

POSTULATY MECHANIKI
KWANTOWEJ
W JĘZYKU WEKTORÓW
STANU

Przestrzeń Hilberta

Do opisu stanów kwantowych używamy przestrzeni Hilberta.

Do opisu stanów kwantowych używamy przestrzeni Hilberta.

Przestrzenią Hilberta \mathcal{H} nazywamy przestrzeń wektorową z określonym iloczynem skalarnym i ortonormalną bazą zupełną.

Do opisu stanów kwantowych używamy przestrzeni Hilberta.

Przestrzenią Hilberta \mathcal{H} nazywamy przestrzeń wektorową z określonym iloczynem skalarnym i ortonormalną bazą zupełną.

Uwaga: Wymiar D przestrzeni Hilberta, stosowanych w mechanice kwantowej, jest dowolny, a zatem D może być równe $1, 2, \dots, \infty$.

Wektory stanów układu kwantowego są elementami przestrzeni Hilberta.

Wektory stanów układu kwantowego są elementami przestrzeni Hilberta.

Wektory stanów w notacji Diraca

Wektory stanów układu kwantowego są elementami przestrzeni Hilberta.

Wektory stanów w notacji Diraca

$$|\psi\rangle, |\varphi\rangle, |\chi\rangle, \dots \in \mathcal{H} \quad (1)$$

Wektory stanów układu kwantowego są elementami przestrzeni Hilberta.

Wektory stanów w notacji Diraca

$$|\psi\rangle, |\varphi\rangle, |\chi\rangle, \dots \in \mathcal{H} \quad (1)$$

Iloczyn skalarny

$$\langle\psi|\varphi\rangle = c, \quad (2)$$

gdzie c jest liczbą zespoloną.

Wektory stanów układu kwantowego są elementami przestrzeni Hilberta.

Wektory stanów w notacji Diraca

$$|\psi\rangle, |\varphi\rangle, |\chi\rangle, \dots \in \mathcal{H} \quad (1)$$

Iloczyn skalarny

$$\langle\psi|\varphi\rangle = c, \quad (2)$$

gdzie c jest liczbą zespoloną.

Baza ortonormalna zupełna $\{|i\rangle\}$:

Wektory stanów układu kwantowego są elementami przestrzeni Hilberta.

Wektory stanów w notacji Diraca

$$|\psi\rangle, |\varphi\rangle, |\chi\rangle, \dots \in \mathcal{H} \quad (1)$$

Iloczyn skalarny

$$\langle\psi|\varphi\rangle = c, \quad (2)$$

gdzie c jest liczbą zespoloną.

Baza ortonormalna zupełna $\{|i\rangle\}$:

► ortonormalność

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \quad (3)$$

Wektory stanów układu kwantowego są elementami przestrzeni Hilberta.

Wektory stanów w notacji Diraca

$$|\psi\rangle, |\varphi\rangle, |\chi\rangle, \dots \in \mathcal{H} \quad (1)$$

Iloczyn skalarny

$$\langle\psi|\varphi\rangle = c, \quad (2)$$

gdzie c jest liczbą zespoloną.

Baza ortonormalna zupełna $\{|i\rangle\}$:

▶ ortonormalność

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \quad (3)$$

▶ zupełność

$$\sum_{i=1}^D |i\rangle\langle i| = \mathbf{1} \quad (4)$$

Rozwinięcie dowolnego wektora $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ w bazie ortonormalnej
zupełnej

Rozwinięcie dowolnego wektora $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ w bazie ortonormalnej zupełnej

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^D c_i |i\rangle \quad (5)$$

Przestrzeń współrzędnych cząstek

Operator położenia pojedynczej cząstki

Operator położenia pojedynczej cząstki

$$\hat{\mathbf{r}} \equiv (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z) \quad (6)$$

Operator położenia pojedynczej cząstki

$$\hat{\mathbf{r}} \equiv (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z) \quad (6)$$

Wektor położenia cząstki $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Operator położenia pojedynczej cząstki

$$\hat{\mathbf{r}} \equiv (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z) \quad (6)$$

Wektor położenia cząstki $\mathbf{r} = (x, y, z)$.
Równanie własne operatora położenia

Operator położenia pojedynczej cząstki

$$\hat{\mathbf{r}} \equiv (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z) \quad (6)$$

Wektor położenia cząstki $\mathbf{r} = (x, y, z)$.
Równanie własne operatora położenia

$$\hat{\mathbf{r}}|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}|\mathbf{r}\rangle \quad (7)$$

Warunek ortonormalności bazy wektorów własnych operatora położenia

Warunek ortonormalności bazy wektorów własnych operatora położenia

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{r}' \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8)$$

Warunek ortonormalności bazy wektorów własnych operatora położenia

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{r}' \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8)$$

$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ = delta Diraca

Funkcja falowa

Funkcją falową pojedynczej cząstki w stanie kwantowym α nazywamy funkcję zespoloną zdefiniowaną jako

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) \stackrel{def}{=} \langle \mathbf{r} | \psi_\alpha \rangle . \quad (9)$$

Funkcją falową pojedynczej cząstki w stanie kwantowym α nazywamy funkcję zespoloną zdefiniowaną jako

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) \stackrel{def}{=} \langle \mathbf{r} | \psi_\alpha \rangle . \quad (9)$$

Zbiór funkcji falowych $\{\psi_\alpha(\mathbf{r})\}$ z iloczynem skalarnym określonym za pomocą operacji całkowania po całej przestrzeni

Funkcją falową pojedynczej cząstki w stanie kwantowym α nazywamy funkcję zespoloną zdefiniowaną jako

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) \stackrel{def}{=} \langle \mathbf{r} | \psi_\alpha \rangle . \quad (9)$$

Zbiór funkcji falowych $\{\psi_\alpha(\mathbf{r})\}$ z iloczynem skalarnym określonym za pomocą operacji całkowania po całej przestrzeni

$$\int d^3r \psi_\alpha^*(\mathbf{r}) \psi_\beta(\mathbf{r}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (10)$$

Funkcją falową pojedynczej cząstki w stanie kwantowym α nazywamy funkcję zespoloną zdefiniowaną jako

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}) \stackrel{def}{=} \langle \mathbf{r} | \psi_\alpha \rangle . \quad (9)$$

Zbiór funkcji falowych $\{\psi_\alpha(\mathbf{r})\}$ z iloczynem skalarnym określonym za pomocą operacji całkowania po całej przestrzeni

$$\int d^3r \psi_\alpha^*(\mathbf{r}) \psi_\beta(\mathbf{r}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (10)$$

tworzy **funkcyjną przestrzeń Hilberta** \mathcal{F} .

Sens matematyczny funkcji falowej

Sens matematyczny funkcji falowej

Rozwinięcie dowolnego stanu kwantowego $|\alpha\rangle$ pojedynczej cząstki w bazie $|\mathbf{r}\rangle$

Sens matematyczny funkcji falowej

Rozwinięcie dowolnego stanu kwantowego $|\alpha\rangle$ pojedynczej cząstki w bazie $|\mathbf{r}\rangle$

$$|\alpha\rangle = \int d^3r \psi_\alpha(\mathbf{r})|\mathbf{r}\rangle . \quad (11)$$

Sens matematyczny funkcji falowej

Rozwinięcie dowolnego stanu kwantowego $|\alpha\rangle$ pojedynczej cząstki w bazie $|\mathbf{r}\rangle$

$$|\alpha\rangle = \int d^3r \psi_\alpha(\mathbf{r})|\mathbf{r}\rangle . \quad (11)$$

\implies Funkcja falowa cząstki $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ jest **współczynnikiem rozwinięcia (amplitudą)** stanu kwantowego $|\alpha\rangle$ w bazie stanów własnych $|\mathbf{r}\rangle$ operatora położenia cząstki.

Interpretacja fizyczna funkcji falowej

Interpretacja fizyczna funkcji falowej

Funkcja falowa $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ jest **amplitudą gęstości prawdopodobieństwa** znalezienia cząstki w stanie kwantowym $|\psi_\alpha\rangle$ w położeniu \mathbf{r} .

Interpretacja fizyczna funkcji falowej

Funkcja falowa $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ jest **amplitudą gęstości prawdopodobieństwa** znalezienia cząstki w stanie kwantowym $|\psi_\alpha\rangle$ w położeniu \mathbf{r} .

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w stanie kwantowym $|\psi_\alpha\rangle$ w położeniu \mathbf{r}

Interpretacja fizyczna funkcji falowej

Funkcja falowa $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ jest **amplitudą gęstości prawdopodobieństwa** znalezienia cząstki w stanie kwantowym $|\psi_\alpha\rangle$ w położeniu \mathbf{r} .

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w stanie kwantowym $|\psi_\alpha\rangle$ w położeniu \mathbf{r}

$$\varrho_\alpha(\mathbf{r}) = |\psi_\alpha(\mathbf{r})|^2. \quad (12)$$

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie kwantowym α w części przestrzeni o objętości Ω

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie kwantowym α w części przestrzeni o objętości Ω

$$P_\alpha(\Omega) = \int_{\Omega} d^3r |\psi_\alpha(\mathbf{r})|^2 . \quad (13)$$

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie kwantowym α w części przestrzeni o objętości Ω

$$P_\alpha(\Omega) = \int_{\Omega} d^3r |\psi_\alpha(\mathbf{r})|^2 . \quad (13)$$

Warunek unormowania funkcji falowej

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie kwantowym α w części przestrzeni o objętości Ω

$$P_\alpha(\Omega) = \int_{\Omega} d^3r |\psi_\alpha(\mathbf{r})|^2 . \quad (13)$$

Warunek unormowania funkcji falowej

$$\int d^3r |\psi_\alpha(\mathbf{r})|^2 = 1 , \quad (14)$$

gdzie całkowanie wykonujemy po całej przestrzeni.

Funkcja falowa układu wielu cząstek

Funkcja falowa układu wielu cząstek

(1) Współrzędne uogólnione

Funkcja falowa układu wielu cząstek

(1) Współrzędne uogólnione

Funkcja falowa układu cząstek o f stopniach swobody zależy od f współrzędnych uogólnionych $q = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

Funkcja falowa układu wielu cząstek

(1) Współrzędne uogólnione

Funkcja falowa układu cząstek o f stopniach swobody zależy od f współrzędnych uogólnionych $q = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

$$\psi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_f) = \langle q_1, q_2, \dots, q_f | \psi_\alpha \rangle . \quad (15)$$

Funkcja falowa układu wielu cząstek

(1) Współrzędne uogólnione

Funkcja falowa układu cząstek o f stopniach swobody zależy od f współrzędnych uogólnionych $q = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

$$\psi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_f) = \langle q_1, q_2, \dots, q_f | \psi_\alpha \rangle . \quad (15)$$

W zapisie skróconym

$$\psi_\alpha(q) = \langle q | \psi_\alpha \rangle \quad (16)$$

Funkcja falowa układu wielu cząstek

(1) Współrzędne uogólnione

Funkcja falowa układu cząstek o f stopniach swobody zależy od f współrzędnych uogólnionych $q = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

$$\psi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_f) = \langle q_1, q_2, \dots, q_f | \psi_\alpha \rangle . \quad (15)$$

W zapisie skróconym

$$\psi_\alpha(q) = \langle q | \psi_\alpha \rangle \quad (16)$$

(2) Współrzędne kartezjańskie

Funkcja falowa układu wielu cząstek

(1) Współrzędne uogólnione

Funkcja falowa układu cząstek o f stopniach swobody zależy od f współrzędnych uogólnionych $q = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

$$\psi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_f) = \langle q_1, q_2, \dots, q_f | \psi_\alpha \rangle . \quad (15)$$

W zapisie skróconym

$$\psi_\alpha(q) = \langle q | \psi_\alpha \rangle \quad (16)$$

(2) Współrzędne kartezjańskie

Układ N cząstek posiada $3N$ stopni swobody, którym odpowiadają współrzędne kartezjańskie $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$.

Funkcja falowa układu wielu cząstek

(1) Współrzędne uogólnione

Funkcja falowa układu cząstek o f stopniach swobody zależy od f współrzędnych uogólnionych $q = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

$$\psi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_f) = \langle q_1, q_2, \dots, q_f | \psi_\alpha \rangle . \quad (15)$$

W zapisie skróconym

$$\psi_\alpha(q) = \langle q | \psi_\alpha \rangle \quad (16)$$

(2) Współrzędne kartezjańskie

Układ N cząstek posiada $3N$ stopni swobody, którym odpowiadają współrzędne kartezjańskie $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$. Funkcja falowa układu N cząstek

Funkcja falowa układu wielu cząstek

(1) Współrzędne uogólnione

Funkcja falowa układu cząstek o f stopniach swobody zależy od f współrzędnych uogólnionych $q = (q_1, q_2, \dots, q_f)$

$$\psi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_f) = \langle q_1, q_2, \dots, q_f | \psi_\alpha \rangle. \quad (15)$$

W zapisie skróconym

$$\psi_\alpha(q) = \langle q | \psi_\alpha \rangle \quad (16)$$

(2) Współrzędne kartezjańskie

Układ N cząstek posiada $3N$ stopni swobody, którym odpowiadają współrzędne kartezjańskie $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$. Funkcja falowa układu N cząstek

$$\psi_\alpha(r) = \psi_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \langle r | \psi_\alpha \rangle \quad (17)$$

Wektor stanu układu złożonego

Wektor stanu układu złożonego

Jeżeli układ fizyczny \mathcal{U} złożony jest z N podukładów u_j , ($j = 1, 2, \dots, N$) znajdujących się w stanach kwantowych $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$, to przestrzeń Hilberta \mathcal{H} układu \mathcal{U} jest iloczynem tensorowym przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_N$ podukładów u_j .

Wektor stanu układu złożonego

Jeżeli układ fizyczny \mathcal{U} złożony jest z N podukładów u_j , ($j = 1, 2, \dots, N$) znajdujących się w stanach kwantowych $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$, to przestrzeń Hilberta \mathcal{H} układu \mathcal{U} jest iloczynem tensorowym przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_N$ podukładów u_j .

Inaczej: Jeżeli podukłady u_1, u_2, \dots, u_N znajdują się odpowiednio w stanach kwantowych $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_N\rangle$, to stan kwantowy $|\Psi\rangle$ złożonego układu fizycznego \mathcal{U} jest iloczynem tensorowym

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle . \quad (18)$$

Wektor stanu układu złożonego

Jeżeli układ fizyczny \mathcal{U} złożony jest z N podukładów u_j , ($j = 1, 2, \dots, N$) znajdujących się w stanach kwantowych $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$, to przestrzeń Hilberta \mathcal{H} układu \mathcal{U} jest iloczynem tensorowym przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_N$ podukładów u_j .

Inaczej: Jeżeli podukłady u_1, u_2, \dots, u_N znajdują się odpowiednio w stanach kwantowych $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_N\rangle$, to stan kwantowy $|\Psi\rangle$ złożonego układu fizycznego \mathcal{U} jest iloczynem tensorowym

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle. \quad (18)$$

Oznacza to, że stan kwantowy $|\Psi\rangle$ złożonego układu fizycznego zbudowany jest ze wszystkich stanów α wszystkich podukładów u_j , czyli ze stanów $|\psi_{j,\alpha}\rangle$.

Liczba stanów podukładów użytych do konstrukcji stanu $|\Psi\rangle$ jest równa ND , gdzie D jest wymiarem przestrzeni Hilberta podukładu (zakładamy, że D jest jednakowe dla każdego podukładu u_j).

Postulaty mechaniki kwantowej

Prawa mechaniki kwantowej są formułowane w postaci **postulatów**, których spełnienie **postulujemy** i które **nie są wyprowadzalne** z żadnych innych bardziej podstawowych praw.

Prawa mechaniki kwantowej są formułowane w postaci **postulatów**, których spełnienie **postulujemy** i które **nie są wyprowadzalne** z żadnych innych bardziej podstawowych praw.

Słuszność postulatów mechaniki kwantowej opiera się na zgodności z doświadczeniem wniosków i wyników ilościowych z nich wynikających.

Prawa mechaniki kwantowej są formułowane w postaci **postulatów**, których spełnienie **postulujemy** i które **nie są wyprowadzalne** z żadnych innych bardziej podstawowych praw.

Słuszność postulatów mechaniki kwantowej opiera się na zgodności z doświadczeniem wniosków i wyników ilościowych z nich wynikających.

W takim podejściu odnajdujemy analogię z wprowadzeniem równań ruchu mechaniki klasycznej, których także nie da się wyprowadzić z innych bardziej fundamentalnych zasad.

Prawa mechaniki kwantowej są formułowane w postaci **postulatów**, których spełnienie **postulujemy** i które **nie są wyprowadzalne** z żadnych innych bardziej podstawowych praw.

Słuszność postulatów mechaniki kwantowej opiera się na zgodności z doświadczeniem wniosków i wyników ilościowych z nich wynikających.

W takim podejściu odnajdujemy analogię z wprowadzeniem równań ruchu mechaniki klasycznej, których także nie da się wyprowadzić z innych bardziej fundamentalnych zasad.

Oznacza to, że równania ruchu Newtona są **postulatami mechaniki klasycznej**.

Postulat 0

Postulat 0

Niektórzy autorzy przyjmują sposób konstrukcji wektora stanu złożonego układu fizycznego [por. wzór (18)] za jeden z postulatów mechaniki kwantowej.

Postulat 0

Niektórzy autorzy przyjmują sposób konstrukcji wektora stanu złożonego układu fizycznego [por. wzór (18)] za jeden z postulatów mechaniki kwantowej.

W wykładzie tym proponuję, aby wzór (18) był **zerowym postulatem** mechaniki kwantowej.

Postulat 0

Postulat 0

Przestrzeń Hilberta wektorów stanu układu \mathcal{U} złożonego z podukładów u_j znajdujących się w stanach $|\psi_j\rangle$ ($j = 1, \dots, N$) jest iloczynem tensorowym podprzestrzeni Hilberta podukładów u_j ,

Postulat 0

Przestrzeń Hilberta wektorów stanu układu \mathcal{U} złożonego z podukładów u_j znajdujących się w stanach $|\psi_j\rangle$ ($j = 1, \dots, N$) jest iloczynem tensorowym podprzestrzeni Hilberta podukładów u_j , co można zapisać jako

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle, \quad (19)$$

Postulat 0

Przestrzeń Hilberta wektorów stanu układu \mathcal{U} złożonego z podukładów u_j znajdujących się w stanach $|\psi_j\rangle$ ($j = 1, \dots, N$) jest iloczynem tensorowym podprzestrzeni Hilberta podukładów u_j , co można zapisać jako

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle, \quad (19)$$

gdzie $|\Psi\rangle$ jest wektorem stanu układu \mathcal{U} .

Postulat I

Postulat I

Każdy układ fizyczny jest całkowicie opisany przez **unormowany wektor stanu** $|\psi(t)\rangle$ należący do przestrzeni Hilberta \mathcal{H} wektorów stanu układu.

Postulat I

Każdy układ fizyczny jest całkowicie opisany przez **unormowany wektor stanu** $|\psi(t)\rangle$ należący do przestrzeni Hilberta \mathcal{H} wektorów stanu układu.

Równoważny opis zapewnia znajomość **funkcji falowej** układu

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi(t) \rangle \in \mathcal{F}, \quad (20)$$

która odpowiada wektorowi $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$.

Postulat I

Każdy układ fizyczny jest całkowicie opisany przez **unormowany wektor stanu** $|\psi(t)\rangle$ należący do przestrzeni Hilberta \mathcal{H} wektorów stanu układu.

Równoważny opis zapewnia znajomość **funkcji falowej** układu

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi(t) \rangle \in \mathcal{F}, \quad (20)$$

która odpowiada wektorowi $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$.

Uwaga: Wektor stanu zależy od czasu t .

Opis całkowity oznacza, że każdą dostępną informację dotyczącą układu fizycznego można otrzymać znając wektor stanu $|\psi(t)\rangle$ (funkcję falową $\psi(q, t)$) za pomocą reguł podanych w kolejnych postulatach.

Interpretacja fizyczna wielocząstkowej funkcji falowej

Interpretacja fizyczna wielocząstkowej funkcji falowej

Jeżeli układ fizyczny jest złożony z N jednakowych cząstek, które w chwili t znajdują się w położeniach $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$, to N -cząstkowa funkcja falowa $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ pozwala na wyznaczenie **gęstości prawdopodobieństwa**

Interpretacja fizyczna wielocząstkowej funkcji falowej

Jeżeli układ fizyczny jest złożony z N jednakowych cząstek, które w chwili t znajdują się w położeniach $r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$, to N -cząstkowa funkcja falowa $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ pozwala na wyznaczenie **gęstości prawdopodobieństwa**

$$\rho_\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)|^2 . \quad (21)$$

Wyznaczamy stąd prawdopodobieństwo znalezienia układu w stanie kwantowym $|\psi\rangle$ z położeniami cząstek zawartych w przedziałach

$$[x_1, x_1 + dx_1], [y_1, y_1 + dy_1], [z_1, z_1 + dz_1], [x_2, x_2 + dx_2], \dots$$

jako

$$dP_{\psi,t} = |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)|^2 d^3r_1 d^3r_2 \dots d^3r_N, \quad (22)$$

przy czym

$$\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2), \dots, \mathbf{r}_N = (x_N, y_N, z_N).$$

Unormowanie wektora stanu

Unormowanie wektora stanu

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1 \quad \forall t. \quad (23)$$

Unormowanie wektora stanu

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1 \quad \forall t. \quad (23)$$

Unormowanie funkcji falowej

Unormowanie wektora stanu

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1 \quad \forall t. \quad (23)$$

Unormowanie funkcji falowej

$$\int dr |\psi(r, t)|^2 = 1 \quad \forall t, \quad (24)$$

Unormowanie wektora stanu

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1 \quad \forall t. \quad (23)$$

Unormowanie funkcji falowej

$$\int dr |\psi(r, t)|^2 = 1 \quad \forall t, \quad (24)$$

gdzie całkujemy po całej $3N$ -wymiarowej przestrzeni.

Faza funkcji falowej

Faza funkcji falowej

(1) Faza globalna

Faza funkcji falowej

(1) Faza globalna

Jeżeli dokonamy następującej transformacji funkcji falowej,

$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi e^{i\Theta} , \quad (25)$$

Faza funkcji falowej

(1) Faza globalna

Jeżeli dokonamy następującej transformacji funkcji falowej,

$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi e^{i\Theta} , \quad (25)$$

gdzie Θ jest liczba rzeczywista, to

Faza funkcji falowej

(1) Faza globalna

Jeżeli dokonamy następującej transformacji funkcji falowej,

$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi e^{i\Theta}, \quad (25)$$

gdzie Θ jest liczbą rzeczywistą, to

$$\varrho_{\psi'} = |\psi'|^2 = |\psi|^2 |e^{i\Theta}|^2 = |\psi|^2 = \varrho_{\psi}. \quad (26)$$

Faza funkcji falowej

(1) Faza globalna

Jeżeli dokonamy następującej transformacji funkcji falowej,

$$\psi \longrightarrow \psi' = \psi e^{i\Theta}, \quad (25)$$

gdzie Θ jest liczba rzeczywista, to

$$\varrho_{\psi'} = |\psi'|^2 = |\psi|^2 |e^{i\Theta}|^2 = |\psi|^2 = \varrho_{\psi}. \quad (26)$$

\implies Pomnożenie funkcji falowej przez **czynnik fazowy** $e^{i\Theta}$ nie zmienia gęstości prawdopodobieństwa.

\implies Funkcja falowa określona jest z dokładnością do czynnika fazowego $e^{i\Theta}$, przy czym Θ nazywamy **fazą globalną** funkcji falowej.

\implies Funkcja falowa określona jest z dokładnością do czynnika fazowego $e^{i\Theta}$, przy czym Θ nazywamy **fazą globalną** funkcji falowej.

Transformacja (25) nie powoduje żadnych zmian własności fizycznych układu.

\implies Funkcja falowa określona jest z dokładnością do czynnika fazowego $e^{i\Theta}$, przy czym Θ nazywamy **fazą globalną** funkcji falowej.

Transformacja (25) nie powoduje żadnych zmian własności fizycznych układu.

W szczególności nie ulega zmianie wartość oczekiwana operatora $\hat{\Omega}$, która jest wynikiem pomiaru (Postulat III).

\implies Funkcja falowa określona jest z dokładnością do czynnika fazowego $e^{i\Theta}$, przy czym Θ nazywamy **fazą globalną** funkcji falowej.

Transformacja (25) nie powoduje żadnych zmian własności fizycznych układu.

W szczególności nie ulega zmianie wartość oczekiwana operatora $\hat{\Omega}$, która jest wynikiem pomiaru (Postulat III).

$$\langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle = \langle \psi' | \hat{\Omega} | \psi' \rangle = \langle \psi e^{-i\Theta} | \hat{\Omega} | \psi e^{i\Theta} \rangle = \langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle . \quad (27)$$

(2) Faza względna

(2) Faza względna

Przykład

(2) Faza względna

Przykład

Rozważmy unormowany stan kwantowy w postaci

(2) Faza względna

Przykład

Rozważmy unormowany stan kwantowy w postaci

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}|1\rangle. \quad (28)$$

(2) Faza względna

Przykład

Rozważmy unormowany stan kwantowy w postaci

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}|1\rangle. \quad (28)$$

We wzorze (28) występuje **czynnik fazowy** $e^{i\theta}$ z **fazą względną** θ .

(2) Faza względna

Przykład

Rozważmy unormowany stan kwantowy w postaci

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}|1\rangle. \quad (28)$$

We wzorze (28) występuje **czynnik fazowy** $e^{i\theta}$ z **fazą względną** θ .

Obliczmy wartość oczekiwaną operatora hermitowskiego $\hat{\Omega}$ w stanie (28).

(2) Faza względna

Przykład

Rozważmy unormowany stan kwantowy w postaci

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}|1\rangle. \quad (28)$$

We wzorze (28) występuje **czynnik fazowy $e^{i\theta}$ z fazą względną θ** .

Obliczmy wartość oczekiwaną operatora hermitowskiego $\hat{\Omega}$ w stanie (28).

$$\langle\psi|\hat{\Omega}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle 0|\hat{\Omega}|0\rangle + \frac{1}{2}\langle 1|\hat{\Omega}|1\rangle + \text{Re}(e^{i\theta})\langle 0|\hat{\Omega}|1\rangle \quad (29)$$

Obliczmy wartość oczekiwaną (29) dla $\theta = 0$ (wtedy $e^{i\theta} = +1$) oraz dla $\theta = \pi$ (wtedy $e^{i\theta} = -1$).

Obliczmy wartość oczekiwaną (29) dla $\theta = 0$ (wtedy $e^{i\theta} = +1$) oraz dla $\theta = \pi$ (wtedy $e^{i\theta} = -1$). Otrzymujemy

$$\langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{\Omega} | 0 \rangle + \frac{1}{2} \langle 1 | \hat{\Omega} | 1 \rangle \pm \langle 0 | \hat{\Omega} | 1 \rangle \quad (30)$$

Obliczmy wartość oczekiwaną (29) dla $\theta = 0$ (wtedy $e^{i\theta} = +1$) oraz dla $\theta = \pi$ (wtedy $e^{i\theta} = -1$). Otrzymujemy

$$\langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{\Omega} | 0 \rangle + \frac{1}{2} \langle 1 | \hat{\Omega} | 1 \rangle \pm \langle 0 | \hat{\Omega} | 1 \rangle \quad (30)$$

\implies Wartość oczekiwana operatora $\hat{\Omega}$, czyli wynik pomiaru, zależy od fazy względnej stanów bazy.

Postulat II

Postulat II

Każdej wielkości fizycznej Ω przyporządkowany jest pewien operator hermitowski $\hat{\Omega}$ określony w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} wektorów stanu $|\psi(t)\rangle$ (lub w przestrzeni \mathcal{F} funkcji falowych $\psi(q, t)$).

Postulat II

Każdej wielkości fizycznej Ω przyporządkowany jest pewien operator hermitowski $\hat{\Omega}$ określony w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} wektorów stanu $|\psi(t)\rangle$ (lub w przestrzeni \mathcal{F} funkcji falowych $\psi(q, t)$).

$$\Omega \longrightarrow \hat{\Omega} \tag{31}$$

Przypomnienie

Przypomnienie

Definicja operatora sprzężonego po hermitowsku

$$\langle \hat{\Omega}^\dagger \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{\Omega} \psi \rangle \quad (32)$$

Przypomnienie

Definicja operatora sprzężonego po hermitowsku

$$\langle \hat{\Omega}^\dagger \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{\Omega} \psi \rangle \quad (32)$$

Definicja operatora hermitowskiego

$$\hat{\Omega}^\dagger = \hat{\Omega} \quad (33)$$

Przypomnienie

Definicja operatora sprzężonego po hermitowsku

$$\langle \hat{\Omega}^\dagger \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{\Omega} \psi \rangle \quad (32)$$

Definicja operatora hermitowskiego

$$\hat{\Omega}^\dagger = \hat{\Omega} \quad (33)$$

Zgodnie z definicją (32) elementy macierzowe operatora hermitowskiego posiadają własność

$$\langle \varphi | \hat{\Omega} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{\Omega} | \varphi \rangle^* . \quad (34)$$

Przypomnienie

Definicja operatora sprzężonego po hermitowsku

$$\langle \widehat{\Omega}^\dagger \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \widehat{\Omega} \psi \rangle \quad (32)$$

Definicja operatora hermitowskiego

$$\widehat{\Omega}^\dagger = \widehat{\Omega} \quad (33)$$

Zgodnie z definicją (32) elementy macierzowe operatora hermitowskiego posiadają własność

$$\langle \varphi | \widehat{\Omega} | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{\Omega} | \varphi \rangle^* . \quad (34)$$

Jeżeli $|\varphi\rangle = |\psi\rangle$, to z własności (34) wynika, że wartości oczekiwane operatora hermitowskiego są rzeczywiste

$$\langle \psi | \widehat{\Omega} | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{\Omega} | \psi \rangle^* . \quad (35)$$

Przyporządkowania wielkościom fizycznym operatorów dokonujemy za pomocą **reguł kwantowania**.

Przykłady reguł kwantowania

Przykłady reguł kwantowania

wielkość fizyczna

operator

Przykłady reguł kwantowania

wielkość fizyczna

$x =$ współrzędna x -owa cząstki

operator

$\hat{x} = x$

Przykłady reguł kwantowania

wielkość fizyczna

operator

x = współrzędna x -owa cząstki

$\hat{x} = x$

$\vec{r} = (x, y, z)$ = wektor położenia cząstki

$\hat{\vec{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z)$

Przykłady reguł kwantowania

wielkość fizyczna

x = współrzędna x -owa cząstki

$\vec{r} = (x, y, z)$ = wektor położenia cząstki

p_x = składowa x -owa pędu cząstki

operator

$$\hat{x} = x$$

$$\hat{\vec{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z)$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Przykłady reguł kwantowania

wielkość fizyczna

x = współrzędna x -owa cząstki

$\vec{r} = (x, y, z)$ = wektor położenia cząstki

p_x = składowa x -owa pędu cząstki

$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ = wektor pędu cząstki

operator

$$\hat{x} = x$$

$$\hat{\vec{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z)$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{\vec{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z) = -i\hbar \nabla$$

Przykłady reguł kwantowania

wielkość fizyczna

x = współrzędna x -owa cząstki

$\vec{r} = (x, y, z)$ = wektor położenia cząstki

p_x = składowa x -owa pędu cząstki

$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ = wektor pędu cząstki

$E_{total} = H$ = energia całkowita cząstki

operator

$\hat{x} = x$

$\hat{\vec{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z)$

$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$\hat{\vec{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z) = -i\hbar \nabla$

operator Hamiltona

Przykłady reguł kwantowania

wielkość fizyczna

x = współrzędna x -owa cząstki

$\vec{r} = (x, y, z)$ = wektor położenia cząstki

p_x = składowa x -owa pędu cząstki

$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ = wektor pędu cząstki

$E_{total} = H$ = energia całkowita cząstki

(funkcja Hamiltona)

operator

$\hat{x} = x$

$\hat{\vec{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z)$

$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$\hat{\vec{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z) = -i\hbar \nabla$

operator Hamiltona

(hamiltonian)

Przykłady reguł kwantowania

wielkość fizyczna

x = współrzędna x -owa cząstki

$\vec{r} = (x, y, z)$ = wektor położenia cząstki

p_x = składowa x -owa pędu cząstki

$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ = wektor pędu cząstki

$E_{total} = H$ = energia całkowita cząstki

(funkcja Hamiltona)

$$H = T + U$$

operator

$$\hat{x} = x$$

$$\hat{\vec{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (x, y, z)$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{\vec{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z) = -i\hbar \nabla$$

operator Hamiltona

(hamiltonian)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \hat{U}(\mathbf{r})$$

Postulat III

Postulat III(A)

Pomiar w stanie własnym

Postulat III(A) Pomiar w stanie własnym

Jeżeli układ fizyczny znajduje się w stanie kwantowym $|\alpha\rangle$ będącym stanem własnym operatora $\hat{\Omega}$, to jedynym możliwym wynikiem pomiaru wielkości fizycznej Ω jest **jedna z wartości własnych** operatora $\hat{\Omega}$.

Postulat III(A) jest słuszny dla układu fizycznego znajdującego się w **stanie własnym** operatora $\hat{\Omega}$.

Postulat III(A) jest słuszny dla układu fizycznego znajdującego się w **stanie własnym** operatora $\hat{\Omega}$. Spełnione jest wtedy **równanie własne**

Postulat III(A) jest słuszny dla układu fizycznego znajdującego się w **stanie własnym** operatora $\hat{\Omega}$. Spełnione jest wtedy **równanie własne**

$$\hat{\Omega}|\alpha\rangle = \omega_\alpha|\alpha\rangle \quad (36)$$

Postulat III(A) jest słuszny dla układu fizycznego znajdującego się w **stanie własnym** operatora $\hat{\Omega}$. Spełnione jest wtedy **równanie własne**

$$\hat{\Omega}|\alpha\rangle = \omega_\alpha|\alpha\rangle \quad (36)$$

$\hat{\Omega}$ = operator hermitowski odpowiadający wielkości fizycznej $\hat{\Omega}$

Postulat III(A) jest słuszny dla układu fizycznego znajdującego się w **stanie własnym** operatora $\hat{\Omega}$. Spełnione jest wtedy **równanie własne**

$$\hat{\Omega}|\alpha\rangle = \omega_\alpha|\alpha\rangle \quad (36)$$

$\hat{\Omega}$ = operator hermitowski odpowiadający wielkości fizycznej $\hat{\Omega}$
 $|\alpha\rangle$ = wektor własny operatora $\hat{\Omega}$, przy czym $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$

Postulat III(A) jest słuszny dla układu fizycznego znajdującego się w **stanie własnym** operatora $\hat{\Omega}$. Spełnione jest wtedy **równanie własne**

$$\hat{\Omega}|\alpha\rangle = \omega_\alpha|\alpha\rangle \quad (36)$$

$\hat{\Omega}$ = operator hermitowski odpowiadający wielkości fizycznej $\hat{\Omega}$
 $|\alpha\rangle$ = wektor własny operatora $\hat{\Omega}$, przy czym $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$
 ω_α = wartość własna operatora $\hat{\Omega}$ (liczba rzeczywista, którą wyznaczamy jako wynik pomiaru)

Uwaga

Uwaga

Mierząc wielkość fizyczną Ω w stanie własnym operatora $\hat{\Omega}$ **zawsze** otrzymamy jako wynik pomiaru dokładnie określoną wartość własną ω_α .

Uwaga

Mierząc wielkość fizyczną Ω w stanie własnym operatora $\hat{\Omega}$ **zawsze** otrzymamy jako wynik pomiaru dokładnie określoną wartość własną ω_α .

\implies Prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru wartości własnej ω_α jest równe 1.

Wnioski z postulatu III(A)

Wnioski z postulatu III(A)

Wektory własne $|\alpha\rangle$ tworzą **bazę ortonormalną zupełną** w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} wektorów stanu rozważanego układu fizycznego.

Wnioski z postulatu III(A)

Wektory własne $|\alpha\rangle$ tworzą **bazę ortonormalną zupełną** w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} wektorów stanu rozważanego układu fizycznego.

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{ortonormalność} \quad (37)$$

Wnioski z postulatu III(A)

Wektory własne $|\alpha\rangle$ tworzą **bazę ortonormalną zupełną** w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} wektorów stanu rozważanego układu fizycznego.

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{ortonormalność} \quad (37)$$

$$\sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbf{1} \quad \text{zupełność} \quad (38)$$

Jeżeli $|\psi\rangle$ jest dowolnym wektorem stanu należącym do przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , to wektor ten można rozwinąć w bazie stanów własnych $\{|\alpha\rangle\}$ w sposób następujący:

Jeżeli $|\psi\rangle$ jest dowolnym wektorem stanu należącym do przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , to wektor ten można rozwinąć w bazie stanów własnych $\{|\alpha\rangle\}$ w sposób następujący:

$$|\psi\rangle = \mathbf{1}|\psi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha\psi}|\alpha\rangle, \quad (39)$$

Jeżeli $|\psi\rangle$ jest dowolnym wektorem stanu należącym do przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , to wektor ten można rozwinąć w bazie stanów własnych $\{|\alpha\rangle\}$ w sposób następujący:

$$|\psi\rangle = \mathbf{1}|\psi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha\psi}|\alpha\rangle, \quad (39)$$

gdzie współczynnik rozwinięcia $c_{\alpha\psi} = \langle\alpha|\psi\rangle$ można interpretować jako amplitudę prawdopodobieństwa wystąpienia stanu bazy α w rozwinięciu dowolnego stanu ψ .

Jeżeli $|\psi\rangle$ jest dowolnym wektorem stanu należącym do przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , to wektor ten można rozwinąć w bazie stanów własnych $\{|\alpha\rangle\}$ w sposób następujący:

$$|\psi\rangle = \mathbf{1}|\psi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha\psi}|\alpha\rangle, \quad (39)$$

gdzie współczynnik rozwinięcia $c_{\alpha\psi} = \langle\alpha|\psi\rangle$ można interpretować jako amplitudę prawdopodobieństwa wystąpienia stanu bazy α w rozwinięciu dowolnego stanu ψ .

Zatem $|c_{\alpha\psi}|^2$ wyznacza prawdopodobieństwo wystąpienia stanu własnego operatora $\hat{\Omega}$ w rozważanym stanie kwantowym $|\psi\rangle$ (który na ogół nie jest stanem własnym operatora $\hat{\Omega}$).

Postulat III (B)
Pomiar w dowolnym stanie kwantowym

Postulat III (B)

Pomiar w dowolnym stanie kwantowym

Jeżeli układ fizyczny znajduje się w stanie kwantowym $|\psi\rangle$, niekoniecznie będącym stanem własnym operatora $\hat{\Omega}$, to w wyniku serii M pomiarów wielkości Ω otrzymamy **wartość oczekiwaną** $\langle\hat{\Omega}\rangle$ operatora $\hat{\Omega}$.

Wartość oczekiwana operatora $\hat{\Omega}$ w stanie kwantowym $|\psi\rangle$ zdefiniowana jest jako

Wartość oczekiwana operatora $\hat{\Omega}$ w stanie kwantowym $|\psi\rangle$ zdefiniowana jest jako

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle \quad (40)$$

Wartość oczekiwana operatora $\hat{\Omega}$ w stanie kwantowym $|\psi\rangle$ zdefiniowana jest jako

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle \quad (40)$$

W reprezentacji położeniowej

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \int dq \psi^*(q, t) \hat{\Omega} \psi(q, t) \quad (41)$$

Wartość oczekiwana operatora $\hat{\Omega}$ w stanie kwantowym $|\psi\rangle$ zdefiniowana jest jako

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle \quad (40)$$

W reprezentacji położeniowej

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \int dq \psi^*(q, t) \hat{\Omega} \psi(q, t) \quad (41)$$

przy czym całkowanie biegnie po całej dostępnej przestrzeni współrzędnych uogólnionych q .

Definicja pomiarowa wartości oczekiwanej

Definicja pomiarowa wartości oczekiwanej

Wartość oczekiwana (średnią) wielkości Ω dla serii M pomiarów obliczamy jako

$$\langle \Omega \rangle \stackrel{def}{=} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^K n_{\alpha} \omega_{\alpha} , \quad (42)$$

Definicja pomiarowa wartości oczekiwanej

Wartość oczekiwaną (średnią) wielkości Ω dla serii M pomiarów obliczamy jako

$$\langle \Omega \rangle \stackrel{def}{=} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^K n_{\alpha} \omega_{\alpha} , \quad (42)$$

gdzie n_{α} = krotność otrzymania w serii M pomiarów wartości własnej ω_{α} ,

Definicja pomiarowa wartości oczekiwanej

Wartość oczekiwaną (średnią) wielkości Ω dla serii M pomiarów obliczamy jako

$$\langle \Omega \rangle \stackrel{def}{=} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^K n_{\alpha} \omega_{\alpha} , \quad (42)$$

gdzie n_{α} = krotność otrzymania w serii M pomiarów wartości własnej ω_{α} ,

K = liczba wszystkich wartości własnych ω_{α} (na ogół $K = \infty$),

Definicja pomiarowa wartości oczekiwanej

Wartość oczekiwaną (średnią) wielkości Ω dla serii M pomiarów obliczamy jako

$$\langle \Omega \rangle \stackrel{def}{=} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^K n_{\alpha} \omega_{\alpha} , \quad (42)$$

gdzie n_{α} = krotność otrzymania w serii M pomiarów wartości własnej ω_{α} ,

K = liczba wszystkich wartości własnych ω_{α} (na ogół $K = \infty$),
 ω_{α} = wartość własna operatora $\hat{\Omega}$ w stanie $|\alpha\rangle$.

Definicja pomiarowa wartości oczekiwanej

Wartość oczekiwaną (średnią) wielkości Ω dla serii M pomiarów obliczamy jako

$$\langle \Omega \rangle \stackrel{def}{=} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^K n_{\alpha} \omega_{\alpha} , \quad (42)$$

gdzie n_{α} = krotność otrzymania w serii M pomiarów wartości własnej ω_{α} ,

K = liczba wszystkich wartości własnych ω_{α} (na ogół $K = \infty$),
 ω_{α} = wartość własna operatora $\hat{\Omega}$ w stanie $|\alpha\rangle$.

$$M = \sum_{\alpha=1}^K n_{\alpha}$$

Wnioski

Wnioski

Jeżeli układ fizyczny znajduje się w stanie kwantowym $|\psi\rangle$, nie będącym stanem własnym operatora $\hat{\Omega}$, to amplituda prawdopodobieństwa otrzymania w wyniku pomiaru wielkości fizycznej $\hat{\Omega}$ wartości własnej ω_α wynosi

Wnioski

Jeżeli układ fizyczny znajduje się w stanie kwantowym $|\psi\rangle$, nie będącym stanem własnym operatora $\hat{\Omega}$, to amplituda prawdopodobieństwa otrzymania w wyniku pomiaru wielkości fizycznej $\hat{\Omega}$ wartości własnej ω_α wynosi

$$c_{\alpha\psi} = \langle \alpha | \psi \rangle \quad (43)$$

Jeżeli $|\psi\rangle = |\psi_\alpha\rangle$ jest stanem własnym operatora $\hat{\Omega}$, to spełnione jest równanie własne

Jeżeli $|\psi\rangle = |\psi_\alpha\rangle$ jest stanem własnym operatora $\hat{\Omega}$, to spełnione jest równanie własne

$$\hat{\Omega}|\psi_\alpha\rangle = \omega_\alpha|\psi_\alpha\rangle .$$

Jeżeli $|\psi\rangle = |\psi_\alpha\rangle$ jest stanem własnym operatora $\hat{\Omega}$, to spełnione jest równanie własne

$$\hat{\Omega}|\psi_\alpha\rangle = \omega_\alpha|\psi_\alpha\rangle .$$

Wtedy wartość oczekiwana wielkości fizycznej Ω jest równa wartości własnej

$$\langle\Omega\rangle = \omega\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle = \omega_\alpha$$

Jeżeli $|\psi\rangle = |\psi_\alpha\rangle$ jest stanem własnym operatora $\hat{\Omega}$, to spełnione jest równanie własne

$$\hat{\Omega}|\psi_\alpha\rangle = \omega_\alpha|\psi_\alpha\rangle .$$

Wtedy wartość oczekiwana wielkości fizycznej Ω jest równa wartości własnej

$$\langle\Omega\rangle = \omega\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle = \omega_\alpha$$

\implies wynikiem pomiaru wielkości Ω jest jedna z wartości własnych ω_α

Jeżeli $|\psi\rangle = |\psi_\alpha\rangle$ jest stanem własnym operatora $\hat{\Omega}$, to spełnione jest równanie własne

$$\hat{\Omega}|\psi_\alpha\rangle = \omega_\alpha|\psi_\alpha\rangle .$$

Wtedy wartość oczekiwana wielkości fizycznej Ω jest równa wartości własnej

$$\langle\Omega\rangle = \omega\langle\psi_\alpha|\psi_\alpha\rangle = \omega_\alpha$$

\implies wynikiem pomiaru wielkości Ω jest jedna z wartości własnych ω_α

Zatem wracamy do postulatu III (A).

Postulat III (C)

Ogólne sformułowanie

Postulat III (C) Ogólne sformułowanie

Postulat III opisuje związek pomiędzy teorią kwantową a pomiarami kwantowymi.

Postulat III (C) Ogólne sformułowanie

Postulat III opisuje związek pomiędzy teorią kwantową a pomiarami kwantowymi. Jest to bardzo ważny postulat mechaniki kwantowej, a jego dobre zrozumienie jest konieczne dla studiowania podstaw teoretycznych i eksperymentalnych obliczeń kwantowych.

Postulat III (C) Ogólne sformułowanie

Postulat III opisuje związek pomiędzy teorią kwantową a pomiarami kwantowymi. Jest to bardzo ważny postulat mechaniki kwantowej, a jego dobre zrozumienie jest konieczne dla studiowania podstaw teoretycznych i eksperymentalnych obliczeń kwantowych.

Warto go zatem sformułować w inny, nieco ogólniejszy sposób.

Postulat III (C)

Postulat III (C)

Pomiary kwantowe opisane są za pomocą zbioru $\{\widehat{M}_m\}$ operatorów pomiaru.

Postulat III (C)

Pomiary kwantowe opisane są za pomocą zbioru $\{\widehat{M}_m\}$ **operatorów pomiaru**. Operatory \widehat{M}_m działają na wektory stanu $|\psi\rangle$ układu kwantowego poddanego pomiarom.

Postulat III (C)

Pomiary kwantowe opisane są za pomocą zbioru $\{\widehat{M}_m\}$ **operatorów pomiaru**. Operatory \widehat{M}_m działają na wektory stanu $|\psi\rangle$ układu kwantowego poddanego pomiarom. Wskaźnik m oznacza wynik pomiaru, który możemy otrzymać w eksperymencie.

Postulat III (C)

Pomiary kwantowe opisane są za pomocą zbioru $\{\widehat{M}_m\}$ **operatorów pomiaru**. Operatory \widehat{M}_m działają na wektory stanu $|\psi\rangle$ układu kwantowego poddanego pomiarom. Wskaźnik m oznacza wynik pomiaru, który możemy otrzymać w eksperymencie. Jeżeli układ kwantowy jest w stanie $|\psi\rangle$ bezpośrednio przed wykonaniem pomiaru, to prawdopodobieństwo otrzymania wyniku m wynosi

Postulat III (C)

Pomiary kwantowe opisane są za pomocą zbioru $\{\widehat{M}_m\}$ **operatorów pomiaru**. Operatory \widehat{M}_m działają na wektory stanu $|\psi\rangle$ układu kwantowego poddanego pomiarom. Wskaźnik m oznacza wynik pomiaru, który możemy otrzymać w eksperymencie. Jeżeli układ kwantowy jest w stanie $|\psi\rangle$ bezpośrednio przed wykonaniem pomiaru, to prawdopodobieństwo otrzymania wyniku m wynosi

$$p(m) = \langle \psi | \widehat{M}_m^\dagger \widehat{M}_m | \psi \rangle, \quad (44)$$

Postulat III (C)

Pomiary kwantowe opisane są za pomocą zbioru $\{\widehat{M}_m\}$ **operatorów pomiaru**. Operatory \widehat{M}_m działają na wektory stanu $|\psi\rangle$ układu kwantowego poddanego pomiarom. Wskaźnik m oznacza wynik pomiaru, który możemy otrzymać w eksperymencie. Jeżeli układ kwantowy jest w stanie $|\psi\rangle$ bezpośrednio przed wykonaniem pomiaru, to prawdopodobieństwo otrzymania wyniku m wynosi

$$p(m) = \langle \psi | \widehat{M}_m^\dagger \widehat{M}_m | \psi \rangle, \quad (44)$$

a stan układu bezpośrednio po wykonaniu pomiaru dany jest wzorem

Postulat III (C)

Pomiary kwantowe opisane są za pomocą zbioru $\{\widehat{M}_m\}$ **operatorów pomiaru**. Operatory \widehat{M}_m działają na wektory stanu $|\psi\rangle$ układu kwantowego poddanego pomiarom. Wskaźnik m oznacza wynik pomiaru, który możemy otrzymać w eksperymencie. Jeżeli układ kwantowy jest w stanie $|\psi\rangle$ bezpośrednio przed wykonaniem pomiaru, to prawdopodobieństwo otrzymania wyniku m wynosi

$$p(m) = \langle \psi | \widehat{M}_m^\dagger \widehat{M}_m | \psi \rangle, \quad (44)$$

a stan układu bezpośrednio po wykonaniu pomiaru dany jest wzorem

$$|\psi_{after}\rangle = \frac{\widehat{M}_m |\psi\rangle}{\langle \psi | \widehat{M}_m^\dagger \widehat{M}_m | \psi \rangle^{1/2}}. \quad (45)$$

Uwaga

Uwaga

W obecnych rozważaniach wynik pomiaru m ma ogólniejsze znaczenie niż w sformułowaniach III(A,B).

Uwaga

W obecnych rozważaniach wynik pomiaru m ma ogólniejsze znaczenie niż w sformułowaniach III(A,B). Obecnie otrzymanie wyniku m może oznaczać uzyskanie informacji o tym, że dwustanowy układ fizyczny znajduje się w jednym ze stanów bazy $|0\rangle$ lub $|1\rangle$, którym przypisujemy odpowiednio wyniki pomiaru 0 lub 1.

Operatory pomiarowe spełniają **relację zupełności**

Operatory pomiarowe spełniają **relację zupełności**

$$\sum_m \widehat{M}_m^\dagger \widehat{M}_m = \mathbf{1} . \quad (46)$$

Operatory pomiarowe spełniają **relację zupełności**

$$\sum_m \widehat{M}_m^\dagger \widehat{M}_m = \mathbf{1} . \quad (46)$$

Relacja zupełności jest równoważna własności sumowania się prawdopodobieństw do jedynki

Operatory pomiarowe spełniają **relację zupełności**

$$\sum_m \widehat{M}_m^\dagger \widehat{M}_m = \mathbf{1} . \quad (46)$$

Relacja zupełności jest równoważna własności sumowania się prawdopodobieństw do jedynki

$$\sum_m \langle \psi | \widehat{M}_m^\dagger \widehat{M}_m | \psi \rangle = \sum_m p(m) = 1 . \quad (47)$$

Prosty, lecz ważny przykład pomiaru:

Prosty, lecz ważny przykład pomiaru: Pomiar kubitów w bazie obliczeniowej

Prosty, lecz ważny przykład pomiaru: Pomiar kubitów w bazie obliczeniowej

Dokonujemy pomiarów na pojedynczym kubicie

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle . \quad (48)$$

Prosty, lecz ważny przykład pomiaru: Pomiar kubitów w bazie obliczeniowej

Dokonyjemy pomiarów na pojedynczym kubicie

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle . \quad (48)$$

Pomiary te zdefiniowane są za pomocą dwóch operatorów pomiarowych $\widehat{M}_0 = |0\rangle\langle 0|$ i $\widehat{M}_1 = |1\rangle\langle 1|$.

Prosty, lecz ważny przykład pomiaru: Pomiar kubitów w bazie obliczeniowej

Dokonyjemy pomiarów na pojedynczym kubicie

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle . \quad (48)$$

Pomiary te zdefiniowane są za pomocą dwóch operatorów pomiarowych $\widehat{M}_0 = |0\rangle\langle 0|$ i $\widehat{M}_1 = |1\rangle\langle 1|$. Każdy z tych operatorów jest hermitowski, a ponadto

Prosty, lecz ważny przykład pomiaru: Pomiar kubitów w bazie obliczeniowej

Dokonyjemy pomiarów na pojedynczym kubicie

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle . \quad (48)$$

Pomiary te zdefiniowane są za pomocą dwóch operatorów pomiarowych $\widehat{M}_0 = |0\rangle\langle 0|$ i $\widehat{M}_1 = |1\rangle\langle 1|$. Każdy z tych operatorów jest hermitowski, a ponadto

$$\widehat{M}_0^2 = \widehat{M}_0 , \widehat{M}_1^2 = \widehat{M}_1 .$$

Prosty, lecz ważny przykład pomiaru: Pomiar kubitów w bazie obliczeniowej

Dokonujemy pomiarów na pojedynczym kubicie

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle . \quad (48)$$

Pomiary te zdefiniowane są za pomocą dwóch operatorów pomiarowych $\widehat{M}_0 = |0\rangle\langle 0|$ i $\widehat{M}_1 = |1\rangle\langle 1|$. Każdy z tych operatorów jest hermitowski, a ponadto

$$\widehat{M}_0^2 = \widehat{M}_0 , \widehat{M}_1^2 = \widehat{M}_1 .$$

Spełniona jest zatem relacja zupełności

Prosty, lecz ważny przykład pomiaru: Pomiar kubitów w bazie obliczeniowej

Dokonujemy pomiarów na pojedynczym kubicie

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle . \quad (48)$$

Pomiary te zdefiniowane są za pomocą dwóch operatorów pomiarowych $\widehat{M}_0 = |0\rangle\langle 0|$ i $\widehat{M}_1 = |1\rangle\langle 1|$. Każdy z tych operatorów jest hermitowski, a ponadto

$$\widehat{M}_0^2 = \widehat{M}_0 , \widehat{M}_1^2 = \widehat{M}_1 .$$

Spełniona jest zatem relacja zupełności

$$\widehat{I} = \widehat{M}_0^\dagger \widehat{M}_0 + \widehat{M}_1^\dagger \widehat{M}_1 = \widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 . \quad (49)$$

Jeżeli wykonamy pomiar nad układem kwantowym w stanie (48), to otrzymamy stan bazy $|0\rangle$, czyli wynik 0, z prawdopodobieństwem

Jeżeli wykonamy pomiar nad układem kwantowym w stanie (48), to otrzymamy stan bazy $|0\rangle$, czyli wynik 0, z prawdopodobieństwem

$$p(0) = \langle \psi | \widehat{M}_0^\dagger \widehat{M}_0 | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{M}_0^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{M}_0 | \psi \rangle = |a_0|^2. \quad (50)$$

Jeżeli wykonamy pomiar nad układem kwantowym w stanie (48), to otrzymamy stan bazy $|0\rangle$, czyli wynik 0, z prawdopodobieństwem

$$p(0) = \langle \psi | \widehat{M}_0^\dagger \widehat{M}_0 | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{M}_0^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{M}_0 | \psi \rangle = |a_0|^2. \quad (50)$$

Podobnie, prawdopodobieństwo otrzymania wyniku 1 wynosi $p(1) = |a_1|^2$.

Jeżeli wykonamy pomiar nad układem kwantowym w stanie (48), to otrzymamy stan bazy $|0\rangle$, czyli wynik 0, z prawdopodobieństwem

$$p(0) = \langle \psi | \widehat{M}_0^\dagger \widehat{M}_0 | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{M}_0^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{M}_0 | \psi \rangle = |a_0|^2. \quad (50)$$

Podobnie, prawdopodobieństwo otrzymania wyniku 1 wynosi $p(1) = |a_1|^2$. W obu tych przypadkach stan układu bezpośrednio po wykonaniu pomiaru obliczamy – zgodnie z (45) – jako

Jeżeli wykonamy pomiar nad układem kwantowym w stanie (48), to otrzymamy stan bazy $|0\rangle$, czyli wynik 0, z prawdopodobieństwem

$$p(0) = \langle \psi | \widehat{M}_0^\dagger \widehat{M}_0 | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{M}_0^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{M}_0 | \psi \rangle = |a_0|^2. \quad (50)$$

Podobnie, prawdopodobieństwo otrzymania wyniku 1 wynosi $p(1) = |a_1|^2$. W obu tych przypadkach stan układu bezpośrednio po wykonaniu pomiaru obliczamy – zgodnie z (45) – jako

$$\psi_{after}^0 = \frac{\widehat{M}_0 |\psi\rangle}{|a_0|} = \frac{a_0}{|a_0|} |0\rangle, \quad (51)$$

Jeżeli wykonamy pomiar nad układem kwantowym w stanie (48), to otrzymamy stan bazy $|0\rangle$, czyli wynik 0, z prawdopodobieństwem

$$p(0) = \langle \psi | \widehat{M}_0^\dagger \widehat{M}_0 | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{M}_0^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \widehat{M}_0 | \psi \rangle = |a_0|^2. \quad (50)$$

Podobnie, prawdopodobieństwo otrzymania wyniku 1 wynosi $p(1) = |a_1|^2$. W obu tych przypadkach stan układu bezpośrednio po wykonaniu pomiaru obliczamy – zgodnie z (45) – jako

$$\psi_{after}^0 = \frac{\widehat{M}_0 |\psi\rangle}{|a_0|} = \frac{a_0}{|a_0|} |0\rangle, \quad (51)$$

$$\psi_{after}^1 = \frac{\widehat{M}_1 |\psi\rangle}{|a_1|} = \frac{a_1}{|a_1|} |1\rangle. \quad (52)$$

Zgodnie z własnością dowolności fazy globalnej pomnożenie stanu przez czynniki $a_j/|a_j|$, ($j = 0, 1$), które posiadają moduł równy 1, nie zmienia własności fizycznych tego stanu, a zatem czynniki te można zignorować, co oznacza, że efektywnie w wyniku pomiaru otrzymamy stany bazy obliczeniowej $|0\rangle$ lub $|1\rangle$.

Pomiary rzutowe

Pomiary rzutowe

Definicja pomiaru rzutowego

Pomiary rzutowe

Definicja pomiaru rzutowego

Pomiar rzutowy opisany jest za pomocą operatora pomiaru \widehat{M} o rozkładzie spektralnym

$$\widehat{M} = \sum_m m \widehat{P}_m , \quad (53)$$

Pomiary rzutowe

Definicja pomiaru rzutowego

Pomiar rzutowy opisany jest za pomocą operatora pomiaru \widehat{M} o rozkładzie spektralnym

$$\widehat{M} = \sum_m m \widehat{P}_m , \quad (53)$$

przy czym

$$\widehat{P}_m = |m\rangle\langle m| \quad (54)$$

jest **operatorem rzutowym (projektorem)** na stan własny operatora \widehat{M} do wartości własnej m , gdzie

$$\widehat{M}|m\rangle = m|m\rangle . \quad (55)$$

Jeżeli wykonamy pomiar układu kwantowego w stanie $|\psi\rangle$, to otrzymamy wynik m z prawdopodobieństwem

Jeżeli wykonamy pomiar układu kwantowego w stanie $|\psi\rangle$, to otrzymamy wynik m z prawdopodobieństwem

$$p(m) = \langle \psi | \hat{P}_m | \psi \rangle . \quad (56)$$

Jeżeli wykonamy pomiar układu kwantowego w stanie $|\psi\rangle$, to otrzymamy wynik m z prawdopodobieństwem

$$p(m) = \langle \psi | \hat{P}_m | \psi \rangle . \quad (56)$$

Bezpośrednio po wykonaniu pomiaru układ kwantowy znajdzie się w stanie

$$|\psi_{after}\rangle = \frac{\hat{P}_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}} , \quad (57)$$

Pomiary rzutowe są szczególnym, lecz ważnym, przypadkiem ogólnego postulatu III(C).

Pomiary rzutowe są szczególnym, lecz ważnym, przypadkiem ogólnego postulatu III(C).

W celu wykazania tej własności założmy, że operatory pomiarowe \widehat{M}_m są **projektorami ortogonalnymi**, tzn. są hermitowskie i spełniają warunki ortogonalności

Pomiary rzutowe są szczególnym, lecz ważnym, przypadkiem ogólnego postulatu III(C).

W celu wykazania tej własności założmy, że operatory pomiarowe \widehat{M}_m są **projektorami ortogonalnymi**, tzn. są hermitowskie i spełniają warunki ortogonalności

$$\widehat{M}_m \widehat{M}'_m = \delta_{mm'} \widehat{M}_m . \quad (58)$$

Pomiary rzutowe są szczególnym, lecz ważnym, przypadkiem ogólnego postulatu III(C).

W celu wykazania tej własności założmy, że operatory pomiarowe \widehat{M}_m są **projektorami ortogonalnymi**, tzn. są hermitowskie i spełniają warunki ortogonalności

$$\widehat{M}_m \widehat{M}'_m = \delta_{mm'} \widehat{M}_m . \quad (58)$$

Przy tych założeniach Postulat III(C) redukuje się do pomiaru rzutowego.

Za pomocą operatorów rzutowych można bardzo łatwo obliczać wartości oczekiwane.

Za pomocą operatorów rzutowych można bardzo łatwo obliczać wartości oczekiwane.

W poniższych obliczeniach startujemy z definicji pomiarowej wartości oczekiwanej, a kończymy je kwantowym przepisem na jej obliczenie.

Za pomocą operatorów rzutowych można bardzo łatwo obliczać wartości oczekiwane.

W poniższych obliczeniach startujemy z definicji pomiarowej wartości oczekiwanej, a kończymy je kwantowym przepisem na jej obliczenie.

$$\langle M \rangle = \sum_m m p(m) \quad (59)$$

$$= \sum_m m \langle \psi | \hat{P}_m | \psi \rangle \quad (60)$$

$$= \langle \psi | \left(\sum_m m \hat{P}_m \right) | \psi \rangle \quad (61)$$

$$= \langle \psi | \hat{M} | \psi \rangle . \quad (62)$$

Za pomocą operatorów rzutowych można bardzo łatwo obliczać wartości oczekiwane.

W poniższych obliczeniach startujemy z definicji pomiarowej wartości oczekiwanej, a kończymy je kwantowym przepisem na jej obliczenie.

$$\langle M \rangle = \sum_m m p(m) \quad (59)$$

$$= \sum_m m \langle \psi | \hat{P}_m | \psi \rangle \quad (60)$$

$$= \langle \psi | \left(\sum_m m \hat{P}_m \right) | \psi \rangle \quad (61)$$

$$= \langle \psi | \hat{M} | \psi \rangle . \quad (62)$$

Dowolny operator $\hat{\Omega}$ o wartościach własnych ω_m posiada następujący rozkład spektralny wyrażony za pomocą operatorów rzutowych

Dowolny operator $\hat{\Omega}$ o wartościach własnych ω_m posiada następujący rozkład spektralny wyrażony za pomocą operatorów rzutowych

$$\hat{\Omega} = \sum_m \omega_m |m\rangle\langle m| , \quad (63)$$

Dowolny operator $\hat{\Omega}$ o wartościach własnych ω_m posiada następujący rozkład spektralny wyrażony za pomocą operatorów rzutowych

$$\hat{\Omega} = \sum_m \omega_m |m\rangle \langle m| , \quad (63)$$

przy czym spełnione są równania własne

$$\hat{\Omega}|m\rangle = \omega_m |m\rangle .$$

Dowolny operator $\hat{\Omega}$ o wartościach własnych ω_m posiada następujący rozkład spektralny wyrażony za pomocą operatorów rzutowych

$$\hat{\Omega} = \sum_m \omega_m |m\rangle \langle m| , \quad (63)$$

przy czym spełnione są równania własne

$$\hat{\Omega}|m\rangle = \omega_m |m\rangle .$$

Np. rozkład spektralny hamiltonianu

$$\hat{H} = \sum_E E |E\rangle \langle E| , \quad (64)$$

Dowolny operator $\hat{\Omega}$ o wartościach własnych ω_m posiada następujący rozkład spektralny wyrażony za pomocą operatorów rzutowych

$$\hat{\Omega} = \sum_m \omega_m |m\rangle \langle m| , \quad (63)$$

przy czym spełnione są równania własne

$$\hat{\Omega}|m\rangle = \omega_m |m\rangle .$$

Np. rozkład spektralny hamiltonianu

$$\hat{H} = \sum_E E |E\rangle \langle E| , \quad (64)$$

gdzie

$$\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle ,$$

a $|E\rangle$ jest stanem własnym do wartości własnej energii E .

Postulat IV

Postulat IV jest **kwantowym równaniem ruchu**.

Postulat IV jest **kwantowym równaniem ruchu**.

Jest on kwantowym odpowiednikiem **równań ruchu mechaniki klasycznej, np. II zasady dynamiki Newtona**.

Postulat IV

Postulat IV

Ewolucja w czasie stanu układu kwantowego opisana jest zależnym od czasu równaniem Schrödingera

Postulat IV

Ewolucja w czasie stanu układu kwantowego opisana jest zależnym od czasu równaniem Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle , \quad (65)$$

Postulat IV

Ewolucja w czasie stanu układu kwantowego opisana jest zależnym od czasu równaniem Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle , \quad (65)$$

gdzie \hat{H} jest **hamiltonianem** układu.

Jeżeli znamy stan układu w chwili $t = t_1$, to możemy jednoznacznie określić stan układu w chwili $t = t_2$ jako

Jeżeli znamy stan układu w chwili $t = t_1$, to możemy jednoznacznie określić stan układu w chwili $t = t_2$ jako

$$|\psi(t_2)\rangle = \exp\left[\frac{-i\hat{H}(t_2 - t_1)}{\hbar}\right] |\psi(t_1)\rangle . \quad (66)$$

Jeżeli znamy stan układu w chwili $t = t_1$, to możemy jednoznacznie określić stan układu w chwili $t = t_2$ jako

$$|\psi(t_2)\rangle = \exp\left[\frac{-i\hat{H}(t_2 - t_1)}{\hbar}\right] |\psi(t_1)\rangle . \quad (66)$$

Wzór (66) podaje rozwiązanie równania Schrödingera (65) w postaci operatorowej.

Jeżeli znamy stan układu w chwili $t = t_1$, to możemy jednoznacznie określić stan układu w chwili $t = t_2$ jako

$$|\psi(t_2)\rangle = \exp\left[\frac{-i\hat{H}(t_2 - t_1)}{\hbar}\right] |\psi(t_1)\rangle . \quad (66)$$

Wzór (66) podaje rozwiązanie równania Schrödingera (65) w postaci operatorowej.

Definiujemy **operator ewolucji w czasie** jako

Jeżeli znamy stan układu w chwili $t = t_1$, to możemy jednoznacznie określić stan układu w chwili $t = t_2$ jako

$$|\psi(t_2)\rangle = \exp\left[\frac{-i\hat{H}(t_2 - t_1)}{\hbar}\right] |\psi(t_1)\rangle . \quad (66)$$

Wzór (66) podaje rozwiązanie równania Schrödingera (65) w postaci operatorowej.

Definiujemy **operator ewolucji w czasie** jako

$$\hat{U}(t_1, t_2) = \exp\left[\frac{-i\hat{H}(t_2 - t_1)}{\hbar}\right] , \quad (67)$$

Rozwiązanie równania Schrödingera (65) można wyrazić za pomocą operatora ewolucji w czasie

Rozwiązanie równania Schrödingera (65) można wyrazić za pomocą operatora ewolucji w czasie

$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{U}(t_1, t_2)|\psi(t_1)\rangle . \quad (68)$$

Rozwiązanie równania Schrödingera (65) można wyrazić za pomocą operatora ewolucji w czasie

$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{U}(t_1, t_2)|\psi(t_1)\rangle . \quad (68)$$

Operator ewolucji w czasie jest **operatorem unitarnym**, tzn.

Rozwiązanie równania Schrödingera (65) można wyrazić za pomocą operatora ewolucji w czasie

$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{U}(t_1, t_2)|\psi(t_1)\rangle . \quad (68)$$

Operator ewolucji w czasie jest **operatorem unitarnym**, tzn.

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1} . \quad (69)$$

Stany stacjonarne

Stany stacjonarne

Jeżeli hamiltonian układu nie zależy od czasu, to ewolucja czasowa stanu dana jest wzorem

Stany stacjonarne

Jeżeli hamiltonian układu nie zależy od czasu, to ewolucja czasowa stanu dana jest wzorem

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-i\frac{E}{\hbar}(t - t_0)\right]|\psi(t_0)\rangle, \quad (70)$$

Stany stacjonarne

Jeżeli hamiltonian układu nie zależy od czasu, to ewolucja czasowa stanu dana jest wzorem

$$|\psi(t)\rangle = \exp[-i\frac{E}{\hbar}(t - t_0)]|\psi(t_0)\rangle, \quad (70)$$

gdzie $|\psi(t_0)\rangle$ jest stanem układu w chwili początkowej t_0 .

Stany stacjonarne

Jeżeli hamiltonian układu nie zależy od czasu, to ewolucja czasowa stanu dana jest wzorem

$$|\psi(t)\rangle = \exp[-i\frac{E}{\hbar}(t - t_0)]|\psi(t_0)\rangle, \quad (70)$$

gdzie $|\psi(t_0)\rangle$ jest stanem układu w chwili początkowej t_0 .
Wzór (70) definiuje **stan stacjonarny** układu.

Stan stacjonarny (70) zapisany za pomocą funkcji falowej ma postać

Stan stacjonarny (70) zapisany za pomocą funkcji falowej ma postać

$$\psi(q, t) = \exp\left[-i\frac{E}{\hbar}(t - t_0)\right]\psi(q, t_0) , \quad (71)$$

gdzie q oznacza zbiór współrzędnych określających położenia cząstek układu kwantowego.

Przykład: spin elektronu

Rozważymy stany kwantowe cząstki o spinie $1/2$, np. elektronu.

Rozważymy stany kwantowe cząstki o spinie $1/2$, np. elektronu.
Operator spinu $1/2$ ma postać

$$\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \quad (72)$$

Rozważymy stany kwantowe cząstki o spinie $1/2$, np. elektronu. Operator spinu $1/2$ ma postać

$$\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \quad (72)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \mathbf{e}_x + \sigma_y \mathbf{e}_y + \sigma_z \mathbf{e}_z , \quad (73)$$

przy czym $\sigma_{x,y,z} \equiv \sigma_{i,j,k}$ są **macierzami Pauliego**

Rozważmy stany kwantowe cząstki o spinie $1/2$, np. elektronu. Operator spinu $1/2$ ma postać

$$\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \quad (72)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \mathbf{e}_x + \sigma_y \mathbf{e}_y + \sigma_z \mathbf{e}_z, \quad (73)$$

przy czym $\sigma_{x,y,z} \equiv \sigma_{i,j,k}$ są **macierzami Pauliego**

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Operatory (74) nie komutują z sobą

Operatory (74) nie komutują z sobą

$$[\sigma_i, \sigma_j] \neq 0 \text{ dla } i \neq j, \quad (75)$$

Operatory (74) nie komutują z sobą

$$[\sigma_i, \sigma_j] \neq 0 \text{ dla } i \neq j, \quad (75)$$

natomiast komutują z operatorem σ^2 , czyli zachodzi relacja komutacji

Operatory (74) nie komutują z sobą

$$[\sigma_i, \sigma_j] \neq 0 \text{ dla } i \neq j, \quad (75)$$

natomiast komutują z operatorem σ^2 , czyli zachodzi relacja komutacji

$$[\sigma_i, \sigma^2] = 0. \quad (76)$$

Operatory (74) nie komutują z sobą

$$[\sigma_i, \sigma_j] \neq 0 \text{ dla } i \neq j, \quad (75)$$

natomiast komutują z operatorem σ^2 , czyli zachodzi relacja komutacji

$$[\sigma_i, \sigma^2] = 0. \quad (76)$$

Oznacza to, że dwie różne składowe spinu nie są jednocześnie mierzalne, natomiast każda ze składowych spinu jest współmierzalna z kwadratem spinu.

Operator z -owej składowej spinu

Operator z -owej składowej spinu

$$s_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

jest diagonalny, a zatem jego wartościami własnymi są: $+\hbar/2$ i $-\hbar/2$.

Operator z -owej składowej spinu

$$s_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

jest diagonalny, a zatem jego wartościami własnymi są: $+\hbar/2$ i $-\hbar/2$. Stany własne operatora s_z mają postać **spinorów**

Operator z -owej składowej spinu

$$s_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

jest diagonalny, a zatem jego wartościami własnymi są: $+\hbar/2$ i $-\hbar/2$. Stany własne operatora s_z mają postać **spinorów**

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Operator z -owej składowej spinu

$$s_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

jest diagonalny, a zatem jego wartościami własnymi są: $+\hbar/2$ i $-\hbar/2$. Stany własne operatora s_z mają postać **spinorów**

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Stan $|0\rangle$ odpowiada wartości własnej $+\hbar/2$, a stan własny $|1\rangle$ odpowiada wartości własnej $-\hbar/2$.

Wartość własną operatora $\mathbf{s}^2 = (\hbar/2)^2 \boldsymbol{\sigma}^2$ obliczamy korzystając z własności macierzy Pauliego

Wartość własną operatora $\mathbf{s}^2 = (\hbar/2)^2 \boldsymbol{\sigma}^2$ obliczamy korzystając z własności macierzy Pauliego

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \hat{I} . \quad (79)$$

Wartość własną operatora $\mathbf{s}^2 = (\hbar/2)^2 \boldsymbol{\sigma}^2$ obliczamy korzystając z własności macierzy Pauliego

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \hat{I} . \quad (79)$$

Stąd wartość własna operatora kwadratu spinu wynosi $3\hbar^2/4$.

Dowolny stan spinowy (kubit spinowy) ma postać

Dowolny stan spinowy (kubit spinowy) ma postać

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle , \quad (80)$$

Dowolny stan spinowy (kubit spinowy) ma postać

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle , \quad (80)$$

przy czym $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$.

Dowolny stan spinowy (kubit spinowy) ma postać

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle , \quad (80)$$

przy czym $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$. Amplitudy a_0 i a_1 podają prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w stanie $|0\rangle$ lub $|1\rangle$:

Dowolny stan spinowy (kubit spinowy) ma postać

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle , \quad (80)$$

przy czym $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$. Amplitudy a_0 i a_1 podają prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w stanie $|0\rangle$ lub $|1\rangle$:

$$p_0 = |a_0|^2 , \quad p_1 = |a_1|^2 . \quad (81)$$

Stan (80) nie jest stanem własnym operatora σ_z .

Stan (80) nie jest stanem własnym operatora σ_z . Obliczmy wartość oczekiwaną tego operatora w stanie (80), czyli

Stan (80) nie jest stanem własnym operatora σ_z . Obliczmy wartość oczekiwaną tego operatora w stanie (80), czyli

$$\langle \sigma_z \rangle = |a_0|^2 \left(\frac{\hbar}{2} \right) + |a_1|^2 \left(-\frac{\hbar}{2} \right) . \quad (82)$$

Stan (80) nie jest stanem własnym operatora σ_z . Obliczmy wartość oczekiwaną tego operatora w stanie (80), czyli

$$\langle \sigma_z \rangle = |a_0|^2 \left(\frac{\hbar}{2} \right) + |a_1|^2 \left(-\frac{\hbar}{2} \right) . \quad (82)$$

Wg. (82) dokonując pomiaru z -owej składowej spinu w stanie $|\psi\rangle$ otrzymamy wynik $+\hbar/2$ z prawdopodobieństwem $p_0 = |a_0|^2$ lub wynik $-\hbar/2$ z prawdopodobieństwem $p_1 = |a_1|^2$.

Operatory rzutowe na stany własne $|0\rangle$ i $|1\rangle$ mają postać

Operatory rzutowe na stany własne $|0\rangle$ i $|1\rangle$ mają postać

$$P_{z+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (83)$$

Operatory rzutowe na stany własne $|0\rangle$ i $|1\rangle$ mają postać

$$P_{z+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (83)$$

$$P_{z-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (84)$$