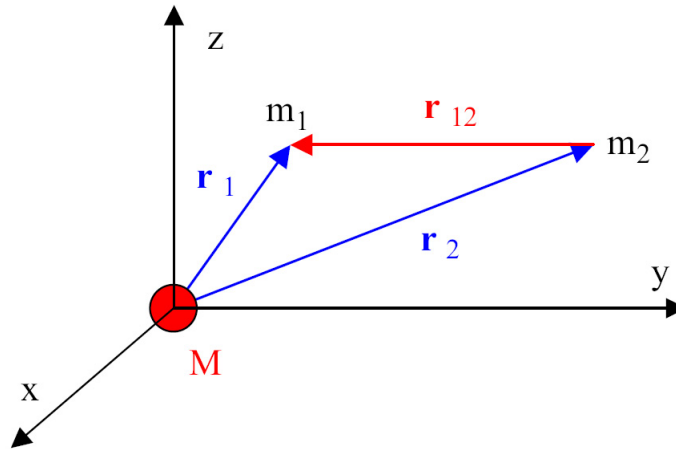


VI.
MINI-UKŁAD PLANETARNY

Janusz Adamowski



1 Wstęp

Zbadamy własności mini-układu planetarnego, czyli **układu złożonego z dwóch planet poruszających się w polu nieruchomej gwiazdy**.

Jest to przykład klasycznego układu o kilku stopniach swobody. Innym przykładem klasycznego układu o kilku stopniach swobody jest układ złożony z **dwóch gwiazd (gwiazdy podwójnej) i jednej planety**.

Przyjmujemy, że mamy do czynienia z układem o **kilku stopniach swobody**, jeżeli liczba f stopni swobody układu $3 \leq f < 10$.

Jeżeli $f \geq 10$, to mamy do czynienia z **układem o dużej liczbie stopni swobody**. Metody obliczeniowe opracowane dla układów o kilku stopniach swobody mogą być uogólnione na układy o dużej liczbie stopni swobody.

2 Mini-układ planetarny

Rozpatrujemy klasyczny układ 3 ciał złożony z gwiazdy i dwóch planet. Zakładamy, że gwiazda o masie M spoczywa w początku układu współrzędnych, a zatem układ ten posiada $f = 6$ stopni swobody. Zakładamy ponadto, że planety i gwiazda oddziałują z sobą siłami grawitacyjnymi, podlegającymi prawu grawitacji Newtona.

Rys. 12.1. Mini-układ planetarny.

Mini-układ planetarny opisany jest za pomocą równań ruchu

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12}, \quad (1)$$

$$m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21}, \quad (2)$$

gdzie siła przyciągania j -tej planety przez gwiazdę dana jest wzorem

$$\mathbf{F}_j = -GM \frac{m_j}{r_j^3} \mathbf{r}_j \quad (j = 1, 2), \quad (3)$$

a siła przyciągania wzajemnego planet

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} . \quad (4)$$

Zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} . \quad (5)$$

Przed rozpoczęciem rozwiązywania równań ruchu przeprowadzimy dyskusję problemu.

- (1) Nie istnieją analityczne rozwiązania równań ruchu (1) i (2). Wynika stąd konieczność ich rozwiązywania numerycznego.
- (2) Siły grawitacyjne są **zachowawcze**, a więc całkowita energia układu jest zachowana, czyli

$$E_{tot} = const .$$

- (3) Siły wewnętrzne działające w układzie są **centralne**, a więc całkowity moment pędu jest zachowany, czyli

$$\mathbf{J}_{tot} = const .$$

- (4) Nie są natomiast zachowane momenty pędu poszczególnych planet 1 i 2. Wynika stąd, że możliwe jest spadanie planet na gwiazdę. Ponadto możliwe są zderzenia planet ze sobą.
- (5) Mini-układ planetarny jest związany, tzn. żadna z planet nie ucieka do nieskończoności, jeżeli

$$E_{tot} < 0 .$$

Ze względu na spełnienie zasady zachowania energii, warunek wiązania układu planetarnego, czyli

$$E_{tot}^0 = E_{tot} = const < 0 \quad (6)$$

określony jest przez **warunki początkowe**, które mają postać

$$\mathbf{r}_{0j} = \mathbf{r}_j(0) , \quad \mathbf{v}_{0j} = \mathbf{v}_j(0) . \quad (7)$$

W celu uproszczenia zapisu równań oraz prezentacji graficznej rozwiązań podam opis mini-układu planetarnego w dwóch wymiarach, czyli dla $f = 4$.

Równania ruchu (1) i (2) mogą być całkowane numerycznie za pomocą dowolnej z poznanych wcześniej metod całkowania równań ruchu. Zastosujemy tutaj najprostszą metodę Eulera. Rozpisujemy równania (1) i (2) na płaszczyźnie $x - y$

$$a_{xj} = -\frac{GM}{r_j^3} x_j - \frac{Gm_{j'}}{r_{12}^3} (x_1 - x_2)(-1)^{j'} \quad (8)$$

$$a_{yj} = -\frac{GM}{r_j^3} y_j - \frac{Gm_{j'}}{r_{12}^3} (y_1 - y_2)(-1)^{j'} , \quad (9)$$

przy czym dla $j = 1, 2$ wskaźnik j' przyjmuje odpowiednio wartości $j' = 2, 1$. Ponadto w równaniach (8) i (9)

$$r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}, \quad r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Przedstawię teraz algorytm rozwiązywania układu równań (8) i (9) metodą Eulera na siatce czasowej zdefiniowanej w przedziale $[t_0, t_{max}]$ jako $t_{n+1} = t_n + h$, gdzie h jest krokiem czasowym, $n = 0, 1, \dots$, a t_{max} jest maksymalną długością rozważanego przedziału czasu.

(0) Zadajemy warunki początkowe dla $t_0 = 0$

$$x_j^0 = x_j(0), \quad y_j^0 = y_j(0), \quad (10)$$

$$v_{xj}^0 = v_{xj}(0), \quad v_{yj}^0 = v_{yj}(0). \quad (11)$$

(1) Podstawiamy

$$x_j = x_j^0, \quad y_j = y_j^0,$$

$$v_{xj} = v_{xj}^0, \quad v_{yj} = v_{yj}^0.$$

(2) Obliczamy przyspieszenia wg wzorów (8) i (9).

(3) Obliczamy położenia i prędkości dla $t_{n+1} = t_n + h$ stosując metodę Eulera, czyli wykonujemy rachunki

$$x_j(t_{n+1}) = x_j(t_n) + hv_{xj}(t_n), \quad (12)$$

$$y_j(t_{n+1}) = y_j(t_n) + hv_{yj}(t_n), \quad (13)$$

$$v_{xj}(t_{n+1}) = v_{xj}(t_n) + ha_{xj}(t_n), \quad (14)$$

$$v_{yj}(t_{n+1}) = v_{yj}(t_n) + ha_{yj}(t_n). \quad (15)$$

(4) Powtarzamy rachunki dla kolejnych t_n zaczynając od punktu (2).

Powyższy schemat obliczeniowy daje nam możliwość numerycznego wyznaczenia trajektorii obu planet, ponadto możemy "doświadczalnie" badać, czy układ jest związany, kiedy następuje zderzenie planet z sobą, a kiedy planeta spada na centrum.

Mini-układ planetarny może wykazywać trzy rodzaje **niestabilności**:

- (1) ucieczka planety do nieskończoności, czyli brak wiązania,
- (2) zderzenie planet z sobą,
- (3) spadanie na centrum (zderzenie planety z gwiazdą), które wynika z niezachowania krętu pojedynczej planety.

Rozważany powyżej mini-układ planetarny można też zastosować do opisu układu planetarnego z kilkoma planetami, jeżeli ruch danej planety zaburza – w sposób istotny – jedynie najbliższa planeta.

W ten sposób dokonane zostało **odkrycie planety Neptun**. Odpowiednie obliczenia wykonali na początku XIX wieku John Couch i Urbain Leverrier. Obliczyli oni zaburzenia trajektorii zaobserwowanego wcześniej Urana.

Wyniki tych obliczeń posłużyły astronomowi niemieckiemu Johannowi Galle do skierowania teleskopu w "odpowiednie" miejsce na niebie, co umożliwiło mu wykonanie pierwszej obserwacji Neptuna (Berlin, 1846).