal{O}(h^3), \quad (34)$$

i prędkości

$$v_{n+1} = v_n + h a(t_{n+1/2}) + \mathcal{O}(h^3). \quad (35)$$

Wyznaczamy teraz prędkość w środku przedziału czasowego $[t_n, t_{n+1}]$ z dokładnością $\mathcal{O}(h^2)$, czyli

$$v\left(t_n + \frac{h}{2}\right) = v_n + \frac{k_v}{2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (36)$$

Natomiast przyspieszenie liczone w środku przedziału $[t_n, t_{n+1}]$ aproksymujemy następująco:

$$a(t_{n+1/2}) = a\left(x_n + \frac{k_x}{2}\right). \quad (37)$$

Podstawiamy (36) do (34)

$$x_{n+1} = x_n + h\left(v_n + \frac{k_v}{2}\right) + \mathcal{O}(h^3). \quad (38)$$

Ponadto podstawiamy (37) do (35)

$$v_{n+1} = v_n + h a\left(x_n + \frac{k_x}{2}\right) + \mathcal{O}(h^3). \quad (39)$$

Wzory (38) i (39) stanowią algorytm Runge'go-Kutty 2. rzędu.

Algorytm ten jest samostartujący.

W trakcie wykonywania algorytmu Runge'go-Kutty należy wyznaczać następujące wielkości pomocnicze:

$$k_x = h v_n \quad (40)$$

oraz

$$k_v = h a_n. \quad (41)$$

Dokładność tego algorytmu może być poprawiana w sposób systematyczny poprzez zastosowanie metod Runge'go-Kutty wyższych rzędów.

13 Przypadek siły zależnej od prędkości

Należy zauważyć, że stosowany powyżej podział metod całkowania równań ruchu na samostartujące i niesamostartujące jest słuszny wyłącznie w przypadku, gdy **siła nie zależy od prędkości**, czyli gdy

$$F = F(x, t) \neq f(v) .$$

Jeżeli natomiast siła zależy od prędkości,

$$F = F(x, v, t) ,$$

to niektóre spośród omówionych metod przestają być samostartujące. Prowadzi to do konieczności stosowania mniej dokładnych metod, np. metody Eulera, do wystartowania algorytmu.

14 Przykłady całkowania równań ruchu

14.1 Rzut pionowy w polu grawitacyjnym Ziemi

Wprowadzamy taki układ współrzędnych, że oś y jest skierowana pionowo w górę. Naszym celem jest rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$v = \frac{dy}{dt} \tag{42}$$

oraz

$$a = \frac{dv}{dt} , \tag{43}$$

przy czym przyspieszenie

$$a = \frac{1}{m} F(y, v) \tag{44}$$

jest funkcją położenia y i prędkości $v = v_y$.

Równania (42) i (43) są równoważne równaniu Newtona, które jest równaniem różniczkowym 2. rzędu i ma postać

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{F}{m} . \tag{45}$$

14.2 Ruch w jednorodnym polu grawitacji z zaniedbaniem oporu powietrza

W tym przypadku działa wyłącznie stała siła grawitacji

$$F = F_g^0 = -mg . \tag{46}$$

Równanie ruchu ma postać

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{47}$$

i jest całkwalne analitycznie. Jego rozwiązaniami są

$$v(t) = v_0 - gt \quad (48)$$

oraz

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 . \quad (49)$$

Rozróżniamy dwa przypadki ruchu w kierunku pionowym.

(1) Wznoszenie

W tym przypadku

$$y_0 = 0 , \quad v_0 > 0$$

(2) Spadanie

W tym przypadku

$$y_0 = h , \quad v_0 \leq 0$$

14.3 Ruch w kierunku pionowym z uwzględnieniem oporu powietrza

W tym przypadku pojawia się siła oporu (siła tarcia) zależna od prędkości

$$\mathbf{F}_t = -F_t(v)\mathbf{e}_v , \quad (50)$$

gdzie

$$\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} .$$

Składowa pionowa siły wypadkowej

$$F = F_y = F_g^0 \mp F_t , \quad (51)$$

przy czym znak $-$ odpowiada wznoszeniu, a znak $+$ odpowiada spadaniu.

Dla zależności siły oporu od prędkości stosujemy zwykle jeden w dwóch wzorów fenomenologicznych.

(1) Przybliżenie liniowe słuszne dla małych prędkości:

$$F_t^{(1)}(v) = \gamma_1 |\mathbf{v}| \quad (52)$$

(2) Przybliżenie kwadratowe słuszne dla większych prędkości:

$$F_t^{(2)}(v) = \gamma_2 v^2 \quad (53)$$

We wzorach (52) i (53) występują następujące parametry:

$$\gamma_1 = \alpha r \quad (54)$$

(parametryzacja ta jest słuszna dla obiektu o przekroju kolistym o promieniu r , α jest stałą proporcjonalności)

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} C \rho A, \quad (55)$$

gdzie stała $C < 1$ jest współczynnikiem oporu powietrza, ρ jest gęstością powietrza, a A jest polem przekroju poprzecznego obiektu poruszającego się.

W każdym przypadku siła oporu $F_t(v)$ rośnie wraz ze wzrostem prędkości. W związku z tym opór powietrza dla pewnej prędkości krytycznej $v = v_c$ osiąga wartość maksymalną równą

$$|F_t(v_c)| = |F_g^0|. \quad (56)$$

W przypadku spadania osiągnięcie prędkości krytycznej oznacza, że siła wypadkowa $F = 0$, a zatem przyspieszenie również się zeruje, czyli obiekt zaczyna spadać ruchem jednostajnym z prędkością v_c .

• **spadanie spadochroniarza**

Można wyznaczyć prędkości krytyczne dla obu przybliżeń (52) i (53). W przybliżeniu liniowym

$$v_c^{(1)} = \frac{mg}{\gamma_1}. \quad (57)$$

W przybliżeniu kwadratowym

$$v_c^{(2)} = \left(\frac{mg}{\gamma_2} \right)^{1/2}. \quad (58)$$

Siły wypadkowe działające na spadający obiekt można wyrazić za pomocą prędkości krytycznych.

(1) w przypadku liniowym

$$F_1(v) = -mg(1 - |v|/v_c^{(1)}) \quad \text{dla } |v| \leq v_c^{(1)} \quad (59)$$

$$F_1(v) = 0 \quad \text{dla } |v| > v_c^{(1)} \quad (60)$$

(2) w przypadku kwadratowym

$$F_2(v) = -mg \left(1 - v^2/(v_c^{(2)})^2 \right) \quad \text{dla } |v| \leq v_c^{(2)} \quad (61)$$

$$F_2(v) = 0 \quad \text{dla } v > v_c^{(2)} \quad (62)$$

14.4 Ruch pionowy w polu grawitacyjnym podlegającym prawu grawitacji Newtona

Zmieniamy wzór na siłę grawitacji zgodnie z prawem grawitacji Newtona

$$F_g \longrightarrow F_g(y) = -\frac{GmM}{(R+y)^2}, \quad (63)$$

gdzie $M =$ masa Ziemi, $R =$ promień Ziemi. Inny zapis wzoru (63)

$$F_g(y) = -\frac{mg}{\left(1 + \frac{y}{R}\right)^2}, \quad (64)$$

przy czym

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

14.5 Dwuwymiarowy ruch cząstki w polu grawitacji Ziemi (rzut ukośny)

Rozważamy rzut ukośny w jednorodnym polu grawitacji. Równania na składowe prędkości

$$m \frac{dv_x}{dt} = -F_t \cos \theta \quad (65)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - F_t \sin \theta, \quad (66)$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorem prędkości a osią x .

Dla siły oporu powietrza proporcjonalnej do kwadratu prędkości

$$F_t^{(2)} = \gamma_2 v^2 \quad (67)$$

otrzymujemy następujące równania ruchu

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\gamma_2}{m} v v_x, \quad (68)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{\gamma_2}{m} v v_y. \quad (69)$$

Długość wektora prędkości zawiera obie składowe

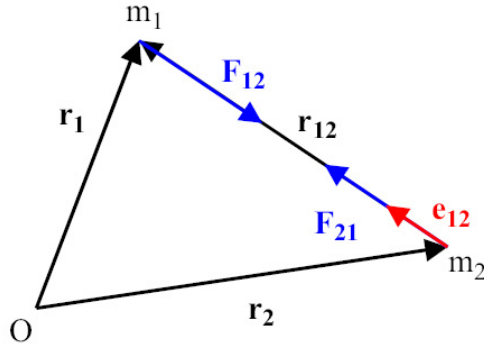
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Wynika stąd, że ruchy w kierunkach x i y są **sprzężone z sobą** (nie są od siebie niezależne).

14.6 Ruch w polu centralnym

Rozważamy problem dwóch cząstek o masach m_1 i m_2 oddziaływujących z sobą za pośrednictwem pola sił centralnych. W ogólnym przypadku mamy do czynienia z układem o 6 stopniach swobody (dwie cząstki poruszające się w trzech wymiarach).

Pokażemy, że problem ten będzie można sprowadzić do problemu jednej cząstki (o masie zredukowanej μ) poruszającej się w płaszczyźnie, czyli do ruchu układu o 2 stopniach swobody.



$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{12} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{e}_{12} &= \mathbf{r}_{12} / r_{12} \\ \mathbf{F}_{12} &= -\mathbf{F}_{21} \end{aligned}$$

Cząstki oddziałują z sobą siłą centralną, co oznacza, że

$$\mathbf{F}_{21} = f(r_{12})\mathbf{e}_{12} . \quad (70)$$

Jest to siła, z jaką cząstka 2. działa na cząstkę 1. Natomiast siła, z jaką cząstka 1. działa na cząstkę 2. wyraża się wzorem

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} . \quad (71)$$

Układ dwóch cząstek.

Problem dwóch cząstek można sprowadzić do problemu jednej cząstki przechodząc do nowych zmiennych. Zamiast wektorów położenia cząstek \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 w laboratoryjnym układzie współrzędnych wprowadzamy wektor położenia środka masy \mathbf{R} i wektor położenia względnego \mathbf{r} . Oznaczmy masy cząstek jako $m_1 = m$ i $m_2 = M$. Wtedy

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{CM} = \frac{m}{m+M}\mathbf{r}_1 + \frac{M}{m+M}\mathbf{r}_2 \quad (72)$$

oraz

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 . \quad (73)$$

Środek masy porusza się ruchem jednostajnym z prędkością $\mathbf{V}_{CM} = \mathbf{const}$, a zatem ruch ten możemy odseparować przechodząc do układu środka masy. Otrzymujemy równanie ruchu względnego

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) , \quad (74)$$

czyli problem jednej cząstki o masie zredukowanej μ i wektorze położenia \mathbf{r} .

Masa zredukowana

$$\mu = \frac{mM}{m+M} .$$

Dla siły centralnej

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}_r , \quad (75)$$

gdzie $r = |\mathbf{r}|$ i $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$.

Całki ruchu dla układu dwóch cząstek w polu centralnym

Dla ruchu w polu centralnym istnieje kilka całek ruchu, wśród których najważniejszymi są:

(1) **energia całkowita** (liczona w układzie środka masy)

$$E = T + U \quad (76)$$

(2) **moment pędu** (względny)

$$\mathbf{J} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} , \quad (77)$$

gdzie $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ jest prędkością względną.

Ad (1)

Zasada zachowania energii wynika z braku pola zewnętrznego.

Ad (2)

Zasada zachowania momentu pędu \mathbf{J} wynika z centralnego charakteru sił

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}_r .$$

Moment siły \mathbf{F}

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = f(r)\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r = 0 . \quad (78)$$

Moment pędu spełnia równanie ruchu

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{N} = 0 , \quad (79)$$

z którego wynika, że

$$\mathbf{J} = \text{const} . \quad (80)$$

Stały momentu pędu $\mathbf{J} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ wyznacza płaszczyznę Π

$$\Pi \perp \mathbf{J} , \quad (81)$$

w której leżą wektory \mathbf{r} i \mathbf{v} , a zatem w tej płaszczyźnie odbywa się ruch względny cząstek.

\implies Ruch układu dwóch cząstek oddziaływujących za pośrednictwem centralnego pola sił jest **ruchem płaskim**.

\implies Do opisu tego ruchu wystarczą dwie współrzędne, np. (x, y) lub (r, φ) .

\implies Rozważany układ posiada dwa stopnie swobody.

Często rozważany jest **ruch w polu grawitacyjnym**.

W tym przypadku siła ma postać

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{e}_r, \quad (82)$$

gdzie G jest **uniwersalną stałą grawitacji**

$$G = 6.6726 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}.$$

Problem ruchu planety w polu grawitacji Słońca wygodnie jest rozwiązywać w tzw. **jednostkach astronomicznych**.

Astronomiczna jednostka długości

$$1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$$

Jest to długość wielkiej półosi orbity Ziemi.

Astronomiczna jednostka czasu

$$1 \text{ yr} = 1 \text{ rok} = 3.15 \times 10^7 \text{ s}$$

Rozwiązujemy numerycznie równanie ruchu

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{e}_r = \mathbf{F} \quad (83)$$

we współrzędnych kartezjańskich x, y . Siła grawitacji $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ posiada następujące składowe:

$$F_x = -\frac{GmMx}{r^3}, \quad (84)$$

$$F_y = -\frac{GmMy}{r^3}. \quad (85)$$

Równania dwuwymiarowego ruchu we współrzędnych kartezjańskich przyjmują postać

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -G(m+M) \frac{x}{r^3}, \quad (86)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -G(m+M) \frac{y}{r^3}. \quad (87)$$

Równania (86) i (87) można całkować numerycznie metodami różnicowymi. Znalezione rozwiązania, czyli

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = (x(t), y(t))$$

$$\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$$

powinny spełniać zasadę zachowania energii, która ma postać

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{GmM}{r} = \text{const} = E_0, \quad (88)$$

gdzie E_0 jest energią początkową dwóch cząstek w układzie środka masy.

Energia E_0 wyznaczona jest przez warunki początkowe

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 ,$$

oraz

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 ,$$

za pomocą związku

$$E_0 = \frac{\mu v_0^2}{2} - \frac{GmM}{r_0} . \quad (89)$$

Dla orbit zamkniętych (elipsa, okrąg)

$$E_0 < 0 \quad \equiv \quad E < 0 .$$

Dla orbit otwartych (parabola, hiperbola)

$$E_0 \geq 0 \quad \equiv \quad E \geq 0 .$$

14.7 Problem spadania na centrum

Rozważmy ruch planety o masie m w polu grawitacyjnym gwiazdy o masie M . Zakładamy, że gwiazda spoczywa, a jej środek jest początkiem układu współrzędnych.

Korzystamy z zasad zachowania energii całkowitej E układu gwiazda-planeta i momentu pędu planety \mathbf{J} .

$$E = T + U = \text{const} \quad (90)$$

gdzie

$$T = \frac{mv^2}{2} , \quad U = -\frac{GmM}{r} ,$$

$$J = mrv_t = \text{const} \quad (91)$$

gdzie $v_t \equiv v_\perp$ jest składową transwersalną (prostopadłą do promienia) prędkości planety (w płaszczyźnie $x - y$).

Prędkość \mathbf{v} planety można rozłożyć na dwie składowe:

- radialną v_r ,
- transwersalną v_t .

$$J = mrv_t \quad (92)$$

stąd otrzymujemy

$$v_t = \frac{J}{mr} . \quad (93)$$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_t^2) = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{J^2}{2mr^2} \quad (94)$$

Drugi wyraz w ostatnim wyrażeniu po prawej stronie równania (94) zależy od odległości planeta-gwiazda i pełni rolę energii potencjalnej. Jest to tzw. **energia odśrodkowa (centryfugalna)**.

$$U_{odsr}(r) = \frac{J^2}{2mr^2} \quad (95)$$

Efektywną energią potencjalną definiujemy jako

$$U_{eff}(r) = U_{odsr}(r) + U(r) = \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r} \quad (96)$$

A zatem

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + U_{eff}(r) \quad (97)$$

Z równania (96) wynika, że dla $J \neq 0$

$$U_{eff}(r \rightarrow 0) \rightarrow +\infty. \quad (98)$$

Własność (98) oznacza, że **spadanie planety na centrum (gwiazdę) nie jest możliwe**.

Funkcja $U_{eff}(r)$ posiada minimum dla $r = r_0$.
Odległość tę wyznaczymy z warunku

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = 0 \quad (99)$$

\implies

$$-\frac{J^2}{mr^3} + \frac{GmM}{r^2} = 0$$

Otrzymujemy stąd promień stabilnej orbity planety

$$r_0 = \frac{J^2}{Gm^2M} \quad (100)$$

Jeżeli $J \rightarrow 0$, to $r_0 \rightarrow 0$, co oznacza możliwość spadania na centrum.

14.8 Przykłady zastosowań

- (1) **układ Słońce–planeta**
- (2) **gwiazda podwójna**

15 Uzupełnienie A: Wyprowadzenie prędkościowej formy algorytmu Verleta

Rozwinięcie w szereg Taylora dla x_{n+1} ma postać

$$x_{n+1} = x_n + v_n h + \frac{1}{2} a_n h^2 + \mathcal{O}(h^3), \quad (101)$$

Do wzoru (101) dodajemy stronami następującą równość:

$$0 = \frac{1}{2} x_{n+1} - \frac{1}{2} x_{n-1}$$

i otrzymujemy

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_{n-1}) - \frac{1}{2}x_{n-1} + x_n - \frac{1}{2}x_{n+1} + a_n h^2 + \mathcal{O}(h^4). \quad (102)$$

Zgodnie ze wzorami (15) i (16) otrzymujemy

$$\frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2} = v_n h + \mathcal{O}(h^3). \quad (103)$$

Można zauważyć, że po ostatnim przekształceniu błąd rośnie o jeden rząd.

Ze wzorów (102) i (103) otrzymujemy

$$x_{n+1} = x_n + v_n h - \frac{1}{2}(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + a_n h^2 + \mathcal{O}(h^3). \quad (104)$$

Przyspieszenie a_n można przybliżyć za pomocą wzoru (18) z dokładnością do $\mathcal{O}(h^2)$ jako

$$a_n = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (105)$$

Podstawiamy (105) do (104) i otrzymujemy

$$x_{n+1} = x_n + v_n h + \frac{1}{2} a_n h^2 + \mathcal{O}(h^3). \quad (106)$$

Można zauważyć, że wzór (106) jest aproksymacją położenia w dowolnym ruchu za pomocą znanego wzoru na położenie w ruchu jednostajnie zmiennym.

Prędkość v_{n+1} przybliżamy za pomocą symetrycznego wzoru różnicowego

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+2} - x_n}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (107)$$

Stosujemy formułę (18) do x_{n+2} i otrzymujemy

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + a_{n+1} h^2 + \mathcal{O}(h^4). \quad (108)$$

Podstawienie (108) do (107) prowadzi do

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n + \frac{1}{2} a_{n+1} h^2}{h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (109)$$

Zgodnie ze wzorem (18)

$$v_{n+1} = \frac{x_n - x_{n-1} + a_n h^2 + \frac{1}{2} a_{n+1} h^2}{h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (110)$$

Podstawiamy teraz za x_{n-1} jego rozwinięcie w szereg Taylora (16) i otrzymujemy

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})h + \mathcal{O}(h^2). \quad (111)$$

Wzory (106) i (111) tworzą **algorytm Verleta w zmodyfikowanej (prędkościowej) postaci**.

16 Uzupełnienie B: Wyprowadzenie algorytmu Beemana-Schofielda

(1) Wyznaczanie położenia

Obliczamy przyspieszenie w chwilach t_n oraz $t_{n\pm 1}$ stosując trójpunktowe przybliżenie drugiej pochodnej:

$$a_n = \frac{x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (112)$$

$$a_{n-1} = \frac{x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (113)$$

$$a_{n+1} = \frac{x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (114)$$

Prędkość obliczamy stosując aproksymację pięciopunktową

$$v_n = \frac{x_{n-2} - 8x_{n-1} + 8x_{n+1} - x_{n+2}}{12h} + \mathcal{O}(h^4). \quad (115)$$

Ze wzoru (115) wynika, że

$$x_{n-2} = 12hv_n + 8x_{n-1} - 8x_{n+1} + x_{n+2} + \mathcal{O}(h^4). \quad (116)$$

Natomiast wzór (114) prowadzi do

$$x_{n+2} = h^2 a_{n+1} - x_n + 2x_{n+1} + \mathcal{O}(h^4), \quad (117)$$

a ze wzoru (113) otrzymujemy

$$x_{n-2} = h^2 a_{n-1} + 2x_{n-1} - x_n + \mathcal{O}(h^4). \quad (118)$$

Podstawiamy teraz (117) do (116) i otrzymujemy

$$x_{n-2} = 12hv_n + 8x_{n-1} - 6x_{n+1} - x_n + h^2 a_{n+1} + \mathcal{O}(h^4). \quad (119)$$

Z przyrównania prawych stron wzorów (118) i (119) otrzymujemy

$$x_{n-1} = x_{n+1} - 2hv_n + \frac{h^2}{6}(a_{n-1} - a_{n+1}) + \mathcal{O}(h^4). \quad (120)$$

Z kolei wzór (112) prowadzi do

$$x_{n-1} = h^2 a_n + 2x_n - x_{n+1} + \mathcal{O}(h^4). \quad (121)$$

Z porównania (120) i (121) wynika, że

$$x_{n+1} = x_n + hv_n + \frac{h^2}{12}(6a_n + a_{n+1} - a_{n-1}) + \mathcal{O}(h^4). \quad (122)$$

Stosując interpolację liniową dla przyspieszenia, czyli

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (123)$$

otrzymujemy

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + \mathcal{O}(h^2). \quad (124)$$

Podstawienie (124) do (122) prowadzi do formuły rekurencyjnej na położenie

$$x_{n+1} = x_n + hv_n + \frac{h^2}{6}(4a_n - a_{n-1}) + \mathcal{O}(h^4). \quad (125)$$

(2) Wyznaczania prędkości

Rozwiązujemy numerycznie równanie

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (126)$$

posługując się metodą Adamsa-Bashfortha. Obliczamy prędkość w jednym kroku czasowym jako

$$v_{n+1} = v_n + \int_{t_n}^{t_n+h} dt a(t). \quad (127)$$

Stosujemy interpolację liniową funkcji $a(t)$

$$a(t) = a_n + \frac{a_n - a_{n-1}}{h}(t - t_n) + \mathcal{O}[(t - t_n)^2], \quad (128)$$

przy czym $t \in [t_n, t_n + h]$.

Obliczamy całkę we wzorze (127)

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_n+h} dt a(t) &= a_n h + \frac{(t - t_n)^2}{2} \Big|_{t_n}^{t_n+h} + \mathcal{O}(h^3) \\ &= a_n h + \frac{h}{2}(a_n - a_{n-1}) + \mathcal{O}(h^3) \\ &= \frac{h}{2}(3a_n - a_{n-1}) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (129)$$

Podstawiamy (129) do (127)

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}(3a_n - a_{n-1}) + \mathcal{O}(h^3). \quad (130)$$

We wzorze (130) przekształcamy drugi wyraz za pomocą (128)

$$2a_n - a_{n-1} = a_{n+1} + \mathcal{O}(h^2) \quad (131)$$

otrzymując

$$\frac{h}{2}(3a_n - a_{n-1}) = \frac{h}{6}(5a_n - a_{n-1} + 2a_{n+1}) + \mathcal{O}(h^3). \quad (132)$$

Ze wzorów (130) i (132) otrzymujemy końcową formułę rekurencyjną na prędkość

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6}(5a_n - a_{n-1} + 2a_{n+1}) + \mathcal{O}(h^3). \quad (133)$$