

III.
MECHANIKA KWANTOWA
W JĘZYKU OPERATORÓW
GĘSTOŚCI

Wprowadzenie operatora gęstości

Układ kwantowy może być opisany za pomocą operatorów i wektorów stanu w przestrzeni Hilberta lub za pomocą operatora gęstości.

Układ kwantowy może być opisany za pomocą operatorów i wektorów stanu w przestrzeni Hilberta lub za pomocą operatora gęstości. Opis układu kwantowego za pomocą operatora gęstości jest bardziej ogólny, a poza głębszy i bardziej precyzyjny.

Układ kwantowy może być opisany za pomocą operatorów i wektorów stanu w przestrzeni Hilberta lub za pomocą operatora gęstości. Opis układu kwantowego za pomocą operatora gęstości jest bardziej ogólny, a poza głębszy i bardziej precyzyjny. Nie jest on jednak sprzeczny z dotychczasowym opisem.

Układ kwantowy może być opisany za pomocą operatorów i wektorów stanu w przestrzeni Hilberta lub za pomocą operatora gęstości. Opis układu kwantowego za pomocą operatora gęstości jest bardziej ogólny, a poza głębszy i bardziej precyzyjny. Nie jest on jednak sprzeczny z dotychczasowym opisem. Zaletami zastosowania operatora gęstości do opisu układu kwantowego są:

Układ kwantowy może być opisany za pomocą operatorów i wektorów stanu w przestrzeni Hilberta lub za pomocą operatora gęstości. Opis układu kwantowego za pomocą operatora gęstości jest bardziej ogólny, a poza głębszy i bardziej precyzyjny. Nie jest on jednak sprzeczny z dotychczasowym opisem. Zaletami zastosowania operatora gęstości do opisu układu kwantowego są:

- ▶ wniknięcie w istotę pomiaru kwantowego, co prowadzi do **kwantowej teorii pomiaru**,

Układ kwantowy może być opisany za pomocą operatorów i wektorów stanu w przestrzeni Hilberta lub za pomocą operatora gęstości. Opis układu kwantowego za pomocą operatora gęstości jest bardziej ogólny, a poza głębszy i bardziej precyzyjny. Nie jest on jednak sprzeczny z dotychczasowym opisem.

Zaletami zastosowania operatora gęstości do opisu układu kwantowego są:

- ▶ wniknięcie w istotę pomiaru kwantowego, co prowadzi do **kwantowej teorii pomiaru**,
- ▶ sformułowanie praw **kwantowej mechaniki statystycznej**.

Układ kwantowy może być opisany za pomocą operatorów i wektorów stanu w przestrzeni Hilberta lub za pomocą operatora gęstości. Opis układu kwantowego za pomocą operatora gęstości jest bardziej ogólny, a poza głębszy i bardziej precyzyjny. Nie jest on jednak sprzeczny z dotychczasowym opisem.

Zaletami zastosowania operatora gęstości do opisu układu kwantowego są:

- ▶ wniknięcie w istotę pomiaru kwantowego, co prowadzi do **kwantowej teorii pomiaru**,
- ▶ sformułowanie praw **kwantowej mechaniki statystycznej**.

W rezultacie otrzymamy jednolity formalizm kwantowy i pogłębione sformułowanie postulatów mechaniki kwantowej.

Rozważamy kwantowy układ \mathcal{U} , który niekoniecznie jest układem izolowanym, lecz oddziałuje z otoczeniem \mathcal{O} .

Rozważamy kwantowy układ \mathcal{U} , który niekoniecznie jest układem izolowanym, lecz oddziałuje z otoczeniem \mathcal{O} . Zwykle przez otoczenie \mathcal{O} rozumiemy aparaturę pomiarową i obserwatora.

Rozważamy kwantowy układ \mathcal{U} , który niekoniecznie jest układem izolowanym, lecz oddziałuje z otoczeniem \mathcal{O} . Zwykle przez otoczenie \mathcal{O} rozumiemy aparaturę pomiarową i obserwatora. Oba układy $\mathcal{U} + \mathcal{O}$ traktujemy jako układ w pełni izolowany.

Rozważamy kwantowy układ \mathcal{U} , który niekoniecznie jest układem izolowanym, lecz oddziałuje z otoczeniem \mathcal{O} . Zwykle przez otoczenie \mathcal{O} rozumiemy aparaturę pomiarową i obserwatora. Oba układy $\mathcal{U} + \mathcal{O}$ traktujemy jako układ w pełni izolowany.

Gdyby jednak takie wyodrębnienie układu izolowanego było niemożliwe, to do układu \mathcal{O} należy włączyć wszystkie pozostałe obiekty we Wszechświecie.

Rozważamy kwantowy układ \mathcal{U} , który niekoniecznie jest układem izolowanym, lecz oddziałuje z otoczeniem \mathcal{O} . Zwykle przez otoczenie \mathcal{O} rozumiemy aparaturę pomiarową i obserwatora. Oba układy $\mathcal{U} + \mathcal{O}$ traktujemy jako układ w pełni izolowany.

Gdyby jednak takie wyodrębnienie układu izolowanego było niemożliwe, to do układu \mathcal{O} należy włączyć wszystkie pozostałe obiekty we Wszechświecie. Wtedy układ \mathcal{O} byłby resztą Wszechświata względem rozważanego układu \mathcal{U} , nad którym dokonujemy pomiaru.

Oznaczmy symbolem x zbiór współrzędnych przestrzennych opisujących położenia wszystkich cząstek w rozważanym układzie \mathcal{U} , czyli

Oznaczmy symbolem x zbiór współrzędnych przestrzennych opisujących położenia wszystkich cząstek w rozważanym układzie \mathcal{U} , czyli

$$x = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$$

gdzie $\mathbf{r}_i \in \mathcal{U}$.

Oznaczmy symbolem x zbiór współrzędnych przestrzennych opisujących położenia wszystkich cząstek w rozważanym układzie \mathcal{U} , czyli

$$x = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$$

gdzie $\mathbf{r}_i \in \mathcal{U}$.

(W stosowanym zapisie opuszczam zmienną spinową.)

Oznaczmy symbolem x zbiór współrzędnych przestrzennych opisujących położenia wszystkich cząstek w rozważanym układzie \mathcal{U} , czyli

$$x = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$$

gdzie $\mathbf{r}_i \in \mathcal{U}$.

(W stosowanym zapisie opuszczam zmienną spinową.)

Natomiast y niech oznacza zbiór wektorów położen wszystkich cząstek w otoczeniu \mathcal{O} (reszcie Wszechświata).

Oznaczmy symbolem x zbiór współrzędnych przestrzennych opisujących położenia wszystkich cząstek w rozważanym układzie \mathcal{U} , czyli

$$x = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$$

gdzie $\mathbf{r}_i \in \mathcal{U}$.

(W stosowanym zapisie opuszczam zmienną spinową.)

Natomiast y niech oznacza zbiór wektorów położen wszystkich cząstek w otoczeniu \mathcal{O} (reszcie Wszechświata).

$$y = (\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots)$$

gdzie $\mathbf{r}'_i \in \mathcal{O}$.

Niech $\{\varphi_\mu(x, t)\}$ oznacza zupełny ortonormalny zbiór funkcji falowych opisujących układ \mathcal{U} .

Niech $\{\varphi_\mu(x, t)\}$ oznacza zupełny ortonormalny zbiór funkcji falowych opisujących układ \mathcal{U} . Zgodnie z I postulatem mechaniki kwantowej pełny opis układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$ zapewnia nam funkcja falowa tego układu, która – w użytych oznaczeniach – posiada ogólną postać

Niech $\{\varphi_\mu(x, t)\}$ oznacza zupełny ortonormalny zbiór funkcji falowych opisujących układ \mathcal{U} . Zgodnie z I postulatem mechaniki kwantowej pełny opis układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$ zapewnia nam funkcja falowa tego układu, która – w użytych oznaczeniach – posiada ogólną postać

$$\psi(x, y, t) = \sum_{\mu} c_{\mu}(y, t) \varphi_{\mu}(x, t) . \quad (1)$$

Niech $\{\varphi_\mu(x, t)\}$ oznacza zupełny ortonormalny zbiór funkcji falowych opisujących układ \mathcal{U} . Zgodnie z I postulatem mechaniki kwantowej pełny opis układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$ zapewnia nam funkcja falowa tego układu, która – w użytych oznaczeniach – posiada ogólną postać

$$\psi(x, y, t) = \sum_{\mu} c_{\mu}(y, t) \varphi_{\mu}(x, t) . \quad (1)$$

Bez zbytniego ograniczenia ogólności rozważań można przyjąć, że układ \mathcal{U} znajduje się w stanach stacjonarnych, czyli

Niech $\{\varphi_\mu(x, t)\}$ oznacza zupełny ortonormalny zbiór funkcji falowych opisujących układ \mathcal{U} . Zgodnie z I postulatem mechaniki kwantowej pełny opis układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$ zapewnia nam funkcja falowa tego układu, która – w użytych oznaczeniach – posiada ogólną postać

$$\psi(x, y, t) = \sum_{\mu} c_{\mu}(y, t) \varphi_{\mu}(x, t) . \quad (1)$$

Bez zbytniego ograniczenia ogólności rozważań można przyjąć, że układ \mathcal{U} znajduje się w stanach stacjonarnych, czyli

$$\varphi_{\mu}(x, t) = \varphi_{\mu}(x, 0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{\mu} t\right) . \quad (2)$$

Niech $\{\varphi_\mu(x, t)\}$ oznacza zupełny ortonormalny zbiór funkcji falowych opisujących układ \mathcal{U} . Zgodnie z I postulatem mechaniki kwantowej pełny opis układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$ zapewnia nam funkcja falowa tego układu, która – w użytych oznaczeniach – posiada ogólną postać

$$\psi(x, y, t) = \sum_{\mu} c_{\mu}(y, t) \varphi_{\mu}(x, t) . \quad (1)$$

Bez zbyteńnego ograniczenia ogólności rozważań można przyjąć, że układ \mathcal{U} znajduje się w stanach stacjonarnych, czyli

$$\varphi_{\mu}(x, t) = \varphi_{\mu}(x, 0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{\mu} t\right) . \quad (2)$$

Pamiętając o zależnościach od czasu (1) i (2) w dalszym ciągu – w celu uproszczenia zapisu – opuszczam zmienną t .

Zapiszmy powyższe wzory w notacji Diraca.

Zapiszmy powyższe wzory w notacji Diraca. Jeżeli $\{|\varphi_\mu\rangle\}$ jest zupełną bazą ortonormalną w przestrzeni stanów układu \mathcal{U} , a $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ jest zupełną bazą ortonormalną w przestrzeni stanów otoczenia \mathcal{O} , to funkcje falowe mają następującą postać:

Zapiszmy powyższe wzory w notacji Diraca. Jeżeli $\{|\varphi_\mu\rangle\}$ jest zupełną bazą ortonormalną w przestrzeni stanów układu \mathcal{U} , a $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ jest zupełną bazą ortonormalną w przestrzeni stanów otoczenia \mathcal{O} , to funkcje falowe mają następującą postać:

$$\varphi_\mu = \langle x|\varphi_\mu\rangle \quad (3)$$

dla układu \mathcal{U} , a

Zapišmy powyższe wzory w notacji Diraca. Jeżeli $\{|\varphi_\mu\rangle\}$ jest zupełną bazą ortonormalną w przestrzeni stanów układu \mathcal{U} , a $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ jest zupełną bazą ortonormalną w przestrzeni stanów otoczenia \mathcal{O} , to funkcje falowe mają następującą postać:

$$\varphi_\mu = \langle x|\varphi_\mu\rangle \quad (3)$$

dla układu \mathcal{U} , a

$$\eta_\alpha = \langle y|\eta_\alpha\rangle \quad (4)$$

dla otoczenia \mathcal{O} .

Zapiszmy powyższe wzory w notacji Diraca. Jeżeli $\{|\varphi_\mu\rangle\}$ jest zupełną bazą ortonormalną w przestrzeni stanów układu \mathcal{U} , a $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ jest zupełną bazą ortonormalną w przestrzeni stanów otoczenia \mathcal{O} , to funkcje falowe mają następującą postać:

$$\varphi_\mu = \langle x|\varphi_\mu\rangle \quad (3)$$

dla układu \mathcal{U} , a

$$\eta_\alpha = \langle y|\eta_\alpha\rangle \quad (4)$$

dla otoczenia \mathcal{O} .

Wektor stanu pełnego układu, czyli $\mathcal{U} + \mathcal{O}$, ma postać

Zapišmy powyższe wzory w notacji Diraca. Jeżeli $\{|\varphi_\mu\rangle\}$ jest zupełną bazą ortonormalną w przestrzeni stanów układu \mathcal{U} , a $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ jest zupełną bazą ortonormalną w przestrzeni stanów otoczenia \mathcal{O} , to funkcje falowe mają następującą postać:

$$\varphi_\mu = \langle x|\varphi_\mu\rangle \quad (3)$$

dla układu \mathcal{U} , a

$$\eta_\alpha = \langle y|\eta_\alpha\rangle \quad (4)$$

dla otoczenia \mathcal{O} .

Wektor stanu pełnego układu, czyli $\mathcal{U} + \mathcal{O}$, ma postać

$$|\psi\rangle = \sum_{\mu\alpha} d_{\mu\alpha} |\varphi_\mu\rangle |\eta_\alpha\rangle . \quad (5)$$

Funkcja falowa układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$ może być zapisana jako

Funkcja falowa układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$ może być zapisana jako

$$\psi(x, y) = \langle x, y | \psi \rangle = \langle x | \langle y | \psi \rangle . \quad (6)$$

Funkcja falowa układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$ może być zapisana jako

$$\psi(x, y) = \langle x, y | \psi \rangle = \langle x | \langle y | \psi \rangle . \quad (6)$$

Podstawiając (5) do (6) otrzymujemy

$$\psi(x, y) = \sum_{\mu\alpha} d_{\mu\alpha} \langle x | \varphi_{\mu} \rangle \langle y | \eta_{\alpha} \rangle . \quad (7)$$

Porównując wzory (1) i (7) identyfikujemy współczynniki rozwinięcia jako

Porównując wzory (1) i (7) identyfikujemy współczynniki rozwinięcia jako

$$c_{\mu}(y) = \sum_{\alpha} d_{\mu\alpha} \langle y | \eta_{\alpha} \rangle . \quad (8)$$

Porównując wzory (1) i (7) identyfikujemy współczynniki rozwinięcia jako

$$c_{\mu}(y) = \sum_{\alpha} d_{\mu\alpha} \langle y | \eta_{\alpha} \rangle . \quad (8)$$

Inaczej

$$c_{\mu}(y) = \sum_{\alpha} d_{\mu\alpha} \eta_{\alpha}(y) . \quad (9)$$

Rozważmy teraz operator $\hat{\Omega}$, który działa tylko na stany układu \mathcal{U} , tzn.

Rozważmy teraz operator $\hat{\Omega}$, który działa tylko na stany układu \mathcal{U} , tzn.

$$\hat{\Omega}(|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle) = (\hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle)|\eta_\alpha\rangle . \quad (10)$$

Rozważymy teraz operator $\hat{\Omega}$, który działa tylko na stany układu \mathcal{U} , tzn.

$$\hat{\Omega}(|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle) = (\hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle)|\eta_\alpha\rangle . \quad (10)$$

Operator ten nie zmienia stanów $|\eta_\alpha\rangle$ otoczenia.

Rozważymy teraz operator $\hat{\Omega}$, który działa tylko na stany układu \mathcal{U} , tzn.

$$\hat{\Omega}(|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle) = (\hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle)|\eta_\alpha\rangle . \quad (10)$$

Operator ten nie zmienia stanów $|\eta_\alpha\rangle$ otoczenia. Operator $\hat{\Omega}$ musi być jednak określony w przestrzeni stanów $\{|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle\}$ całego układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$,

Rozważymy teraz operator $\hat{\Omega}$, który działa tylko na stany układu \mathcal{U} , tzn.

$$\hat{\Omega}(|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle) = (\hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle)|\eta_\alpha\rangle . \quad (10)$$

Operator ten nie zmienia stanów $|\eta_\alpha\rangle$ otoczenia. Operator $\hat{\Omega}$ musi być jednak określony w przestrzeni stanów $\{|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle\}$ całego układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$, a zatem nie może mieć zwykłej postaci

Rozważymy teraz operator $\hat{\Omega}$, który działa tylko na stany układu \mathcal{U} , tzn.

$$\hat{\Omega}(|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle) = (\hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle)|\eta_\alpha\rangle . \quad (10)$$

Operator ten nie zmienia stanów $|\eta_\alpha\rangle$ otoczenia. Operator $\hat{\Omega}$ musi być jednak określony w przestrzeni stanów $\{|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle\}$ całego układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$, a zatem nie może mieć zwykłej postaci

$$\hat{\Omega} \neq \sum_{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} |\varphi_\mu\rangle \langle \varphi_\nu| ,$$

Rozważmy teraz operator $\hat{\Omega}$, który działa tylko na stany układu \mathcal{U} , tzn.

$$\hat{\Omega}(|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle) = (\hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle)|\eta_\alpha\rangle . \quad (10)$$

Operator ten nie zmienia stanów $|\eta_\alpha\rangle$ otoczenia. Operator $\hat{\Omega}$ musi być jednak określony w przestrzeni stanów $\{|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle\}$ całego układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$, a zatem nie może mieć zwykłej postaci

$$\hat{\Omega} \neq \sum_{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} |\varphi_\mu\rangle \langle \varphi_\nu| ,$$

lecz ogólniejszą postać

Rozważmy teraz operator $\hat{\Omega}$, który działa tylko na stany układu \mathcal{U} , tzn.

$$\hat{\Omega}(|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle) = (\hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle)|\eta_\alpha\rangle. \quad (10)$$

Operator ten nie zmienia stanów $|\eta_\alpha\rangle$ otoczenia. Operator $\hat{\Omega}$ musi być jednak określony w przestrzeni stanów $\{|\varphi_\mu\rangle|\eta_\alpha\rangle\}$ całego układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$, a zatem nie może mieć zwykłej postaci

$$\hat{\Omega} \neq \sum_{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} |\varphi_\mu\rangle \langle \varphi_\nu|,$$

lecz ogólniejszą postać

$$\hat{\Omega} = \sum_{\mu\nu\alpha} \Omega_{\mu\nu} |\varphi_\mu\rangle |\eta_\alpha\rangle \langle \eta_\alpha| \langle \varphi_\nu|. \quad (11)$$

W podprzestrzeni stanów $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} operator

W podprzestrzeni stanów $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} operator

$$\sum_{\alpha} |\eta_\alpha\rangle\langle\eta_\alpha| = \hat{I} \quad (12)$$

W podprzestrzeni stanów $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} operator

$$\sum_{\alpha} |\eta_\alpha\rangle\langle\eta_\alpha| = \hat{I} \quad (12)$$

jest operatorem jednostkowym.

Obliczmy wartość oczekiwaną operatora $\hat{\Omega}$ w stanie $|\psi\rangle$ całego układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$, czyli

Obliczmy wartość oczekiwaną operatora $\hat{\Omega}$ w stanie $|\psi\rangle$ całego układu $\mathcal{U} + \mathcal{O}$, czyli

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle . \quad (13)$$

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \sum_{\mu\alpha} \sum_{\nu\beta} d_{\nu\beta}^* d_{\mu\alpha} \langle \eta_\beta | \langle \varphi_\nu | \hat{\Omega} | \varphi_\mu \rangle | \eta_\alpha \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Omega} \rangle &= \sum_{\mu\alpha} \sum_{\nu\beta} d_{\nu\beta}^* d_{\mu\alpha} \langle \eta_\beta | \langle \varphi_\nu | \hat{\Omega} | \varphi_\mu \rangle | \eta_\alpha \rangle \\
&= \sum_{\mu\nu\alpha\beta} d_{\nu\beta}^* d_{\mu\alpha} \underbrace{\langle \eta_\beta | \eta_\alpha \rangle}_{\delta_{\alpha\beta}} \langle \varphi_\nu | \hat{\Omega} | \varphi_\mu \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Omega} \rangle &= \sum_{\mu\alpha} \sum_{\nu\beta} d_{\nu\beta}^* d_{\mu\alpha} \langle \eta_\beta | \langle \varphi_\nu | \hat{\Omega} | \varphi_\mu \rangle | \eta_\alpha \rangle \\
&= \sum_{\mu\nu\alpha\beta} d_{\nu\beta}^* d_{\mu\alpha} \underbrace{\langle \eta_\beta | \eta_\alpha \rangle}_{\delta_{\alpha\beta}} \langle \varphi_\nu | \hat{\Omega} | \varphi_\mu \rangle \\
&= \sum_{\mu\nu\alpha} d_{\nu\alpha}^* d_{\mu\alpha} \langle \varphi_\nu | \hat{\Omega} | \varphi_\mu \rangle .
\end{aligned} \tag{14}$$

Definiuję **macierz gęstości** jako zbiór współczynników

Definiuję **macierz gęstości** jako zbiór współczynników

$$\varrho_{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \sum_{\alpha} d_{\mu\alpha} d_{\nu\alpha}^* . \quad (15)$$

Definiuję **macierz gęstości** jako zbiór współczynników

$$\varrho_{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \sum_{\alpha} d_{\mu\alpha} d_{\nu\alpha}^* . \quad (15)$$

Zgodnie z (14) wartość oczekiwaną operatora $\hat{\Omega}$ można wyrazić za pomocą macierzy gęstości

Definiuję **macierz gęstości** jako zbiór współczynników

$$\varrho_{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \sum_{\alpha} d_{\mu\alpha} d_{\nu\alpha}^* . \quad (15)$$

Zgodnie z (14) wartość oczekiwaną operatora $\hat{\Omega}$ można wyrazić za pomocą macierzy gęstości

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \sum_{\mu\nu} \varrho_{\mu\nu} \langle \varphi_{\mu} | \hat{\Omega} | \varphi_{\nu} \rangle . \quad (16)$$

Definiuję **macierz gęstości** jako zbiór współczynników

$$\varrho_{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \sum_{\alpha} d_{\mu\alpha} d_{\nu\alpha}^* . \quad (15)$$

Zgodnie z (14) wartość oczekiwaną operatora $\hat{\Omega}$ można wyrazić za pomocą macierzy gęstości

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \sum_{\mu\nu} \varrho_{\mu\nu} \langle \varphi_{\mu} | \hat{\Omega} | \varphi_{\nu} \rangle . \quad (16)$$

Inaczej

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \sum_{\mu\nu} \varrho_{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} , \quad (17)$$

Definiuję **macierz gęstości** jako zbiór współczynników

$$\varrho_{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \sum_{\alpha} d_{\mu\alpha} d_{\nu\alpha}^* . \quad (15)$$

Zgodnie z (14) wartość oczekiwaną operatora $\hat{\Omega}$ można wyrazić za pomocą macierzy gęstości

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \sum_{\mu\nu} \varrho_{\mu\nu} \langle \varphi_{\mu} | \hat{\Omega} | \varphi_{\nu} \rangle . \quad (16)$$

Inaczej

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \sum_{\mu\nu} \varrho_{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} , \quad (17)$$

gdzie $\Omega_{\mu\nu} = \langle \varphi_{\mu} | \hat{\Omega} | \varphi_{\nu} \rangle$.

Definicja operatora gęstości

Definicja operatora gęstości

Wzór (15) może posłużyć do zdefiniowania operatora $\hat{\rho}$, który definiujemy za pomocą jego elementów macierzowych w bazie stanów $\{|\varphi_\mu\rangle\}$

Definicja operatora gęstości

Wzór (15) może posłużyć do zdefiniowania operatora $\hat{\rho}$, który definiujemy za pomocą jego elementów macierzowych w bazie stanów $\{|\varphi_\mu\rangle\}$

$$\hat{\rho}_{\mu\nu} = \langle\varphi_\mu|\hat{\rho}|\varphi_\nu\rangle. \quad (18)$$

Definicja operatora gęstości

Wzór (15) może posłużyć do zdefiniowania operatora $\hat{\rho}$, który definiujemy za pomocą jego elementów macierzowych w bazie stanów $\{|\varphi_\mu\rangle\}$

$$\hat{\rho}_{\mu\nu} = \langle\varphi_\mu|\hat{\rho}|\varphi_\nu\rangle. \quad (18)$$

Operator gęstości $\hat{\rho}$ nazywany jest często **operatorem statystycznym**.

Definicja operatora gęstości

Wzór (15) może posłużyć do zdefiniowania operatora $\hat{\rho}$, który definiujemy za pomocą jego elementów macierzowych w bazie stanów $\{|\varphi_\mu\rangle\}$

$$\hat{\rho}_{\mu\nu} = \langle\varphi_\mu|\hat{\rho}|\varphi_\nu\rangle. \quad (18)$$

Operator gęstości $\hat{\rho}$ nazywany jest często **operatorem statystycznym**.

Operator $\hat{\rho}$ działa w przestrzeni stanów $\{|\varphi_\mu\rangle\}$ układu \mathcal{U} .

Przeprowadzone w (14) obliczenie wartości oczekiwanej operatora $\hat{\Omega}$ zawiera **podwójne średniowanie**:

Przeprowadzone w (14) obliczenie wartości oczekiwanej operatora $\hat{\Omega}$ zawiera **podwójne średniowanie**:

- (1) najpierw obliczamy średnie kwantowo-mechaniczne $\langle \varphi_\mu | \hat{\Omega} | \varphi_\nu \rangle$ za pomocą całkowania po współrzędnych przestrzennych x układu \mathcal{U} ,

Przeprowadzone w (14) obliczenie wartości oczekiwanej operatora $\hat{\Omega}$ zawiera **podwójne średniowanie**:

- (1) najpierw obliczamy średnie kwantowo-mechaniczne $\langle \varphi_\mu | \hat{\Omega} | \varphi_\nu \rangle$ za pomocą całkowania po współrzędnych przestrzennych x układu \mathcal{U} ,
- (2) a następnie dokonujemy średniowanie po stanach $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} za pomocą macierzy gęstości $\rho_{\mu\nu}$.

Przeprowadzone w (14) obliczenie wartości oczekiwanej operatora $\hat{\Omega}$ zawiera **podwójne średniowanie**:

- (1) najpierw obliczamy średnie kwantowo-mechaniczne $\langle \varphi_\mu | \hat{\Omega} | \varphi_\nu \rangle$ za pomocą całkowania po współrzędnych przestrzennych x układu \mathcal{U} ,
- (2) a następnie dokonujemy średniowanie po stanach $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} za pomocą macierzy gęstości $\rho_{\mu\nu}$.

Aby lepiej oznaczyć tę procedurę podwójnego średniowania, lewą stronę (13) czasem zapisuje się jako

Przeprowadzone w (14) obliczenie wartości oczekiwanej operatora $\hat{\Omega}$ zawiera **podwójne średniowanie**:

- (1) najpierw obliczamy średnie kwantowo-mechaniczne $\langle \varphi_\mu | \hat{\Omega} | \varphi_\nu \rangle$ za pomocą całkowania po współrzędnych przestrzennych x układu \mathcal{U} ,
- (2) a następnie dokonujemy średniowanie po stanach $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} za pomocą macierzy gęstości $\rho_{\mu\nu}$.

Aby lepiej oznaczyć tę procedurę podwójnego średniowania, lewą stronę (13) czasem zapisuje się jako

$$\langle\langle \hat{\Omega} \rangle\rangle$$

Przeprowadzone w (14) obliczenie wartości oczekiwanej operatora $\hat{\Omega}$ zawiera **podwójne średniowanie**:

- (1) najpierw obliczamy średnie kwantowo-mechaniczne $\langle \varphi_\mu | \hat{\Omega} | \varphi_\nu \rangle$ za pomocą całkowania po współrzędnych przestrzennych x układu \mathcal{U} ,
- (2) a następnie dokonujemy średniowanie po stanach $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} za pomocą macierzy gęstości $\rho_{\mu\nu}$.

Aby lepiej oznaczyć tę procedurę podwójnego średniowania, lewą stronę (13) czasem zapisuje się jako

$$\langle\langle \hat{\Omega} \rangle\rangle$$

lub

$$\overline{\langle \hat{\Omega} \rangle},$$

Przeprowadzone w (14) obliczenie wartości oczekiwanej operatora $\hat{\Omega}$ zawiera **podwójne średniowanie**:

- (1) najpierw obliczamy średnie kwantowo-mechaniczne $\langle \varphi_\mu | \hat{\Omega} | \varphi_\nu \rangle$ za pomocą całkowania po współrzędnych przestrzennych x układu \mathcal{U} ,
- (2) a następnie dokonujemy średniowanie po stanach $\{|\eta_\alpha\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} za pomocą macierzy gęstości $\rho_{\mu\nu}$.

Aby lepiej oznaczyć tę procedurę podwójnego średniowania, lewą stronę (13) czasem zapisuje się jako

$$\langle\langle \hat{\Omega} \rangle\rangle$$

lub

$$\overline{\langle \hat{\Omega} \rangle},$$

gdzie górna kreska oznacza średniowania po pewnym przedziale czasu.

Obliczenie średniej po stanach $\{|\varphi_\mu\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} ma sens uśrednienia po czasie wielkości mierzonej Ω . Dokonując pomiaru wielkości Ω wyznaczamy nie jej wartość chwilową, lecz jej wartość uśrednioną po przedziale czasu t_{pom} .

Obliczenie średniej po stanach $\{|\varphi_\mu\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} ma sens uśrednienia po czasie wielkości mierzonej Ω . Dokonując pomiaru wielkości Ω wyznaczamy nie jej wartość chwilową, lecz jej wartość uśrednioną po przedziale czasu t_{pom} .

Ten przedział czasu powinien być krótki w porównaniu z czasową zdolnością rozdzielczą t_{rozd} przyrządu pomiarowego, ale długi w porównaniu z charakterystycznym czasem relaksacji t_{rel} mierzonego układu \mathcal{U} .

Obliczenie średniej po stanach $\{|\varphi_\mu\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} ma sens uśrednienia po czasie wielkości mierzonej Ω . Dokonując pomiaru wielkości Ω wyznaczamy nie jej wartość chwilową, lecz jej wartość uśrednioną po przedziale czasu t_{pom} .

Ten przedział czasu powinien być krótki w porównaniu z czasową zdolnością rozdzielczą t_{rozd} przyrządu pomiarowego, ale długi w porównaniu z charakterystycznym czasem relaksacji t_{rel} mierzonego układu \mathcal{U} .

Zatem powinny być spełnione nierówności

Obliczenie średniej po stanach $\{|\varphi_\mu\rangle\}$ otoczenia \mathcal{O} ma sens uśrednienia po czasie wielkości mierzonej Ω . Dokonując pomiaru wielkości Ω wyznaczamy nie jej wartość chwilową, lecz jej wartość uśrednioną po przedziale czasu t_{pom} .

Ten przedział czasu powinien być krótki w porównaniu z czasową zdolnością rozdzielczą t_{rozd} przyrządu pomiarowego, ale długi w porównaniu z charakterystycznym czasem relaksacji t_{rel} mierzonego układu \mathcal{U} .

Zatem powinny być spełnione nierówności

$$t_{rel} \ll t_{pom} \ll t_{rozd} .$$

Korzystając z warunku zupełności bazy $\{|\varphi_\mu\rangle\}$, czyli

Korzystając z warunku zupełności bazy $\{|\varphi_\mu\rangle\}$, czyli

$$\sum_{\nu} |\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu| = \hat{I}, \quad (19)$$

Korzystając z warunku zupełności bazy $\{|\varphi_\mu\rangle\}$, czyli

$$\sum_{\nu} |\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu| = \hat{I}, \quad (19)$$

można wartość oczekiwaną operatora $\hat{\Omega}$ wyrazić w inny sposób.

Korzystając z warunku zupełności bazy $\{|\varphi_\mu\rangle\}$, czyli

$$\sum_{\nu} |\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu| = \hat{I}, \quad (19)$$

można wartość oczekiwaną operatora $\hat{\Omega}$ wyrazić w inny sposób. Zgodnie z (16) otrzymujemy

Korzystając z warunku zupełności bazy $\{|\varphi_\mu\rangle\}$, czyli

$$\sum_\nu |\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu| = \hat{I}, \quad (19)$$

można wartość oczekiwaną operatora $\hat{\Omega}$ wyrazić w inny sposób. Zgodnie z (16) otrzymujemy

$$\langle\hat{\Omega}\rangle = \sum_{\mu\nu} \langle\varphi_\mu|\hat{\Omega}|\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu|\varphi_\mu\rangle$$

Korzystając z warunku zupełności bazy $\{|\varphi_\mu\rangle\}$, czyli

$$\sum_{\nu} |\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu| = \hat{I}, \quad (19)$$

można wartość oczekiwaną operatora $\hat{\Omega}$ wyrazić w inny sposób. Zgodnie z (16) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle\hat{\Omega}\rangle &= \sum_{\mu\nu} \langle\varphi_\mu|\hat{\Omega}|\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu|\hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle \\ &= \sum_{\mu} \langle\varphi_\mu|\hat{\Omega} \underbrace{\sum_{\nu} |\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu|}_{\hat{I}} \hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle \end{aligned}$$

Korzystając z warunku zupełności bazy $\{|\varphi_\mu\rangle\}$, czyli

$$\sum_{\nu} |\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu| = \hat{I}, \quad (19)$$

można wartość oczekiwaną operatora $\hat{\Omega}$ wyrazić w inny sposób. Zgodnie z (16) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle\hat{\Omega}\rangle &= \sum_{\mu\nu} \langle\varphi_\mu|\hat{\rho}|\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu|\hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle \\ &= \sum_{\mu} \langle\varphi_\mu|\hat{\rho} \underbrace{\sum_{\nu} |\varphi_\nu\rangle\langle\varphi_\nu|}_{\hat{I}} \hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle \\ &= \sum_{\mu} \langle\varphi_\mu|\hat{\rho}\hat{\Omega}|\varphi_\mu\rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

Wynik średniowania można zapisać jako

Wynik średniowania można zapisać jako

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \text{tr} \hat{\rho} \hat{\Omega} , \quad (21)$$

Wynik średniowania można zapisać jako

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = tr \hat{\rho} \hat{\Omega} , \quad (21)$$

gdzie

$$tr \hat{A} \stackrel{def}{=} \sum_{\mu} A_{\mu\mu} \quad (22)$$

oznacza **śląd macierzowej reprezentacji operatora \hat{A}** (w skrócie mówimy o **śladzie operatora \hat{A}**).

Wynik średniowania można zapisać jako

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = tr \hat{\rho} \hat{\Omega} , \quad (21)$$

gdzie

$$tr \hat{A} \stackrel{def}{=} \sum_{\mu} A_{\mu\mu} \quad (22)$$

oznacza **śląd macierzowej reprezentacji operatora \hat{A}** (w skrócie mówimy o **śladzie operatora \hat{A}**). Inaczej ślad jest sumą elementów diagonalnych macierzy.

Własności operatora gęstości

Korzystamy z definicji (15) do obliczenia

Korzystamy z definicji (15) do obliczenia

$$\varrho_{\nu\mu}^* = \left(\sum_{\alpha} d_{\nu\alpha} d_{\mu\alpha}^* \right)^* = \sum_{\alpha} d_{\mu\alpha} d_{\nu\alpha}^* = \varrho_{\mu\nu} . \quad (23)$$

Korzystamy z definicji (15) do obliczenia

$$\varrho_{\nu\mu}^* = \left(\sum_{\alpha} d_{\nu\alpha} d_{\mu\alpha}^* \right)^* = \sum_{\alpha} d_{\mu\alpha} d_{\nu\alpha}^* = \varrho_{\mu\nu} . \quad (23)$$

Wynika stąd, że macierz gęstości jest **macierzą hermitowską**, czyli operator gęstości jest **operatorem hermitowskim**.

Korzystamy z definicji (15) do obliczenia

$$\varrho_{\nu\mu}^* = \left(\sum_{\alpha} d_{\nu\alpha} d_{\mu\alpha}^* \right)^* = \sum_{\alpha} d_{\mu\alpha} d_{\nu\alpha}^* = \varrho_{\mu\nu} . \quad (23)$$

Wynika stąd, że macierz gęstości jest **macierzą hermitowską**, czyli operator gęstości jest **operatorem hermitowskim**.

\implies Wartości własne operatora gęstości są **liczbami rzeczywistymi**.

Operator $\hat{\rho}$ posiada ortonormalny zupełny zbiór stanów własnych spełniających równania własne

Operator $\hat{\rho}$ posiada ortonormalny zupełny zbiór stanów własnych spełniających równania własne

$$\hat{\rho}|i\rangle = w_i|i\rangle, \quad (24)$$

Operator $\hat{\rho}$ posiada ortonormalny zupełny zbiór stanów własnych spełniających równania własne

$$\hat{\rho}|i\rangle = w_i|i\rangle , \quad (24)$$

gdzie w_i są rzeczywistymi wartościami własnymi.

Operator $\hat{\rho}$ posiada ortonormalny zupełny zbiór stanów własnych spełniających równania własne

$$\hat{\rho}|i\rangle = w_i|i\rangle , \quad (24)$$

gdzie w_i są rzeczywistymi wartościami własnymi. Ponadto

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \quad , \quad \sum_i |i\rangle\langle i| = \hat{I} .$$

Operator gęstości można zapisać w postaci

Operator gęstości można zapisać w postaci

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i |i\rangle \langle i|. \quad (25)$$

W dalszych rozważaniach szczególnie ważne będą następujące dwie własności operatora gęstości:

W dalszych rozważaniach szczególnie ważne będą następujące dwie własności operatora gęstości:

(1) Jeżeli operator $\hat{\Omega}$ jest operatorem jednostkowym, czyli $\hat{\Omega} = \hat{I}$, to

$$\text{tr} \hat{\rho} \hat{I} = \text{tr} \hat{\rho} = \sum_i w_i . \quad (26)$$

W dalszych rozważaniach szczególnie ważne będą następujące dwie własności operatora gęstości:

(1) Jeżeli operator $\hat{\Omega}$ jest operatorem jednostkowym, czyli $\hat{\Omega} = \hat{I}$, to

$$\text{tr} \hat{\rho} \hat{I} = \text{tr} \hat{\rho} = \sum_i w_i . \quad (26)$$

Natomiast wartość oczekiwana operatora jednostkowego obliczona wg. (13) wynosi

W dalszych rozważaniach szczególnie ważne będą następujące dwie własności operatora gęstości:

(1) Jeżeli operator $\hat{\Omega}$ jest operatorem jednostkowym, czyli $\hat{\Omega} = \hat{I}$, to

$$\text{tr} \hat{\rho} \hat{I} = \text{tr} \hat{\rho} = \sum_i w_i . \quad (26)$$

Natomiast wartość oczekiwana operatora jednostkowego obliczona wg. (13) wynosi

$$\langle \hat{I} \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1 . \quad (27)$$

W dalszych rozważaniach szczególnie ważne będą następujące dwie własności operatora gęstości:

(1) Jeżeli operator $\hat{\Omega}$ jest operatorem jednostkowym, czyli $\hat{\Omega} = \hat{I}$, to

$$\text{tr} \hat{\rho} \hat{I} = \text{tr} \hat{\rho} = \sum_i w_i . \quad (26)$$

Natomiast wartość oczekiwana operatora jednostkowego obliczona wg. (13) wynosi

$$\langle \hat{I} \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1 . \quad (27)$$

Z porównania (26) i (27) wynika, że

$$\sum_i w_i = 1 . \quad (28)$$

(2) Jeżeli operator $\hat{\Omega}$ ma postać

$$\hat{\Omega} = |j\rangle\langle j| ,$$

(2) Jeżeli operator $\hat{\Omega}$ ma postać

$$\hat{\Omega} = |j\rangle\langle j| ,$$

to wg. (13)

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \psi | j \rangle \langle j | \psi \rangle = |\langle j | \psi \rangle|^2 \geq 0 . \quad (29)$$

(2) Jeżeli operator $\hat{\Omega}$ ma postać

$$\hat{\Omega} = |j\rangle\langle j| ,$$

to wg. (13)

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \psi | j \rangle \langle j | \psi \rangle = |\langle j | \psi \rangle|^2 \geq 0 . \quad (29)$$

Natomiast wg. (21)

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \text{tr} \hat{\rho} \hat{\Omega} = \text{tr} \sum_i w_i |i\rangle \underbrace{\langle i | j \rangle}_{\delta_{ij}} \langle j |$$

(2) Jeżeli operator $\hat{\Omega}$ ma postać

$$\hat{\Omega} = |j\rangle\langle j| ,$$

to wg. (13)

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \psi | j \rangle \langle j | \psi \rangle = |\langle j | \psi \rangle|^2 \geq 0 . \quad (29)$$

Natomiast wg. (21)

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Omega} \rangle = \text{tr} \hat{\rho} \hat{\Omega} &= \text{tr} \sum_i w_i |i\rangle \underbrace{\langle i | j \rangle}_{\delta_{ij}} \langle j | \\ &= \sum_k w_j \underbrace{\langle k | j \rangle}_{\delta_{kj}} \underbrace{\langle j | k \rangle}_{\delta_{jk}} = w_k . \end{aligned} \quad (30)$$

(2) Jeżeli operator $\hat{\Omega}$ ma postać

$$\hat{\Omega} = |j\rangle\langle j| ,$$

to wg. (13)

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \psi | j \rangle \langle j | \psi \rangle = |\langle j | \psi \rangle|^2 \geq 0 . \quad (29)$$

Natomiast wg. (21)

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Omega} \rangle = \text{tr} \hat{\rho} \hat{\Omega} &= \text{tr} \sum_i w_i |i\rangle \underbrace{\langle i | j \rangle \langle j |}_{\delta_{ij}} \\ &= \sum_k w_j \underbrace{\langle k | j \rangle}_{\delta_{kj}} \underbrace{\langle j | k \rangle}_{\delta_{jk}} = w_k . \end{aligned} \quad (30)$$

Z porównania (29) i (30) wynika, że

$$w_k \geq 0 . \quad (31)$$

Podsumowując, wartości własne operatora gęstości są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi o sumie równej 1.

Podsumowując, wartości własne operatora gęstości są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi o sumie równej 1. Biorąc pod uwagę własności (1) i (2) interpretujemy wartość własną w_i jako **prawdopodobieństwo tego, że układ kwantowy \mathcal{U} znajduje się w stanie kwantowym $|i\rangle$.**

Podsumowując, wartości własne operatora gęstości są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi o sumie równej 1. Biorąc pod uwagę własności (1) i (2) interpretujemy wartość własną w_i jako **prawdopodobieństwo tego, że układ kwantowy \mathcal{U} znajduje się w stanie kwantowym $|i\rangle$.**

Uwaga

Podsumowując, wartości własne operatora gęstości są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi o sumie równej 1. Biorąc pod uwagę własności (1) i (2) interpretujemy wartość własną w_i jako **prawdopodobieństwo tego, że układ kwantowy \mathcal{U} znajduje się w stanie kwantowym $|i\rangle$.**

Uwaga

Prawdopodobieństwa w_i posiadają własności klasyczne, tzn. **nie podlegają kwantowej interferencji.**

Własność (*) śladu operatora:

Własność (*) śladu operatora:

Ślad operatora nie zależy od macierzowej reprezentacji tego operatora.

Własność (*) śladu operatora:

Ślad operatora nie zależy od macierzowej reprezentacji tego operatora.

Przejsie do innej reprezentacji polega na dokonaniu transformacji unitarnej

$$\hat{A}' = \hat{T}^\dagger \hat{A} \hat{T}, \quad (32)$$

Własność (*) śladu operatora:

Ślad operatora nie zależy od macierzowej reprezentacji tego operatora.

Przejsie do innej reprezentacji polega na dokonaniu transformacji unitarnej

$$\hat{A}' = \hat{T}^\dagger \hat{A} \hat{T}, \quad (32)$$

przy czym $\hat{T}^\dagger = \hat{T}^{-1}$.

Własność (*) śladu operatora:

Ślad operatora nie zależy od macierzowej reprezentacji tego operatora.

Przejsie do innej reprezentacji polega na dokonaniu transformacji unitarnej

$$\hat{A}' = \hat{T}^\dagger \hat{A} \hat{T}, \quad (32)$$

przy czym $\hat{T}^\dagger = \hat{T}^{-1}$.

Własność (*) zapisujemy w postaci

$$\text{tr} \hat{A}' = \text{tr} \hat{A}. \quad (33)$$

Korzystamy z własności (*) i obliczamy ślad operatora $\hat{\rho}\hat{\Omega}$ w bazie stanów własnych $\{|i\rangle\}$ operatora gęstości $\hat{\rho}$

Korzystamy z własności (*) i obliczamy ślad operatora $\hat{\rho}\hat{\Omega}$ w bazie stanów własnych $\{|i\rangle\}$ operatora gęstości $\hat{\rho}$

$$\langle\hat{\Omega}\rangle = tr\hat{\rho}\hat{\Omega} = \sum_j \langle j|\hat{\rho}\hat{\Omega}|j\rangle$$

Korzystamy z własności (*) i obliczamy ślad operatora $\hat{\rho}\hat{\Omega}$ w bazie stanów własnych $\{|i\rangle\}$ operatora gęstości $\hat{\rho}$

$$\begin{aligned}\langle\hat{\Omega}\rangle = tr\hat{\rho}\hat{\Omega} &= \sum_j \langle j|\hat{\rho}\hat{\Omega}|j\rangle \\ &= \sum_{ij} w_i \underbrace{\langle j|i\rangle}_{\delta_{ij}} \langle i|\hat{\Omega}|j\rangle = \sum_i w_i \langle i|\hat{\Omega}|i\rangle .\end{aligned}\quad (34)$$

Korzystamy z własności (*) i obliczamy ślad operatora $\hat{\rho}\hat{\Omega}$ w bazie stanów własnych $\{|i\rangle\}$ operatora gęstości $\hat{\rho}$

$$\begin{aligned}\langle\hat{\Omega}\rangle = tr\hat{\rho}\hat{\Omega} &= \sum_j \langle j|\hat{\rho}\hat{\Omega}|j\rangle \\ &= \sum_{ij} w_i \underbrace{\langle j|i\rangle}_{\delta_{ij}} \langle i|\hat{\Omega}|j\rangle = \sum_i w_i \langle i|\hat{\Omega}|i\rangle .\end{aligned}\quad (34)$$

Wynik obliczeń (34) możemy zapisać w reprezentacji macierzowej jako

Korzystamy z własności (*) i obliczamy ślad operatora $\hat{\rho}\hat{\Omega}$ w bazie stanów własnych $\{|i\rangle\}$ operatora gęstości $\hat{\rho}$

$$\begin{aligned}\langle\hat{\Omega}\rangle = tr\hat{\rho}\hat{\Omega} &= \sum_j \langle j|\hat{\rho}\hat{\Omega}|j\rangle \\ &= \sum_{ij} w_i \underbrace{\langle j|i\rangle}_{\delta_{ij}} \langle i|\hat{\Omega}|j\rangle = \sum_i w_i \langle i|\hat{\Omega}|i\rangle .\end{aligned}\quad (34)$$

Wynik obliczeń (34) możemy zapisać w reprezentacji macierzowej jako

$$\langle\hat{\Omega}\rangle = \sum_i w_i \Omega_{ii} .\quad (35)$$

Podsumowanie

Podsumowanie

Wzór (35) podaje przepis na obliczenie wartości oczekiwanej operatora $\hat{\Omega}$, który działa w przestrzeni stanów układu \mathcal{U} .

Podsumowanie

Wzór (35) podaje przepis na obliczenie wartości oczekiwanej operatora $\hat{\Omega}$, który działa w przestrzeni stanów układu \mathcal{U} . Przepis ten uwzględnia fakt obecności otoczenia \mathcal{O} .

Podsumowanie

Wzór (35) podaje przepis na obliczenie wartości oczekiwanej operatora $\hat{\Omega}$, który działa w przestrzeni stanów układu \mathcal{U} .

Przepis ten uwzględnia fakt obecności otoczenia \mathcal{O} .

We wzorze (35) do obliczenia wartości oczekiwanej wykorzystujemy prawdopodobieństwa w_i .

Podsumowanie

Wzór (35) podaje przepis na obliczenie wartości oczekiwanej operatora $\hat{\Omega}$, który działa w przestrzeni stanów układu \mathcal{U} .

Przepis ten uwzględnia fakt obecności otoczenia \mathcal{O} .

We wzorze (35) do obliczenia wartości oczekiwanej wykorzystujemy prawdopodobieństwa w_i . Przypomina on zatem odpowiedni wzór klasyczny na obliczanie wartości oczekiwanej

$$\langle \Omega \rangle_{klas} = \sum_i w_i \Omega_i .$$

Stany czyste i mieszane

Jeżeli wszystkie wartości własne w_i – za wyjątkiem jednej – są równe zero, czyli

Jeżeli wszystkie wartości własne w_i – za wyjątkiem jednej – są równe zero, czyli

$$w_i = \delta_{ij} , \quad (36)$$

Jeżeli wszystkie wartości własne w_i – za wyjątkiem jednej – są równe zero, czyli

$$w_i = \delta_{ij} , \quad (36)$$

to układ kwantowy jest w **stanie czystym**.

Jeżeli wszystkie wartości własne w_i – za wyjątkiem jednej – są równe zero, czyli

$$w_i = \delta_{ij} , \quad (36)$$

to układ kwantowy jest w **stanie czystym**.

W przypadku przeciwnym układ kwantowy znajduje się w **stanie mieszanym**.

Jeżeli wszystkie wartości własne w_i – za wyjątkiem jednej – są równe zero, czyli

$$w_i = \delta_{ij} , \quad (36)$$

to układ kwantowy jest w **stanie czystym**.

W przypadku przeciwnym układ kwantowy znajduje się w **stanie mieszanym**.

Stan czysty będziemy oznaczać wskaźnikiem

$$j \equiv i_p = i_{pure} .$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby układ kwantowy był w stanie czystym jest spełnienie własności

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby układ kwantowy był w stanie czystym jest spełnienie własności

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} . \quad (37)$$

Dowód

Dowód

(1) Warunek konieczny

Dowód

(1) Warunek konieczny

Jeżeli układ jest w stanie czystym, to zachodzi

Dowód

(1) Warunek konieczny

Jeżeli układ jest w stanie czystym, to zachodzi

$$\hat{\rho} = \sum_i \delta_{ii_p} |i\rangle\langle i| = |i_p\rangle\langle i_p|. \quad (38)$$

Dowód

(1) Warunek konieczny

Jeżeli układ jest w stanie czystym, to zachodzi

$$\hat{\rho} = \sum_i \delta_{ii} |i\rangle\langle i| = |i_p\rangle\langle i_p|. \quad (38)$$

Wtedy

$$\hat{\rho}^2 = |i_p\rangle\langle i_p| |i_p\rangle\langle i_p| = |i_p\rangle\langle i_p| = \hat{\rho}. \quad (39)$$

(2) Warunek wystarczający

(2) Warunek wystarczający

Zakładamy spełnienie własności

$$\hat{\varrho}^2 = \hat{\varrho} . \quad (40)$$

(2) Warunek wystarczający

Zakładamy spełnienie własności

$$\hat{\varrho}^2 = \hat{\varrho} . \quad (40)$$

Obliczamy lewą stronę (40)

(2) Warunek wystarczający

Zakładamy spełnienie własności

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} . \quad (40)$$

Obliczamy lewą stronę (40)

$$L = \sum_{ij} w_i w_j |i\rangle \langle i|j\rangle \langle j| = \sum_i w_i^2 |i\rangle \langle i| . \quad (41)$$

(2) Warunek wystarczający

Zakładamy spełnienie własności

$$\hat{\varrho}^2 = \hat{\varrho} . \quad (40)$$

Obliczamy lewą stronę (40)

$$L = \sum_{ij} w_i w_j |i\rangle \langle i|j\rangle \langle j| = \sum_i w_i^2 |i\rangle \langle i| . \quad (41)$$

Natomiast prawa strona (40) ma postać

(2) Warunek wystarczający

Zakładamy spełnienie własności

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} . \quad (40)$$

Obliczamy lewą stronę (40)

$$L = \sum_{ij} w_i w_j |i\rangle \langle i|j\rangle \langle j| = \sum_i w_i^2 |i\rangle \langle i| . \quad (41)$$

Natomiast prawa strona (40) ma postać

$$P = \sum_i w_i |i\rangle \langle i| . \quad (42)$$

$L = P$ wtedy i tylko wtedy,

$L = P$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $w_i^2 = w_i$.

$L = P$ wtedy i tylko wtedy,

gdy $w_i^2 = w_i$.

$\implies w_i = 0$ lub $w_i = 1$, czyli $w_i = \delta_{ij}$.

$L = P$ wtedy i tylko wtedy,

gdy $w_i^2 = w_i$.

$\implies w_i = 0$ lub $w_i = 1$, czyli $w_i = \delta_{ij}$.

A zatem $\hat{\rho} = |i\rangle\langle i|$, czyli układ jest w stanie czystym.

Obliczmy elementy macierzy gęstości w dowolnej bazie $\{|\varphi_i\rangle\}$ dla stanów czystych i mieszanych.

Obliczmy elementy macierzy gęstości w dowolnej bazie $\{|\varphi_i\rangle\}$ dla stanów czystych i mieszanych.

Dla stanu czystego $|i_p\rangle$ otrzymujemy

$$\rho_{ij} = \langle \varphi_i | \hat{\rho} | \varphi_j \rangle$$

Obliczmy elementy macierzy gęstości w dowolnej bazie $\{|\varphi_i\rangle\}$ dla stanów czystych i mieszanych.

Dla stanu czystego $|i_p\rangle$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\rho_{ij} &= \langle\varphi_i|\hat{\rho}|\varphi_j\rangle \\ &= \langle\varphi_i|i_p\rangle\langle i_p|\varphi_j\rangle\end{aligned}$$

Obliczmy elementy macierzy gęstości w dowolnej bazie $\{|\varphi_i\rangle\}$ dla stanów czystych i mieszanych.

Dla stanu czystego $|i_p\rangle$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\rho_{ij} &= \langle\varphi_i|\hat{\rho}|\varphi_j\rangle \\ &= \langle\varphi_i|i_p\rangle\langle i_p|\varphi_j\rangle \\ &= \langle\varphi_i|i_p\rangle\langle\varphi_j|i_p\rangle^* .\end{aligned}\tag{43}$$

Obliczmy elementy macierzy gęstości w dowolnej bazie $\{|\varphi_i\rangle\}$ dla stanów czystych i mieszanych.

Dla stanu czystego $|i_p\rangle$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\rho_{ij} &= \langle\varphi_i|\hat{\rho}|\varphi_j\rangle \\ &= \langle\varphi_i|i_p\rangle\langle i_p|\varphi_j\rangle \\ &= \langle\varphi_i|i_p\rangle\langle\varphi_j|i_p\rangle^* .\end{aligned}\tag{43}$$

Natomiast dla stanów mieszanych otrzymujemy bardziej ogólne wyrażenie

$$\rho_{ij} = \sum_k \langle\varphi_i|k\rangle\langle\varphi_j|k\rangle^* .\tag{44}$$

Diskusja

Dyskusja

Wprowadzone na wykładzie 2. **postulaty mechaniki kwantowej są słuszne wyłącznie dla stanów czystych.**

Dyskusja

Wprowadzone na wykładzie 2. **postulaty mechaniki kwantowej są słuszne wyłącznie dla stanów czystych.** Postulaty te są podstawowymi prawami mechaniki kwantowej, których stosowalność jest ograniczona do stanów czystych.

Dyskusja

Wprowadzone na wykładzie 2. **postulaty mechaniki kwantowej są słuszne wyłącznie dla stanów czystych.** Postulaty te są podstawowymi prawami mechaniki kwantowej, których stosowalność jest ograniczona do stanów czystych. Zbiór stanów czystych jest wprawdzie dość szeroki, jednak nie obejmuje on wszystkich możliwych stanów kwantowych.

Dotychczas postulaty mechaniki kwantowej były formułowane w języku wektorów stanu tworzących przestrzeń Hilberta.

Dotychczas postulaty mechaniki kwantowej były formułowane w języku wektorów stanu tworzących przestrzeń Hilberta. Mają one zastosowanie do takich przypadków, gdy do opisu układu kwantowego wystarcza zbiór stanów czystych $\{|i_p\rangle\}$.

Dotychczas postulaty mechaniki kwantowej były formułowane w języku wektorów stanu tworzących przestrzeń Hilberta. Mają one zastosowanie do takich przypadków, gdy do opisu układu kwantowego wystarcza zbiór stanów czystych $\{|i_p\rangle\}$.

Wtedy w każdej chwili czasowej t układ kwantowy znajduje się w jednym ze stanów czystych $|i_p\rangle$ z prawdopodobieństwem $w_{i_p} = 1$, a prawdopodobieństwo realizacji w układzie innych stanów kwantowych $|i\rangle$, gdzie $i \neq i_p$, jest równe zero ($w_i = 0$ dla $i \neq i_p$).

W opisie układu w stanie czystym na ogół (\star) zaniedbujemy oddziaływanie rozważanego układu z otoczeniem (resztą Wszechświata),

W opisie układu w stanie czystym na ogół (\star) zaniedbujemy oddziaływanie rozważanego układu z otoczeniem (resztą Wszechświata), czyli traktujemy układ \mathcal{U} jako **układ izolowany**.

W opisie układu w stanie czystym na ogół (\star) zaniebujemy oddziaływanie rozważanego układu z otoczeniem (resztą Wszechświata), czyli traktujemy układ \mathcal{U} jako **układ izolowany**.

\star Można jednak uwzględnić oddziaływanie układu \mathcal{U} z **polami zewnętrznymi**, których źródłem jest otoczenie.

Wynika stąd potrzeba ogólniejszego sformułowania postulatów mechaniki kwantowej, które będą słuszne także dla stanów mieszanych.

Wynika stąd potrzeba ogólniejszego sformułowania postulatów mechaniki kwantowej, które będą słuszne także dla stanów mieszanych. W tym celu można użyć operatora gęstości.

Wynika stąd potrzeba ogólniejszego sformułowania postulatów mechaniki kwantowej, które będą słuszne także dla stanów mieszanych. W tym celu można użyć operatora gęstości. Zastosowanie operatora gęstości pozwoli nam na uwzględnienie w sposób naturalny oddziaływania układu kwantowego z otoczeniem.

Wynika stąd potrzeba ogólniejszego sformułowania postulatów mechaniki kwantowej, które będą słuszne także dla stanów mieszanych. W tym celu można użyć operatora gęstości. Zastosowanie operatora gęstości pozwoli nam na uwzględnienie w sposób naturalny oddziaływania układu kwantowego z otoczeniem. Zajmę się tym w dalszej części tego wykładu.

Macierz gęstości w reprezentacji położeniowej

Przypominam, że oznaczyliśmy symbolem x zbiór wektorów
położeń cząstek tworzących układ \mathcal{U} .

Przypominam, że oznaczyliśmy symbolem x zbiór wektorów
położeń cząstek tworzących układ \mathcal{U} . A zatem funkcja własna
operatora \hat{q} zapisana w reprezentacji położeniowej ma postać

Przypominam, że oznaczyliśmy symbolem x zbiór wektorów
położeń cząstek tworzących układ \mathcal{U} . A zatem funkcja własna
operatora \hat{q} zapisana w reprezentacji położeniowej ma postać

$$i(x) = \langle x|i \rangle . \quad (45)$$

Przypominam, że oznaczyliśmy symbolem x zbiór wektorów położeń cząstek tworzących układ \mathcal{U} . A zatem funkcja własna operatora \hat{q} zapisana w reprezentacji położeniowej ma postać

$$i(x) = \langle x|i \rangle . \quad (45)$$

Macierz gęstości w reprezentacji położeniowej jest zdefiniowana jako

Przypominam, że oznaczyliśmy symbolem x zbiór wektorów położeń cząstek tworzących układ \mathcal{U} . A zatem funkcja własna operatora $\hat{\rho}$ zapisana w reprezentacji położeniowej ma postać

$$i(x) = \langle x|i \rangle . \quad (45)$$

Macierz gęstości w reprezentacji położeniowej jest zdefiniowana jako

$$\rho(x', x) \stackrel{def}{=} \langle x'|\hat{\rho}|x \rangle . \quad (46)$$

Wyznaczamy elementy macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej.

Wyznaczamy elementy macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej.

$$\rho(x', x) = \langle x' | \sum_i w_i |i\rangle \langle i|x\rangle$$

Wyznaczamy elementy macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej.

$$\begin{aligned}\rho(x', x) &= \langle x' | \sum_i w_i |i\rangle \langle i|x\rangle \\ &= \sum_i w_i \langle x'|i\rangle \langle i|x\rangle\end{aligned}$$

Wyznaczamy elementy macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej.

$$\begin{aligned}\rho(x', x) &= \langle x' | \sum_i w_i |i\rangle \langle i|x\rangle \\ &= \sum_i w_i \langle x'|i\rangle \langle i|x\rangle \\ &= \sum_i w_i i(x') i^*(x) .\end{aligned}\tag{47}$$

Wyznaczamy elementy macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej.

$$\begin{aligned}\rho(x', x) &= \langle x' | \sum_i w_i |i\rangle \langle i|x\rangle \\ &= \sum_i w_i \langle x'|i\rangle \langle i|x\rangle \\ &= \sum_i w_i i(x') i^*(x) .\end{aligned}\tag{47}$$

Dla stanu czystego $|i_p\rangle$ otrzymujemy

Wyznaczamy elementy macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej.

$$\begin{aligned}\varrho(x', x) &= \langle x' | \sum_i w_i |i\rangle \langle i|x\rangle \\ &= \sum_i w_i \langle x'|i\rangle \langle i|x\rangle \\ &= \sum_i w_i i(x') i^*(x) .\end{aligned}\tag{47}$$

Dla stanu czystego $|i_p\rangle$ otrzymujemy

$$\varrho(x', x) = i_p(x') i_p^*(x) .\tag{48}$$

Obliczamy teraz wartość oczekiwaną dowolnego operatora $\hat{\Omega}$ za pomocą macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej.

Obliczamy teraz wartość oczekiwaną dowolnego operatora $\hat{\Omega}$ za pomocą macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej.

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \text{tr} \hat{\rho} \hat{\Omega} = \int dx \langle x | \hat{\rho} \hat{\Omega} | x \rangle . \quad (49)$$

Korzystając z zupełności bazy $\{|x\rangle\}$ wektorów własnych operatora położenia,

Korzystając z zupełności bazy $\{|x\rangle\}$ wektorów własnych operatora położenia, czyli

$$\int dx |x\rangle\langle x| = \hat{I} , \quad (50)$$

Korzystając z zupełności bazy $\{|x\rangle\}$ wektorów własnych operatora położenia, czyli

$$\int dx |x\rangle\langle x| = \hat{I} , \quad (50)$$

przekształcamy wyrażenie podcałkowe po prawej stronie (44)

Korzystając z zupełności bazy $\{|x\rangle\}$ wektorów własnych operatora położenia, czyli

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \hat{I} , \quad (50)$$

przekształcamy wyrażenie podcałkowe po prawej stronie (44)

$$\langle x | \hat{\rho} \hat{\Omega} | x \rangle = \langle x | \hat{\rho} \left(\int dx' |x'\rangle \langle x'| \right) \hat{\Omega} | x \rangle$$

Korzystając z zupełności bazy $\{|x\rangle\}$ wektorów własnych operatora położenia, czyli

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \hat{I} , \quad (50)$$

przekształcamy wyrażenie podcałkowe po prawej stronie (44)

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{\rho} \hat{\Omega} | x \rangle &= \langle x | \hat{\rho} \left(\int dx' |x'\rangle \langle x'| \right) \hat{\Omega} | x \rangle \\ &= \int dx' \langle x | \hat{\rho} | x' \rangle \langle x' | \hat{\Omega} | x \rangle \end{aligned}$$

Korzystając z zupełności bazy $\{|x\rangle\}$ wektorów własnych operatora położenia, czyli

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \hat{I} , \quad (50)$$

przekształcamy wyrażenie podcałkowe po prawej stronie (44)

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{\rho} \hat{\Omega} | x \rangle &= \langle x | \hat{\rho} \left(\int dx' |x'\rangle \langle x'| \right) \hat{\Omega} | x \rangle \\ &= \int dx' \langle x | \hat{\rho} | x' \rangle \langle x' | \hat{\Omega} | x \rangle \\ &= \int dx' \varrho(x, x') \Omega(x', x) , \end{aligned} \quad (51)$$

Korzystając z zupełności bazy $\{|x\rangle\}$ wektorów własnych operatora położenia, czyli

$$\int dx |x\rangle \langle x| = \hat{I}, \quad (50)$$

przekształcamy wyrażenie podcałkowe po prawej stronie (44)

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{\rho} \hat{\Omega} | x \rangle &= \langle x | \hat{\rho} \left(\int dx' |x'\rangle \langle x'| \right) \hat{\Omega} | x \rangle \\ &= \int dx' \langle x | \hat{\rho} | x' \rangle \langle x' | \hat{\Omega} | x \rangle \\ &= \int dx' \varrho(x, x') \Omega(x', x), \end{aligned} \quad (51)$$

gdzie $\Omega(x, x') = \langle x' | \hat{\Omega} | x \rangle$ jest elementem macierzowym operatora $\hat{\Omega}$ w reprezentacji położeniowej.

Ostatecznie

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \int dx dx' \varrho(x, x') \Omega(x', x) . \quad (52)$$

Ostatecznie

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \int dx dx' \varrho(x, x') \Omega(x', x) . \quad (52)$$

Wzór (52) podaje sposób obliczania wartości oczekiwanej operatora w reprezentacji położeniowej za pomocą macierzy gęstości.

Wartość oczekiwaną operatora w reprezentacji położeniowej można również obliczyć za pomocą pełnej funkcji falowej $\psi(x, y)$ układu złożonego z układu kwantowego \mathcal{U} i otoczenia \mathcal{O} .

Wartość oczekiwaną operatora w reprezentacji położeniowej można również obliczyć za pomocą pełnej funkcji falowej $\psi(x, y)$ układu złożonego z układu kwantowego \mathcal{U} i otoczenia \mathcal{O} . Stosując ten sposób obliczania otrzymujemy

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle = \int dx dx' dy \psi^*(x', y) \hat{\Omega}(x', x) \psi(x, y) . \quad (53)$$

Wartość oczekiwaną operatora w reprezentacji położeniowej można również obliczyć za pomocą pełnej funkcji falowej $\psi(x, y)$ układu złożonego z układu kwantowego \mathcal{U} i otoczenia \mathcal{O} . Stosując ten sposób obliczania otrzymujemy

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \langle \psi | \hat{\Omega} | \psi \rangle = \int dx dx' dy \psi^*(x', y) \hat{\Omega}(x', x) \psi(x, y) . \quad (53)$$

Porównując wzory (52) i (53) otrzymujemy

$$\varrho(x, x') = \int dy \psi(x, y) \psi^*(x', y) . \quad (54)$$

Na podstawie (54) wyznaczmy element diagonalny macierzy gęstości

Na podstawie (54) wyznaczmy element diagonalny macierzy gęstości

$$\rho(x, x) = \int dy |\psi(x, y)|^2 . \quad (55)$$

Na podstawie (54) wyznaczmy element diagonalny macierzy gęstości

$$\varrho(x, x) = \int dy |\psi(x, y)|^2. \quad (55)$$

Element diagonalny macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej ma interpretację gęstości prawdopodobieństwa znalezienia układu \mathcal{U} w stanie kwantowym $|\psi\rangle$ o określonych położeniach x cząstek rozważanego układu przy dowolnych położeniach cząstek otoczenia \mathcal{O} .

Na podstawie (54) wyznaczmy element diagonalny macierzy gęstości

$$\varrho(x, x) = \int dy |\psi(x, y)|^2. \quad (55)$$

Element diagonalny macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej ma interpretację gęstości prawdopodobieństwa znalezienia układu \mathcal{U} w stanie kwantowym $|\psi\rangle$ o określonych położeniach x cząstek rozważanego układu przy dowolnych położeniach cząstek otoczenia \mathcal{O} .

Ważna uwaga:

Na podstawie (54) wyznaczmy element diagonalny macierzy gęstości

$$\varrho(x, x) = \int dy |\psi(x, y)|^2. \quad (55)$$

Element diagonalny macierzy gęstości w reprezentacji położeniowej ma interpretację gęstości prawdopodobieństwa znalezienia układu \mathcal{U} w stanie kwantowym $|\psi\rangle$ o określonych położeniach x cząstek rozważanego układu przy dowolnych położeniach cząstek otoczenia \mathcal{O} .

Ważna uwaga: Zawartość informacji w funkcji falowej $\varphi(x)$ układu \mathcal{U} i elemencie diagonalnym $\varrho(x, x)$ macierzy gęstości jest taka sama.

Diskusja

Dyskusja

Rozpatrywany układ kwantowy \mathcal{U} na ogół nie znajduje się w stanie czystym $|i_p\rangle$ wskutek oddziaływania z otoczeniem \mathcal{O} .

Dyskusja

Rozpatrywany układ kwantowy \mathcal{U} na ogół nie znajduje się w stanie czystym $|i_p\rangle$ wskutek oddziaływania z otoczeniem \mathcal{O} . Stąd zwykły kwantowo-mechaniczny opis tego układu (za pomocą stanów czystych) nie jest wystarczający.

Dyskusja

Rozpatrywany układ kwantowy \mathcal{U} na ogół nie znajduje się w stanie czystym $|i_p\rangle$ wskutek oddziaływania z otoczeniem \mathcal{O} . Stąd zwykły kwantowo-mechaniczny opis tego układu (za pomocą stanów czystych) nie jest wystarczający.

Pełny kwantowo-mechaniczny opis układu \mathcal{U} otrzymujemy za pomocą macierzy gęstości, która uwzględnia stany mieszane układu.

Równanie ruchu dla operatora gęstości

Reprezentacja (25) operatora gęstości w bazie jego stanów własnych oznacza, że w pewnej chwili czasu t_0 układ kwantowy \mathcal{U} może się znajdować w stanie kwantowym $|i\rangle$ z prawdopodobieństwem w_i .

Reprezentacja (25) operatora gęstości w bazie jego stanów własnych oznacza, że w pewnej chwili czasu t_0 układ kwantowy \mathcal{U} może się znajdować w stanie kwantowym $|i\rangle$ z prawdopodobieństwem w_i . W miarę upływu czasu stany własne operatora $\hat{\rho}$ ulegają zmianie, a zatem w dowolnej chwili czasu t operator gęstości ma postać

Reprezentacja (25) operatora gęstości w bazie jego stanów własnych oznacza, że w pewnej chwili czasu t_0 układ kwantowy \mathcal{U} może się znajdować w stanie kwantowym $|i\rangle$ z prawdopodobieństwem w_i . W miarę upływu czasu stany własne operatora $\hat{\rho}$ ulegają zmianie, a zatem w dowolnej chwili czasu t operator gęstości ma postać

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i w_i |i(t)\rangle \langle i(t)| . \quad (56)$$

Reprezentacja (25) operatora gęstości w bazie jego stanów własnych oznacza, że w pewnej chwili czasu t_0 układ kwantowy \mathcal{U} może się znajdować w stanie kwantowym $|i\rangle$ z prawdopodobieństwem w_i . W miarę upływu czasu stany własne operatora $\hat{\rho}$ ulegają zmianie, a zatem w dowolnej chwili czasu t operator gęstości ma postać

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i w_i |i(t)\rangle \langle i(t)| . \quad (56)$$

Prawdopodobieństwa w_i są wartościami własnymi operatora, a więc nie zależą od czasu.

Wektory stanów $|i(t)\rangle$ spełniają zależne od czasu równanie Schrödingera

Wektory stanów $|i(t)\rangle$ spełniają zależne od czasu równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d}{dt} |i(t)\rangle = \hat{H} |i(t)\rangle , \quad (57)$$

Wektory stanów $|i(t)\rangle$ spełniają zależne od czasu równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d}{dt} |i(t)\rangle = \hat{H} |i(t)\rangle , \quad (57)$$

gdzie \hat{H} jest niezależnym od czasu hamiltonianem układu \mathcal{U} .

Wektory stanów $|i(t)\rangle$ spełniają zależne od czasu równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d}{dt} |i(t)\rangle = \hat{H} |i(t)\rangle, \quad (57)$$

gdzie \hat{H} jest niezależnym od czasu hamiltonianem układu \mathcal{U} . Korzystając z (57) dla wektora stanu $|i(t)\rangle$ oraz z równania sprzężonego względem niego po hermitowsku

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle i(t)| = \langle i(t)| \hat{H} \quad (58)$$

Wektory stanów $|i(t)\rangle$ spełniają zależne od czasu równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d}{dt} |i(t)\rangle = \hat{H} |i(t)\rangle, \quad (57)$$

gdzie \hat{H} jest niezależnym od czasu hamiltonianem układu \mathcal{U} . Korzystając z (57) dla wektora stanu $|i(t)\rangle$ oraz z równania sprzężonego względem niego po hermitowsku

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle i(t)| = \langle i(t)| \hat{H} \quad (58)$$

dla wektora stanu $\langle i(t)|$

otrzymujemy równanie

otrzymujemy równanie

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (59)$$

gdzie $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ oznacza komutator operatorów.

otrzymujemy równanie

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (59)$$

gdzie $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ oznacza komutator operatorów.

Wzór (59) jest **równaniem ruchu dla operatora gęstości**.

Dla porównania:

Dla porównania:

Jeżeli $\partial \hat{\Omega}_H / \partial t = 0$, to operator $\hat{\Omega}_H$ zapisany w obrazie Heisenberga spełnia następujące równanie ruchu:

Dla porównania:

Jeżeli $\partial\hat{\Omega}_H/\partial t = 0$, to operator $\hat{\Omega}_H$ zapisany w obrazie Heisenberga spełnia następujące równanie ruchu:

$$i\hbar\frac{d\hat{\Omega}_H}{dt} = -[\hat{H}, \hat{\Omega}_H]. \quad (60)$$

Dla porównania:

Jeżeli $\partial\hat{\Omega}_H/\partial t = 0$, to operator $\hat{\Omega}_H$ zapisany w obrazie Heisenberga spełnia następujące równanie ruchu:

$$i\hbar\frac{d\hat{\Omega}_H}{dt} = -[\hat{H}, \hat{\Omega}_H]. \quad (60)$$

Transformacja od obrazu Schrödingera (S) do obrazu Heisenberga (H) dana jest wzorem

Dla porównania:

Jeżeli $\partial\hat{\Omega}_H/\partial t = 0$, to operator $\hat{\Omega}_H$ zapisany w obrazie Heisenberga spełnia następujące równanie ruchu:

$$i\hbar\frac{d\hat{\Omega}_H}{dt} = -[\hat{H}, \hat{\Omega}_H]. \quad (60)$$

Transformacja od obrazu Schrödingera (S) do obrazu Heisenberga (H) dana jest wzorem

$$\hat{\Omega}_H = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{\Omega}_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}. \quad (61)$$

Operator gęstości w kwantowej mechanice statystycznej

Jeżeli układ kwantowy \mathcal{U} oddziałuje z otoczeniem \mathcal{O} , to na ogół jego stany są stanami mieszanymi.

Jeżeli układ kwantowy \mathcal{U} oddziałuje z otoczeniem \mathcal{O} , to na ogół jego stany są stanami mieszanymi. Prawdopodobieństwa w_i zajmowania przez układ \mathcal{U} takich stanów podlegają prawom **kwantowej mechaniki statystycznej**.

Jeżeli układ kwantowy \mathcal{U} oddziałuje z otoczeniem \mathcal{O} , to na ogół jego stany są stanami mieszanymi. Prawdopodobieństwa w_i zajmowania przez układ \mathcal{U} takich stanów podlegają prawom **kwantowej mechaniki statystycznej**.

Oznacza to w szczególności, że wskutek uśrednienia po czasie nie obowiązuje kwantowo-mechaniczna własność interferencji amplitud prawdopodobieństw.

Jeżeli układ kwantowy \mathcal{U} oddziałuje z otoczeniem \mathcal{O} , to na ogół jego stany są stanami mieszanymi. Prawdopodobieństwa w_i zajmowania przez układ \mathcal{U} takich stanów podlegają prawom **kwantowej mechaniki statystycznej**.

Oznacza to w szczególności, że wskutek uśrednienia po czasie nie obowiązuje kwantowo-mechaniczna własność interferencji amplitud prawdopodobieństw.

Np. dla układu \mathcal{U} , który może się znajdować w jednym z dwóch stanów $|0\rangle$ lub $|1\rangle$ odpowiednio z prawdopodobieństwami w_0 lub w_1 prawdopodobieństwo w_{01} tego, że układ \mathcal{U} będzie się znajdował w stanie $|0\rangle$ lub w stanie $|1\rangle$ wynosi

Jeżeli układ kwantowy \mathcal{U} oddziałuje z otoczeniem \mathcal{O} , to na ogół jego stany są stanami mieszanymi. Prawdopodobieństwa w_i zajmowania przez układ \mathcal{U} takich stanów podlegają prawom **kwantowej mechaniki statystycznej**.

Oznacza to w szczególności, że wskutek uśrednienia po czasie nie obowiązuje kwantowo-mechaniczna własność interferencji amplitud prawdopodobieństw.

Np. dla układu \mathcal{U} , który może się znajdować w jednym z dwóch stanów $|0\rangle$ lub $|1\rangle$ odpowiednio z prawdopodobieństwami w_0 lub w_1 prawdopodobieństwo w_{01} tego, że układ \mathcal{U} będzie się znajdował w stanie $|0\rangle$ lub w stanie $|1\rangle$ wynosi

$$w_{01} = w_0 + w_1 .$$

Natomiast **nie zachodzi kwantowa interferencja** amplitud
prawdopodobieństw, czyli

Natomiast **nie zachodzi kwantowa interferencja** amplitud prawdopodobieństw, czyli

$$w_{01} \neq |a_{01}|^2 = |a_0 + a_1|^2 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + 2\Re(a_0^* a_1) ,$$

Natomiast **nie zachodzi kwantowa interferencja** amplitud prawdopodobieństw, czyli

$$w_{01} \neq |a_{01}|^2 = |a_0 + a_1|^2 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + 2\Re(a_0^* a_1) ,$$

gdzie ostatni wyraz po prawej stronie jest **wyrazem interferencyjnym**.

Zastosujemy prawa kwantowej mechaniki statystycznej do wyznaczenia prawdopodobieństw.

Zastosujemy prawa kwantowej mechaniki statystycznej do wyznaczenia prawdopodobieństw. Rozważamy układ kwantowy \mathcal{U} w równowadze termodynamicznej z otoczeniem \mathcal{O} w temperaturze T . Układ \mathcal{U} może zajmować stany własne $|\varphi_\mu\rangle$ hamiltonianu \hat{H} o energiach E_μ .

Zgodnie z **podstawową zasadą kwantowej mechaniki statystycznej** prawdopodobieństwo w_μ tego, że układ \mathcal{U} znajduje się w stanie $|\varphi_\mu\rangle$ o energii E_μ w temperaturze T wynosi

Zgodnie z **podstawową zasadą kwantowej mechaniki statystycznej** prawdopodobieństwo w_μ tego, że układ \mathcal{U} znajduje się w stanie $|\varphi_\mu\rangle$ o energii E_μ w temperaturze T wynosi

$$w_\mu = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\mu}, \quad (62)$$

Zgodnie z **podstawową zasadą kwantowej mechaniki statystycznej** prawdopodobieństwo w_μ tego, że układ \mathcal{U} znajduje się w stanie $|\varphi_\mu\rangle$ o energii E_μ w temperaturze T wynosi

$$w_\mu = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\mu}, \quad (62)$$

gdzie $\beta = k_B T$, $k_B = 1.38054 \times 10^{-23}$ J/K jest stałą Boltzmann, a

Zgodnie z **podstawową zasadą kwantowej mechaniki statystycznej** prawdopodobieństwo w_μ tego, że układ \mathcal{U} znajduje się w stanie $|\varphi_\mu\rangle$ o energii E_μ w temperaturze T wynosi

$$w_\mu = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\mu}, \quad (62)$$

gdzie $\beta = k_B T$, $k_B = 1.38054 \times 10^{-23}$ J/K jest stałą Boltzmanna, a

$$Z = \sum_{\mu} e^{-\beta E_\mu} \quad (63)$$

jest **sumą statystyczną**, która służy do unormowania prawdopodobieństw.

Sformułowanie postulatów mechaniki kwantowej za pomocą operatora gęstości

Postulaty mechaniki kwantowej można sformułować używając operatora gęstości.

Postulaty mechaniki kwantowej można sformułować używając operatora gęstości.

Otrzymujemy w ten sposób teorię kwantową adekwatną do opisu układu złożonego $\mathcal{U} + \mathcal{O}$, czyli do opisu stanów mieszanych.

Dowolny układ fizyczny, stanowiący część lub całość układu izolowanego, jest kompletnie opisany za pomocą **operatora gęstości** $\hat{\rho}$ o postaci

Dowolny układ fizyczny, stanowiący część lub całość układu izolowanego, jest kompletnie opisany za pomocą **operatora gęstości** $\hat{\rho}$ o postaci

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i |i\rangle \langle i| , \quad (64)$$

Dowolny układ fizyczny, stanowiący część lub całość układu izolowanego, jest kompletnie opisany za pomocą **operatora gęstości** $\hat{\rho}$ o postaci

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i |i\rangle\langle i|, \quad (64)$$

przy czym

- (1) zbiór wektorów własnych $\{|i\rangle\}$ jest zbiorem ortonormalnym zupełnym, tzn. $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ oraz $\sum_i |i\rangle\langle i| = \hat{I}$,

Dowolny układ fizyczny, stanowiący część lub całość układu izolowanego, jest kompletnie opisany za pomocą **operatora gęstości** $\hat{\rho}$ o postaci

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i |i\rangle\langle i|, \quad (64)$$

przy czym

- (1) zbiór wektorów własnych $\{|i\rangle\}$ jest zbiorem ortonormalnym zupełnym, tzn. $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ oraz $\sum_i |i\rangle\langle i| = \hat{I}$,
- (2) wartości własne operatora są nieujemne, tzn. $w_i \geq 0$,

Dowolny układ fizyczny, stanowiący część lub całość układu izolowanego, jest kompletnie opisany za pomocą **operatora gęstości** $\hat{\rho}$ o postaci

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i |i\rangle\langle i|, \quad (64)$$

przy czym

- (1) zbiór wektorów własnych $\{|i\rangle\}$ jest zbiorem ortonormalnym zupełnym, tzn. $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ oraz $\sum_i |i\rangle\langle i| = \hat{I}$,
- (2) wartości własne operatora są nieujemne, tzn. $w_i \geq 0$,
- (3) ślad operatora $\hat{\rho}$ jest równy 1, czyli $\sum_i w_i = 1$,

(4) wartość oczekiwana dowolnego operatora $\hat{\Omega}$ dana jest wzorem

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \sum_i w_i \langle i | \hat{\Omega} | i \rangle . \quad (65)$$

- (4) wartość oczekiwana dowolnego operatora $\hat{\Omega}$ dana jest wzorem

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \sum_i w_i \langle i | \hat{\Omega} | i \rangle . \quad (65)$$

- (5) operator gęstości podlega ewolucji czasowej zgodnie z równaniem ruchu

- (4) wartość oczekiwana dowolnego operatora $\hat{\Omega}$ dana jest wzorem

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \sum_i w_i \langle i | \hat{\Omega} | i \rangle . \quad (65)$$

- (5) operator gęstości podlega ewolucji czasowej zgodnie z równaniem ruchu

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}] . \quad (66)$$

Przykład:
opis polaryzacji fotonów za pomocą macierzy gęstości

Zdefiniujmy stany fotonów o określonej polaryzacji liniowej
wzdłuż osi x oraz osi y odpowiednio jako

Zdefiniujmy stany fotonów o określonej polaryzacji liniowej wzdłuż osi x oraz osi y odpowiednio jako

$$|x\rangle \equiv |\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (67)$$

Zdefiniujmy stany fotonów o określonej polaryzacji liniowej wzdłuż osi x oraz osi y odpowiednio jako

$$|x\rangle \equiv |\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$|y\rangle \equiv |\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (68)$$

Zdefiniujmy stany fotonów o określonej polaryzacji liniowej wzdłuż osi x oraz osi y odpowiednio jako

$$|x\rangle \equiv |\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$|y\rangle \equiv |\varphi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (68)$$

Dowolny stan czysty może być zapisany jako kombinacja liniowa stanów (67) i (68), czyli

Dowolny stan czysty może być zapisany jako kombinacja liniowa stanów (67) i (68), czyli

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (69)$$

Dowolny stan czysty może być zapisany jako kombinacja liniowa stanów (67) i (68), czyli

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (69)$$

przy czym $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Korzystamy z reprezentacji macierzowej wektorów stanu

Korzystamy z reprezentacji macierzowej wektorów stanu

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (70)$$

Korzystamy z reprezentacji macierzowej wektorów stanu

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (70)$$

oraz

$$\langle\psi| = \left(a^* , b^* \right) \quad (71)$$

Korzystamy z reprezentacji macierzowej wektorów stanu

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (70)$$

oraz

$$\langle\psi| = \left(a^* , b^* \right) \quad (71)$$

i obliczamy macierz gęstości dla stanu czystego jako

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Korzystamy z reprezentacji macierzowej wektorów stanu

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (70)$$

oraz

$$\langle\psi| = \left(a^* , b^* \right) \quad (71)$$

i obliczamy macierz gęstości dla stanu czystego jako

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \left(a^* , b^* \right) \end{aligned}$$

Korzystamy z reprezentacji macierzowej wektorów stanu

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (70)$$

oraz

$$\langle\psi| = \left(a^* , b^* \right) \quad (71)$$

i obliczamy macierz gęstości dla stanu czystego jako

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \left(a^* , b^* \right) \\ &= \begin{pmatrix} aa^* , & ab^* \\ ba^* , & bb^* \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (72)$$

Na podstawie (72) znajdujemy macierz gęstości dla różnych polaryzacji światła.

Na podstawie (72) znajdujemy macierz gęstości dla różnych polaryzacji światła.

Polaryzacja wzdłuż osi x

Na podstawie (72) znajdujemy macierz gęstości dla różnych polaryzacji światła.

Polaryzacja wzdłuż osi x

Podstawiamy $a = 1$ i $b = 0$ we wzorze (66) i otrzymujemy

Na podstawie (72) znajdujemy macierz gęstości dla różnych polaryzacji światła.

Polaryzacja wzdłuż osi x

Podstawiamy $a = 1$ i $b = 0$ we wzorze (66) i otrzymujemy

$$\rho_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Na podstawie (72) znajdujemy macierz gęstości dla różnych polaryzacji światła.

Polaryzacja wzdłuż osi x

Podstawiamy $a = 1$ i $b = 0$ we wzorze (66) i otrzymujemy

$$\rho_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Polaryzacja wzdłuż osi y

Na podstawie (72) znajdujemy macierz gęstości dla różnych polaryzacji światła.

Polaryzacja wzdłuż osi x

Podstawiamy $a = 1$ i $b = 0$ we wzorze (66) i otrzymujemy

$$\rho_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Polaryzacja wzdłuż osi y

W tym przypadku $a = 0$, a $b = 1$, co daje

Na podstawie (72) znajdujemy macierz gęstości dla różnych polaryzacji światła.

Polaryzacja wzdłuż osi x

Podstawiamy $a = 1$ i $b = 0$ we wzorze (66) i otrzymujemy

$$\rho_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Polaryzacja wzdłuż osi y

W tym przypadku $a = 0$, a $b = 1$, co daje

$$\rho_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Polaryzacja pod kątem $\pi/4$ względem osi x

Polaryzacja pod kątem $\pi/4$ względem osi x

Wtedy $a = 1/\sqrt{2}$ i $b = 1/\sqrt{2}$, co daje

Polaryzacja pod kątem $\pi/4$ względem osi x

Wtedy $a = 1/\sqrt{2}$ i $b = 1/\sqrt{2}$, co daje

$$\varrho_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Polaryzacja pod kątem $\pi/4$ względem osi x

Wtedy $a = 1/\sqrt{2}$ i $b = 1/\sqrt{2}$, co daje

$$\varrho_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Polaryzacja pod kątem $3\pi/4$ względem osi x

Polaryzacja pod kątem $\pi/4$ względem osi x

Wtedy $a = 1/\sqrt{2}$ i $b = 1/\sqrt{2}$, co daje

$$\varrho_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Polaryzacja pod kątem $3\pi/4$ względem osi x

Wtedy $a = -1/\sqrt{2}$ i $b = 1/\sqrt{2}$, co daje

Polaryzacja pod kątem $\pi/4$ względem osi x

Wtedy $a = 1/\sqrt{2}$ i $b = 1/\sqrt{2}$, co daje

$$\varrho_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Polaryzacja pod kątem $3\pi/4$ względem osi x

Wtedy $a = -1/\sqrt{2}$ i $b = 1/\sqrt{2}$, co daje

$$\varrho_{3\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Polaryzacja pod kątem $\pi/4$ względem osi x

Wtedy $a = 1/\sqrt{2}$ i $b = 1/\sqrt{2}$, co daje

$$\rho_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Polaryzacja pod kątem $3\pi/4$ względem osi x

Wtedy $a = -1/\sqrt{2}$ i $b = 1/\sqrt{2}$, co daje

$$\rho_{3\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Powyższe wzory opisują 4 stany czyste.

Rozważmy teraz dwa stany mieszane.

Rozważmy teraz dwa stany mieszane.

(1) Mieszanina 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi x i 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi y

Rozważmy teraz dwa stany mieszane.

(1) Mieszanina 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi x i 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi y

Stosujemy wzór (44) i otrzymujemy

Rozważmy teraz dwa stany mieszane.

(1) Mieszanina 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi x i 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi y

Stosujemy wzór (44) i otrzymujemy

$$\varrho = \frac{1}{2}\varrho_x + \frac{1}{2}\varrho_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Rozważmy teraz dwa stany mieszane.

(1) Mieszanina 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi x i 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi y

Stosujemy wzór (44) i otrzymujemy

$$\varrho = \frac{1}{2}\varrho_x + \frac{1}{2}\varrho_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (77)$$

(2) Mieszanina 50% stanu czystego o polaryzacji pod kątem $\pi/4$ względem osi x i 50% stanu czystego o polaryzacji pod kątem $3\pi/4$ względem osi x

Rozważmy teraz dwa stany mieszane.

(1) Mieszanina 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi x i 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi y

Stosujemy wzór (44) i otrzymujemy

$$\varrho = \frac{1}{2}\varrho_x + \frac{1}{2}\varrho_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (77)$$

(2) Mieszanina 50% stanu czystego o polaryzacji pod kątem $\pi/4$ względem osi x i 50% stanu czystego o polaryzacji pod kątem $3\pi/4$ względem osi x

Stosujemy wzór (44) i otrzymujemy

Rozważmy teraz dwa stany mieszane.

(1) Mieszanina 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi x i 50% stanu czystego o polaryzacji wzdłuż osi y

Stosujemy wzór (44) i otrzymujemy

$$\varrho = \frac{1}{2}\varrho_x + \frac{1}{2}\varrho_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (77)$$

(2) Mieszanina 50% stanu czystego o polaryzacji pod kątem $\pi/4$ względem osi x i 50% stanu czystego o polaryzacji pod kątem $3\pi/4$ względem osi x

Stosujemy wzór (44) i otrzymujemy

$$\varrho = \frac{1}{2}\varrho_{\pi/4} + \frac{1}{2}\varrho_{3\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Macierze gęstości w obu przypadkach (1) i (2) są takie same, ponieważ opisują one tę samą sytuację fizyczną.

Macierze gęstości w obu przypadkach (1) i (2) są takie same, ponieważ opisują one tę samą sytuację fizyczną.

Należy zauważyć, że dla określonego stanu czystego, np. dla polaryzacji wzdłuż osi x , wektor stanu (funkcja falowa) wyznaczony jest z dokładnością do czynnika fazowego, natomiast macierz gęstości określona jest w pełni jednoznacznie.