

KUBITY

Wykład ten poświęcony będzie dokładniejszemu omówieniu własności kubitów.

Kubit pojedynczy

Przypominam definicję pojedynczego kubit.

Przypominam definicję pojedynczego kubit. Rozważamy dwa wybrane (ortonormalne) stany kwantowe układu kwantowego: $|0\rangle$ i $|1\rangle$, które nazywamy **stanami bazy obliczeniowej**.

Przypominam definicję pojedynczego kubit. Rozważamy dwa wybrane (ortonormalne) stany kwantowe układu kwantowego: $|0\rangle$ i $|1\rangle$, które nazywamy **stanami bazy obliczeniowej**. **Kubit** $|\psi\rangle$ jest **liniową kombinacją (superpozycją)** tych stanów, czyli

Przypominam definicję pojedynczego kubit. Rozważamy dwa wybrane (ortonormalne) stany kwantowe układu kwantowego: $|0\rangle$ i $|1\rangle$, które nazywamy **stanami bazy obliczeniowej**.

Kubit $|\psi\rangle$ jest **liniową kombinacją (superpozycją)** tych stanów, czyli

$$|\psi\rangle \stackrel{def}{=} a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, \quad (1)$$

Przypominam definicję pojedynczego kubit. Rozważamy dwa wybrane (ortonormalne) stany kwantowe układu kwantowego: $|0\rangle$ i $|1\rangle$, które nazywamy **stanami bazy obliczeniowej**.

Kubit $|\psi\rangle$ jest **liniową kombinacją (superpozycją)** tych stanów, czyli

$$|\psi\rangle \stackrel{def}{=} a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, \quad (1)$$

gdzie liczby zespolone a_0 i a_1 są **amplitudami prawdopodobieństwa**.

Przypominam definicję pojedynczego kubit. Rozważamy dwa wybrane (ortonormalne) stany kwantowe układu kwantowego: $|0\rangle$ i $|1\rangle$, które nazywamy **stanami bazy obliczeniowej**.

Kubit $|\psi\rangle$ jest **liniową kombinacją (superpozycją)** tych stanów, czyli

$$|\psi\rangle \stackrel{def}{=} a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, \quad (1)$$

gdzie liczby zespolone a_0 i a_1 są **amplitudami prawdopodobieństwa**. Oznacza to, że prawdopodobieństwa p_0 i p_1 znalezienia układu kwantowego w odpowiednich stanach bazowych wynoszą

Przypominam definicję pojedynczego kubit. Rozważamy dwa wybrane (ortonormalne) stany kwantowe układu kwantowego: $|0\rangle$ i $|1\rangle$, które nazywamy **stanami bazy obliczeniowej**.

Kubit $|\psi\rangle$ jest **liniową kombinacją (superpozycją)** tych stanów, czyli

$$|\psi\rangle \stackrel{def}{=} a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, \quad (1)$$

gdzie liczby zespolone a_0 i a_1 są **amplitudami prawdopodobieństwa**. Oznacza to, że prawdopodobieństwa p_0 i p_1 znalezienia układu kwantowego w odpowiednich stanach bazowych wynoszą

$$p_0 = |a_0|^2, \quad p_1 = |a_1|^2. \quad (2)$$

Przypominam definicję pojedynczego kubit. Rozważamy dwa wybrane (ortonormalne) stany kwantowe układu kwantowego: $|0\rangle$ i $|1\rangle$, które nazywamy **stanami bazy obliczeniowej**.

Kubit $|\psi\rangle$ jest **liniową kombinacją (superpozycją)** tych stanów, czyli

$$|\psi\rangle \stackrel{def}{=} a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, \quad (1)$$

gdzie liczby zespolone a_0 i a_1 są **amplitudami prawdopodobieństwa**. Oznacza to, że prawdopodobieństwa p_0 i p_1 znalezienia układu kwantowego w odpowiednich stanach bazowych wynoszą

$$p_0 = |a_0|^2, \quad p_1 = |a_1|^2. \quad (2)$$

Spełniony jest warunek unormowania

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 = p_0 + p_1 = 1. \quad (3)$$

Geometryczna interpretacja kubitów: sfera Blocha

Geometryczna interpretacja kubitów: sfera Blocha

Korzystając z warunku unormowania (3) można – bez utraty ogólności – przepisać definicję (1) jako

Geometryczna interpretacja kubitów: sfera Blocha

Korzystając z warunku unormowania (3) można – bez utraty ogólności – przepisać definicję (1) jako

$$|\psi\rangle = e^{i\Theta} \left(e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (4)$$

Geometryczna interpretacja kubitów: sfera Blocha

Korzystając z warunku unormowania (3) można – bez utraty ogólności – przepisać definicję (1) jako

$$|\psi\rangle = e^{i\Theta} \left(e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (4)$$

gdzie Θ , θ i ϕ są liczbami rzeczywistymi.

Geometryczna interpretacja kubitów: sfera Blocha

Korzystając z warunku unormowania (3) można – bez utraty ogólności – przepisać definicję (1) jako

$$|\psi\rangle = e^{i\Theta} \left(e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (4)$$

gdzie Θ , θ i ϕ są liczbami rzeczywistymi. Na podstawie dowolności fazy globalnej Θ możemy zignorować czynnik fazowy $e^{i\Theta}$, co prowadzi do użytecznej postaci kubitów

Geometryczna interpretacja kubitów: sfera Blocha

Korzystając z warunku unormowania (3) można – bez utraty ogólności – przepisać definicję (1) jako

$$|\psi\rangle = e^{i\Theta} \left(e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (4)$$

gdzie Θ , θ i ϕ są liczbami rzeczywistymi. Na podstawie dowolności fazy globalnej Θ możemy zignorować czynnik fazowy $e^{i\Theta}$, co prowadzi do użytecznej postaci kubitów

$$|\psi\rangle = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (5)$$

Geometryczna interpretacja kubitów: sfera Blocha

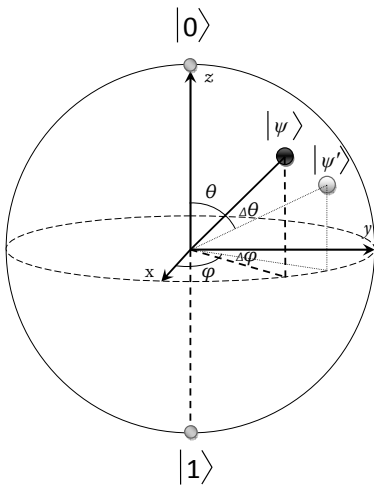
Korzystając z warunku unormowania (3) można – bez utraty ogólności – przepisać definicję (1) jako

$$|\psi\rangle = e^{i\Theta} \left(e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (4)$$

gdzie Θ , θ i ϕ są liczbami rzeczywistymi. Na podstawie dowolności fazy globalnej Θ możemy zignorować czynnik fazowy $e^{i\Theta}$, co prowadzi do użytecznej postaci kubitów

$$|\psi\rangle = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (5)$$

Postać (5) kubitów posiada interpretację geometryczną w postaci **sfer Blocha**.



Rysunek: 4.1. Sfera Blocha.

Kubity wielokrotne

Rozważymy najpierw **stany dwukubitowe**.

Rozważmy najpierw **stany dwukubitowe**. Mogą być one realizowane w dwóch identycznych podukładach fizycznych, z których każdy może się znajdować w stanie jednokubitowym o bazie obliczeniowej $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} .

Rozważymy najpierw **stany dwukubitowe**. Mogą być one realizowane w dwóch identycznych podukładach fizycznych, z których każdy może się znajdować w stanie jednokubitowym o bazie obliczeniowej $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} .

Przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}^{(2)}$ stanów dwukubitowych skonstruowana jest jako iloczyn tensorowy jednokubitowych przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , czyli $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

Rozważmy najpierw **stany dwukubitowe**. Mogą być one realizowane w dwóch identycznych podukładach fizycznych, z których każdy może się znajdować w stanie jednokubitowym o bazie obliczeniowej $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} .

Przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}^{(2)}$ stanów dwukubitowych skonstruowana jest jako iloczyn tensorowy jednokubitowych przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , czyli $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Zgodnie z tą konstrukcją baza obliczeniowa stanów dwukubitowych zawiera 4 elementy:

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle.$$

Stan dwukubitowy (kubit podwójny) jest zdefiniowany jako

Stan dwukubitowy (kubit podwójny) jest zdefiniowany jako

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle, \quad (6)$$

Stan dwukubitowy (kubit podwójny) jest zdefiniowany jako

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle, \quad (6)$$

przy czym amplitudy a_x , $x = 00, 01, 10, 11$ spełniają warunek unormowania

Stan dwukubitowy (kubit podwójny) jest zdefiniowany jako

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle, \quad (6)$$

przy czym amplitudy a_x , $x = 00, 01, 10, 11$ spełniają warunek unormowania

$$|a_{00}|^2 + |a_{01}|^2 + |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2 = 1. \quad (7)$$

Stan n -kubitowy

Stan n -kubitowy

Przestrzeń Hilberta, której elementami są stany n -kubitowe jest iloczynem tensorowym

$$\mathcal{H}^{(n)} = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ razy}} .$$

Stan n -kubitowy

Przestrzeń Hilberta, której elementami są stany n -kubitowe jest iloczynem tensorowym

$$\mathcal{H}^{(n)} = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ razy}} .$$

Baza obliczeniowa w przestrzeni stanów n -kubitowych ma postać

Stan n -kubitowy

Przestrzeń Hilberta, której elementami są stany n -kubitowe jest iloczynem tensorowym

$$\mathcal{H}^{(n)} = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ razy}} .$$

Baza obliczeniowa w przestrzeni stanów n -kubitowych ma postać

$$|x\rangle = |x_1 x_2 \dots x_n\rangle$$

i zawiera 2^n elementów.

Dowolny stan n -kubitowy można zapisać w postaci

Dowolny stan n -kubitowy można zapisać w postaci

$$|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} a_x |x\rangle, \quad (8)$$

Dowolny stan n -kubitowy można zapisać w postaci

$$|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} a_x |x\rangle, \quad (8)$$

przy czym spełniony jest warunek unormowania

Dowolny stan n -kubitowy można zapisać w postaci

$$|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^n-1} a_x |x\rangle, \quad (8)$$

przy czym spełniony jest warunek unormowania

$$\sum_{x=0}^{2^n-1} |a_x|^2 = 1. \quad (9)$$

Twierdzenie o nieklonowaniu

W roku 1982 W. K. Wootters i Wojciech H. Żurek (absolwent Fizyki Technicznej AGH) opublikowali w czasopiśmie *Nature* artykuł zatytułowany "A single quantum cannot be cloned".

W roku 1982 W. K. Wootters i Wojciech H. Żurek (absolwent Fizyki Technicznej AGH) opublikowali w czasopiśmie *Nature* artykuł zatytułowany "A single quantum cannot be cloned". W artykule tym udowodnili tzw. **twierdzenie o nieklonowaniu**.

W roku 1982 W. K. Wootters i Wojciech H. Żurek (absolwent Fizyki Technicznej AGH) opublikowali w czasopiśmie *Nature* artykuł zatytułowany "A single quantum cannot be cloned". W artykule tym udowodnili tzw. **twierdzenie o nieklonowaniu**. Nieklonowanie można rozumieć jako **nieistnienie kwantowej maszyny kopiującej**.

Rozpatrzmy możliwość skopiowania pewnego **nieznanego** stanu kwantowego $|\chi_1\rangle \in \mathcal{H}$.

Rozpatrzmy możliwość skopiowania pewnego **nieznanego** stanu kwantowego $|\chi_1\rangle \in \mathcal{H}$.

Uwaga: Gdyby stan kwantowy $|\chi_1\rangle$ był znany, to znana byłaby również procedura jego spreparowania, a zatem nie byłoby problemu klonowania (kopiowania) tego stanu.

Rozpatrzmy możliwość skopiowania pewnego **nieznanego** stanu kwantowego $|\chi_1\rangle \in \mathcal{H}$.

Uwaga: Gdyby stan kwantowy $|\chi_1\rangle$ był znany, to znana byłaby również procedura jego spreparowania, a zatem nie byłoby problemu klonowania (kopiowania) tego stanu.

Kwantową maszyną kopiującą nazywamy transformację unitarną U , działającą w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, która posiada własność

Rozpatrzmy możliwość skopiowania pewnego **nieznanego** stanu kwantowego $|\chi_1\rangle \in \mathcal{H}$.

Uwaga: Gdyby stan kwantowy $|\chi_1\rangle$ był znany, to znana byłaby również procedura jego spreparowania, a zatem nie byłoby problemu klonowania (kopiowania) tego stanu.

Kwantową maszyną kopiującą nazywamy transformację unitarną U , działającą w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, która posiada własność

$$U(|\chi_1\rangle|\phi\rangle) = |\chi_1\rangle|\chi_1\rangle, \quad (10)$$

Rozpatrzmy możliwość skopiowania pewnego **nieznanego** stanu kwantowego $|\chi_1\rangle \in \mathcal{H}$.

Uwaga: Gdyby stan kwantowy $|\chi_1\rangle$ był znany, to znana byłaby również procedura jego spreparowania, a zatem nie byłoby problemu klonowania (kopiowania) tego stanu.

Kwantową maszyną kopiującą nazywamy transformację unitarną U , działającą w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, która posiada własność

$$U(|\chi_1\rangle|\phi\rangle) = |\chi_1\rangle|\chi_1\rangle, \quad (10)$$

gdzie $|\phi\rangle$ jest stanem kwantowym układu, na którym chcemy zapisać kopię stanu $|\chi_1\rangle$.

Rozpatrzmy możliwość skopiowania pewnego **nieznanego** stanu kwantowego $|\chi_1\rangle \in \mathcal{H}$.

Uwaga: Gdyby stan kwantowy $|\chi_1\rangle$ był znany, to znana byłaby również procedura jego spreparowania, a zatem nie byłoby problemu klonowania (kopiowania) tego stanu.

Kwantową maszyną kopiującą nazywamy transformację unitarną U , działającą w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, która posiada własność

$$U(|\chi_1\rangle|\phi\rangle) = |\chi_1\rangle|\chi_1\rangle, \quad (10)$$

gdzie $|\phi\rangle$ jest stanem kwantowym układu, na którym chcemy zapisać kopię stanu $|\chi_1\rangle$.

Stan $|\phi\rangle$ jest analogiem czystej kartki, na której chcemy zapisać kopię stanu $|\chi_1\rangle$.

W celu udowodnienia twierdzenia o nieklonowaniu założymy, że kwantowa maszyna kopiująca istnieje, czyli zachodzi (10).

W celu udowodnienia twierdzenia o nieklonowaniu załóżmy, że kwantowa maszyna kopiująca istnieje, czyli zachodzi (10). Operator klonowania U musi być uniwersalny, tzn. nie może zależeć od stanu kopiowanego $|\chi_1\rangle$.

W celu udowodnienia twierdzenia o nieklonowaniu załóżmy, że kwantowa maszyna kopiująca istnieje, czyli zachodzi (10). Operator klonowania U musi być uniwersalny, tzn. nie może zależeć od stanu kopiowanego $|\chi_1\rangle$. Jeżeli zatem chcemy skopiować dowolny inny stan $|\chi_2\rangle$, to powinniśmy otrzymać

W celu udowodnienia twierdzenia o nieklonowaniu założymy, że kwantowa maszyna kopiująca istnieje, czyli zachodzi (10). Operator klonowania U musi być uniwersalny, tzn. nie może zależeć od stanu kopiowanego $|\chi_1\rangle$. Jeżeli zatem chcemy skopiować dowolny inny stan $|\chi_2\rangle$, to powinniśmy otrzymać

$$U(|\chi_2\rangle|\varphi\rangle) = |\chi_2\rangle|\chi_2\rangle, \quad (11)$$

W celu udowodnienia twierdzenia o nieklonowaniu załóżmy, że kwantowa maszyna kopiująca istnieje, czyli zachodzi (10). Operator klonowania U musi być uniwersalny, tzn. nie może zależeć od stanu kopiowanego $|\chi_1\rangle$. Jeżeli zatem chcemy skopiować dowolny inny stan $|\chi_2\rangle$, to powinniśmy otrzymać

$$U(|\chi_2\rangle|\varphi\rangle) = |\chi_2\rangle|\chi_2\rangle, \quad (11)$$

Stan $|\chi_2\rangle$ jest dowolnym stanem, innym niż stan $|\chi_1\rangle$, a zatem w ogólnym przypadku stany te nie są ortogonalne do siebie.

W celu udowodnienia twierdzenia o nieklonowaniu załóżmy, że kwantowa maszyna kopiująca istnieje, czyli zachodzi (10). Operator klonowania U musi być uniwersalny, tzn. nie może zależeć od stanu kopiowanego $|\chi_1\rangle$. Jeżeli zatem chcemy skopiować dowolny inny stan $|\chi_2\rangle$, to powinniśmy otrzymać

$$U(|\chi_2\rangle|\varphi\rangle) = |\chi_2\rangle|\chi_2\rangle, \quad (11)$$

Stan $|\chi_2\rangle$ jest dowolnym stanem, innym niż stan $|\chi_1\rangle$, a zatem w ogólnym przypadku stany te nie są ortogonalne do siebie. W dalszym ciągu zakładamy brak ortogonalności, czyli

$$\langle\chi_1|\chi_2\rangle \neq 0. \quad (12)$$

Obliczmy teraz iloczyn skalarny

$$S = \langle \chi_1 | \langle \phi | U^\dagger U | \chi_2 \rangle | \phi \rangle \quad (13)$$

Obliczmy teraz iloczyn skalarny

$$S = \langle \chi_1 | \langle \phi | U^\dagger U | \chi_2 \rangle | \phi \rangle \quad (13)$$

dwoma sposobami

Obliczmy teraz iloczyn skalarny

$$S = \langle \chi_1 | \langle \phi | U^\dagger U | \chi_2 \rangle | \phi \rangle \quad (13)$$

dwoma sposobami

$$(1) \quad S = \langle \chi_1 | \langle \phi | \chi_2 \rangle | \phi \rangle = \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle, \quad (14)$$

Obliczmy teraz iloczyn skalarny

$$S = \langle \chi_1 | \langle \phi | U^\dagger U | \chi_2 \rangle | \phi \rangle \quad (13)$$

dwoma sposobami

$$(1) \quad S = \langle \chi_1 | \langle \phi | \chi_2 \rangle | \phi \rangle = \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle, \quad (14)$$

$$(2) \quad S = \langle \chi_1 | \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle | \chi_2 \rangle = \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle^2. \quad (15)$$

Obliczmy teraz iloczyn skalarny

$$S = \langle \chi_1 | \langle \phi | U^\dagger U | \chi_2 \rangle | \phi \rangle \quad (13)$$

dwoma sposobami

$$(1) \quad S = \langle \chi_1 | \langle \phi | \chi_2 \rangle | \phi \rangle = \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle, \quad (14)$$

$$(2) \quad S = \langle \chi_1 | \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle | \chi_2 \rangle = \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle^2. \quad (15)$$

Z porównania (1) i (2) wynika, że albo

$$|\chi_1\rangle \equiv |\chi_2\rangle \quad (16)$$

albo

$$\langle \chi_1 | \chi_2 \rangle = 0. \quad (17)$$

Wynik (17) jest sprzeczny z założeniem (12) nieortogonalności stanów kopiowanych, natomiast wynik (16) oznacza, że stan kopiowany był znany (w drugim niezależnym kopiowaniu musi zachodzić tożsamość (16)).

Wynik (17) jest sprzeczny z założeniem (12) nieortogonalności stanów kopiowanych, natomiast wynik (16) oznacza, że stan kopiowany był znany (w drugim niezależnym kopiowaniu musi zachodzić tożsamość (16)).

W ten sposób twierdzenie o zakazie klonowania kubitów zostało udowodnione.

Ważna własność kwantowej maszyny kopiującej

Ważna własność kwantowej maszyny kopiującej
Stany ortogonalne mogą podlegać wiarygodnemu
kopiowaniu.

Ważna własność kwantowej maszyny kopiującej
Stany ortogonalne mogą podlegać wiarygodnemu
kopiowaniu.

⇒ Stany bazy obliczeniowej mogą być kopiowane.

Polaryzacja fotonu

Przypomnienie

Przypomnienie

Foton jest cząstką (kwantem światła) o określonej energii E ,
pędzie \mathbf{p} i polaryzacji $\boldsymbol{\epsilon}$.

Przypomnienie

Foton jest cząstką (kwantem światła) o określonej energii E , pędzie \mathbf{p} i polaryzacji $\boldsymbol{\epsilon}$. Energia i pęd powiązane są z częstością ω i wektorem falowym \mathbf{k} za pomocą relacji de Broglie'a

Przypomnienie

Foton jest cząstką (kwantem światła) o określonej energii E , pędzie \mathbf{p} i polaryzacji $\boldsymbol{\epsilon}$. Energia i pęd powiązane są z częstością ω i wektorem falowym \mathbf{k} za pomocą relacji de Broglie'a

$$E = \hbar\omega \quad (18)$$

Przypomnienie

Foton jest cząstką (kwantem światła) o określonej energii E , pędzie \mathbf{p} i polaryzacji $\boldsymbol{\epsilon}$. Energia i pęd powiązane są z częstością ω i wektorem falowym \mathbf{k} za pomocą relacji de Broglie'a

$$E = \hbar\omega \quad (18)$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} . \quad (19)$$

Przypomnienie

Foton jest cząstką (kwantem światła) o określonej energii E , pędzie \mathbf{p} i polaryzacji $\boldsymbol{\epsilon}$. Energia i pęd powiązane są z częstością ω i wektorem falowym \mathbf{k} za pomocą relacji de Broglie'a

$$E = \hbar\omega \quad (18)$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} . \quad (19)$$

Częstość i długość wektora falowego k pozwalają na obliczenie prędkości światła

Przypomnienie

Foton jest cząstką (kwantem światła) o określonej energii E , pędzie \mathbf{p} i polaryzacji $\boldsymbol{\epsilon}$. Energia i pęd powiązane są z częstością ω i wektorem falowym \mathbf{k} za pomocą relacji de Broglie'a

$$E = \hbar\omega \quad (18)$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} . \quad (19)$$

Częstość i długość wektora falowego k pozwalają na obliczenie prędkości światła

$$c = \frac{\omega}{k} . \quad (20)$$

Foton może posiadać **polaryzację liniową, kołową lub eliptyczną.**

Foton może posiadać **polaryzację liniową, kołową lub eliptyczną**.

Jeżeli foton porusza się w kierunku z , to stany fotonu spolaryzowanego liniowo odpowiednio w kierunkach x i y oznaczamy symbolami $|x\rangle$ i $|y\rangle$.

Foton może posiadać **polaryzację liniową, kołową lub eliptyczną**.

Jeżeli foton porusza się w kierunku z , to stany fotonu spolaryzowanego liniowo odpowiednio w kierunkach x i y oznaczamy symbolami $|x\rangle$ i $|y\rangle$. Stany fotonu spolaryzowanego kołowo ($|R\rangle, |L\rangle$) otrzymujemy jako kombinacje liniowe stanów $|x\rangle$ i $|y\rangle$.

Foton może posiadać **polaryzację liniową, kołową lub eliptyczną**.

Jeżeli foton porusza się w kierunku z , to stany fotonu spolaryzowanego liniowo odpowiednio w kierunkach x i y oznaczamy symbolami $|x\rangle$ i $|y\rangle$. Stany fotonu spolaryzowanego kołowo ($|R\rangle, |L\rangle$) otrzymujemy jako kombinacje liniowe stanów $|x\rangle$ i $|y\rangle$. Fotonowi o prawoskrętnej polaryzacji kołowej odpowiada stan

Foton może posiadać **polaryzację liniową, kołową lub eliptyczną**.

Jeżeli foton porusza się w kierunku z , to stany fotonu spolaryzowanego liniowo odpowiednio w kierunkach x i y oznaczamy symbolami $|x\rangle$ i $|y\rangle$. Stany fotonu spolaryzowanego kołowo ($|R\rangle, |L\rangle$) otrzymujemy jako kombinacje liniowe stanów $|x\rangle$ i $|y\rangle$. Fotonowi o prawoskrętnej polaryzacji kołowej odpowiada stan

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle), \quad (21)$$

Foton może posiadać **polaryzację liniową, kołową lub eliptyczną**.

Jeżeli foton porusza się w kierunku z , to stany fotonu spolaryzowanego liniowo odpowiednio w kierunkach x i y oznaczamy symbolami $|x\rangle$ i $|y\rangle$. Stany fotonu spolaryzowanego kołowo ($|R\rangle, |L\rangle$) otrzymujemy jako kombinacje liniowe stanów $|x\rangle$ i $|y\rangle$. Fotonowi o prawoskrętnej polaryzacji kołowej odpowiada stan

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle), \quad (21)$$

natomiast fotonowi o lewoskrętnej polaryzacji kołowej odpowiada stan

Foton może posiadać **polaryzację liniową, kołową lub eliptyczną**.

Jeżeli foton porusza się w kierunku z , to stany fotonu spolaryzowanego liniowo odpowiednio w kierunkach x i y oznaczamy symbolami $|x\rangle$ i $|y\rangle$. Stany fotonu spolaryzowanego kołowo ($|R\rangle, |L\rangle$) otrzymujemy jako kombinacje liniowe stanów $|x\rangle$ i $|y\rangle$. Fotonowi o prawoskrętnej polaryzacji kołowej odpowiada stan

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle), \quad (21)$$

natomiast fotonowi o lewoskrętnej polaryzacji kołowej odpowiada stan

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle). \quad (22)$$

Na podstawie wzorów (21) i (22) wyrażamy stany polaryzacji liniowej za pomocą stanów polaryzacji kołowej

Na podstawie wzorów (21) i (22) wyrażamy stany polaryzacji liniowej za pomocą stanów polaryzacji kołowej

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle) \quad (23)$$

Na podstawie wzorów (21) i (22) wyrażamy stany polaryzacji liniowej za pomocą stanów polaryzacji kołowej

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle) \quad (23)$$

$$|y\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle) . \quad (24)$$

Na podstawie wzorów (21) i (22) wyrażamy stany polaryzacji liniowej za pomocą stanów polaryzacji kołowej

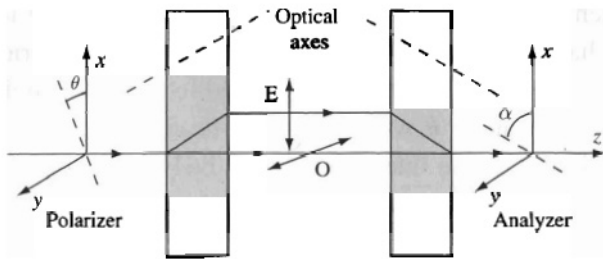
$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle) \quad (23)$$

$$|y\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle) . \quad (24)$$

Stosowanie do opisu fotonów stanów polaryzacji kołowej jest często wygodniejsze, ponieważ stany te nie wyróżniają żadnego kierunku prostopadłego do kierunku ruchu fotonu.

Rozważymy teraz stany fotonu spolaryzowanego liniowo pod dowolnym kątem względem osi x .

Rozważmy teraz stany fotonu spolaryzowanego liniowo pod dowolnym kątem względem osi x .



Rysunek: 4.2. Polaryzator i analizator.

Stan fotonu spolaryzowanego liniowo pod kątem θ względem osi x można zapisać w postaci kombinacji liniowej

Stan fotonu spolaryzowanego liniowo pod kątem θ względem osi x można zapisać w postaci kombinacji liniowej

$$|\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle . \quad (25)$$

Stan fotonu spolaryzowanego liniowo pod kątem θ względem osi x można zapisać w postaci kombinacji liniowej

$$|\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle . \quad (25)$$

Amplituda prawdopodobieństwa tego, że foton spolaryzowany w kierunku θ przejdzie przez analizator zorientowany pod kątem α względem osi x dana jest wzorem

Stan fotonu spolaryzowanego liniowo pod kątem θ względem osi x można zapisać w postaci kombinacji liniowej

$$|\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle . \quad (25)$$

Amplituda prawdopodobieństwa tego, że foton spolaryzowany w kierunku θ przejdzie przez analizator zorientowany pod kątem α względem osi x dana jest wzorem

$$a(\theta \rightarrow \alpha) = \cos(\theta - \alpha) = \langle \alpha | \theta \rangle , \quad (26)$$

Stan fotonu spolaryzowanego liniowo pod kątem θ względem osi x można zapisać w postaci kombinacji liniowej

$$|\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle . \quad (25)$$

Amplituda prawdopodobieństwa tego, że foton spolaryzowany w kierunku θ przejdzie przez analizator zorientowany pod kątem α względem osi x dana jest wzorem

$$a(\theta \rightarrow \alpha) = \cos(\theta - \alpha) = \langle \alpha | \theta \rangle , \quad (26)$$

gdzie $|\alpha\rangle$ oznacza stan fotonu spolaryzowanego liniowo zgodnie z kątem polaryzacji analizatora.

Stan fotonu spolaryzowanego liniowo pod kątem θ względem osi x można zapisać w postaci kombinacji liniowej

$$|\theta\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle . \quad (25)$$

Amplituda prawdopodobieństwa tego, że foton spolaryzowany w kierunku θ przejdzie przez analizator zorientowany pod kątem α względem osi x dana jest wzorem

$$a(\theta \rightarrow \alpha) = \cos(\theta - \alpha) = \langle\alpha|\theta\rangle , \quad (26)$$

gdzie $|\alpha\rangle$ oznacza stan fotonu spolaryzowanego liniowo zgodnie z kątem polaryzacji analizatora. Korzystając z (26) wyznaczamy prawdopodobieństwo przejścia przez analizator fotonu padającego w stanie $|\theta\rangle$

Stan fotonu spolaryzowanego liniowo pod kątem θ względem osi x można zapisać w postaci kombinacji liniowej

$$|\theta\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle . \quad (25)$$

Amplituda prawdopodobieństwa tego, że foton spolaryzowany w kierunku θ przejdzie przez analizator zorientowany pod kątem α względem osi x dana jest wzorem

$$a(\theta \rightarrow \alpha) = \cos(\theta - \alpha) = \langle\alpha|\theta\rangle , \quad (26)$$

gdzie $|\alpha\rangle$ oznacza stan fotonu spolaryzowanego liniowo zgodnie z kątem polaryzacji analizatora. Korzystając z (26) wyznaczamy prawdopodobieństwo przejścia przez analizator fotonu padającego w stanie $|\theta\rangle$

$$p(\theta \rightarrow \alpha) = \cos^2(\theta - \alpha) = |\langle\alpha|\theta\rangle|^2 . \quad (27)$$

Kwantowa dynamika cząstki o spinie $1/2$

Rozważymy czasową ewolucję stanów cząstki o spinie $1/2$ pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego z uwzględnieniem jedynie spinowych stopni swobody cząstki, tzn. zaniedbamy inne np. orbitalne (przestrzenne) stopnie swobody cząstki.

Rozważymy czasową ewolucję stanów cząstki o spinie $1/2$ pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego z uwzględnieniem jedynie spinowych stopni swobody cząstki, tzn. zaniebamy inne np. orbitalne (przestrzenne) stopnie swobody cząstki. (Termin spin $1/2$ oznacza, że wartości własne rzutu spinu na wybraną oś wynoszą $\pm\hbar/2$.)

Rozważymy czasową ewolucję stanów cząstki o spinie $1/2$ pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego z uwzględnieniem jedynie spinowych stopni swobody cząstki, tzn. zaniedbamy inne np. orbitalne (przestrzenne) stopnie swobody cząstki. (Termin spin $1/2$ oznacza, że wartości własne rzutu spinu na wybraną oś wynoszą $\pm\hbar/2$.)
Przykładami cząstek o spinie $1/2$ są fermiony: elektron, proton, neutron.

Cząstka c ($c =$ elektron, proton, neutron) o spinie $1/2$ posiada **spinowy magnetyczny moment dipolowy** równy

Cząstka c ($c =$ elektron, proton, neutron) o spinie $1/2$ posiada **spinowy magnetyczny moment dipolowy** równy

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \gamma_c \boldsymbol{\sigma} , \quad (28)$$

Cząstka c ($c =$ elektron, proton, neutron) o spinie $1/2$ posiada **spinowy magnetyczny moment dipolowy** równy

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\gamma_c\boldsymbol{\sigma} , \quad (28)$$

gdzie γ_c jest **czynnikiem żyromagnetycznym** cząstki, a operator wektorowy $\boldsymbol{\sigma}$ wyrażony jest za pomocą trzech macierzy Pauliego

Cząstka c ($c =$ elektron, proton, neutron) o spinie $1/2$ posiada **spinowy magnetyczny moment dipolowy** równy

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \gamma_c \boldsymbol{\sigma} , \quad (28)$$

gdzie γ_c jest **czynnikiem żyromagnetycznym** cząstki, a operator wektorowy $\boldsymbol{\sigma}$ wyrażony jest za pomocą trzech macierzy Pauliego

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \mathbf{e}_x + \sigma_y \mathbf{e}_y + \sigma_z \mathbf{e}_z . \quad (29)$$

W zewnętrznym polu magnetycznym \mathbf{B} cząstka c posiada dodatkową (związaną ze spinem) energię

$$\Delta U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}; . \quad (30)$$

Zgodnie ze wzorem (30) minimum (maksimum) dodatkowej energii cząstki jest realizowane dla równoległych (antyrownoległych) wektorów $\boldsymbol{\mu}$ i \mathbf{B} .

Przypomnienie

Przypomnienie

Postać macierzy Pauliego

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Przypomnienie

Postać macierzy Pauliego

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Stanami własnymi operatora σ_z są spinory

Przypomnienie

Postać macierzy Pauliego

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Stanami własnymi operatora σ_z są spinory

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Przypomnienie

Postać macierzy Pauliego

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Stanami własnymi operatora σ_z są spinory

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Stanom tym odpowiadają wartości własne $+\hbar/2$ (stanowi $|0\rangle$) i $-\hbar/2$ (stanowi $|1\rangle$).

Kubit spinowy ma postać

Kubit spinowy ma postać

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, \quad (33)$$

Kubit spinowy ma postać

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle, \quad (33)$$

przy czym $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$.

Amplitudy a_0 i a_1 przyjmowane są zwykle w postaci

$$a_0 = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad a_1 = e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (34)$$

Amplitudy a_0 i a_1 przyjmowane są zwykle w postaci

$$a_0 = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad a_1 = e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (34)$$

A zatem kubit spinowy (33) przyjmuje postać

$$|\psi\rangle = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (35)$$

Amplitudy a_0 i a_1 przyjmowane są zwykle w postaci

$$a_0 = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad a_1 = e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (34)$$

A zatem kubit spinowy (33) przyjmuje postać

$$|\psi\rangle = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (35)$$

Wzór (35) podaje najogólniejszą postać stanu cząstki o spinie $1/2$.

Amplitudy a_0 i a_1 przyjmowane są zwykle w postaci

$$a_0 = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad a_1 = e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (34)$$

A zatem kubit spinowy (33) przyjmuje postać

$$|\psi\rangle = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (35)$$

Wzór (35) podaje najogólniejszą postać stanu cząstki o spinie $1/2$. Jest to stan własny operatora

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_n = \sigma_x e_{nx} + \sigma_y e_{ny} + \sigma_z e_{nz} \quad (36)$$

Amplitudy a_0 i a_1 przyjmowane są zwykle w postaci

$$a_0 = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad a_1 = e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (34)$$

A zatem kubit spinowy (33) przyjmuje postać

$$|\psi\rangle = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (35)$$

Wzór (35) podaje najogólniejszą postać stanu cząstki o spinie $1/2$. Jest to stan własny operatora

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_n = \sigma_x e_{nx} + \sigma_y e_{ny} + \sigma_z e_{nz} \quad (36)$$

do wartości własnej $+1$.

Amplitudy a_0 i a_1 przyjmowane są zwykle w postaci

$$a_0 = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad a_1 = e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (34)$$

A zatem kubit spinowy (33) przyjmuje postać

$$|\psi\rangle = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (35)$$

Wzór (35) podaje najogólniejszą postać stanu cząstki o spinie $1/2$. Jest to stan własny operatora

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_n = \sigma_x e_{nx} + \sigma_y e_{ny} + \sigma_z e_{nz} \quad (36)$$

do wartości własnej $+1$. Wersor \mathbf{e}_n wskazuje wybrany kierunek w przestrzeni

$$\mathbf{e}_n = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z. \quad (37)$$

Operator (36) można zapisać w postaci macierzowej jako

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (38)$$

**Ewolucja kubitów spinowych w polu magnetycznym:
podstawy teoretyczne magnetycznego rezonansu
jądrowego**

Rozważmy cząstkę o spinie $1/2$ (proton) znajdującą się poddaną w stałym polu magnetycznym \mathbf{B}_0 działającym w kierunku z i zmiennego pola magnetycznego \mathbf{B}_1 rotującego w płaszczyźnie $x - y$ z częstością ω

Rozważmy cząstkę o spinie $1/2$ (proton) znajdującą się poddaną w stałym polu magnetycznym \mathbf{B}_0 działającym w kierunku z i zmiennego pola magnetycznego \mathbf{B}_1 rotującego w płaszczyźnie $x - y$ z częstością ω

$$\mathbf{B}_1(t) = B_1(\mathbf{e}_x \cos \omega t - \mathbf{e}_y \sin \omega t) . \quad (39)$$

Rozważmy cząstkę o spinie $1/2$ (proton) znajdującą się poddaną w stałym polu magnetycznym \mathbf{B}_0 działającym w kierunku z i zmiennego pola magnetycznego \mathbf{B}_1 rotującego w płaszczyźnie $x - y$ z częstością ω

$$\mathbf{B}_1(t) = B_1(\mathbf{e}_x \cos \omega t - \mathbf{e}_y \sin \omega t) . \quad (39)$$

Wypadkowe pole magnetyczne dane jest wzorem

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + B_1(\mathbf{e}_x \cos \omega t - \mathbf{e}_y \sin \omega t) . \quad (40)$$

Jeżeli uwzględnimy wyłącznie spinowe stopnie swobody, to zgodnie z (30) hamiltonian układu (proton + zewnętrzne pole magnetyczne) ma postać

Jeżeli uwzględnimy wyłącznie spinowe stopnie swobody, to zgodnie z (30) hamiltonian układu (proton + zewnętrzne pole magnetyczne) ma postać

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} , \quad (41)$$

czyli

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}\gamma_p B_0 \sigma_z - \frac{1}{2}\gamma_p B_1 (\sigma_x \cos \omega t - \sigma_y \sin \omega t) \\ &= -\frac{\hbar}{2}\omega_c \sigma_z - \frac{\hbar}{2}\omega_R (\sigma_x \cos \omega t - \sigma_y \sin \omega t) , \end{aligned} \quad (42)$$

czyli

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}\gamma_p B_0 \sigma_z - \frac{1}{2}\gamma_p B_1 (\sigma_x \cos \omega t - \sigma_y \sin \omega t) \\ &= -\frac{\hbar}{2}\omega_c \sigma_z - \frac{\hbar}{2}\omega_R (\sigma_x \cos \omega t - \sigma_y \sin \omega t) , \end{aligned} \quad (42)$$

gdzie γ_p jest czynnikiem żyromagnetycznym protonu, a ponadto zostały zdefiniowane dwie nowe częstości ω_c i ω_R za pomocą związków

czyli

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}\gamma_p B_0 \sigma_z - \frac{1}{2}\gamma_p B_1 (\sigma_x \cos \omega t - \sigma_y \sin \omega t) \\ &= -\frac{\hbar}{2}\omega_c \sigma_z - \frac{\hbar}{2}\omega_R (\sigma_x \cos \omega t - \sigma_y \sin \omega t) , \end{aligned} \quad (42)$$

gdzie γ_p jest czynnikiem żyromagnetycznym protonu, a ponadto zostały zdefiniowane dwie nowe częstości ω_c i ω_R za pomocą związków

$$\hbar\omega_c = \gamma_p B_0 , \quad (43)$$

$$\hbar\omega_R = \gamma_p B_1 . \quad (44)$$

czyli

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}\gamma_p B_0 \sigma_z - \frac{1}{2}\gamma_p B_1 (\sigma_x \cos \omega t - \sigma_y \sin \omega t) \\ &= -\frac{\hbar}{2}\omega_c \sigma_z - \frac{\hbar}{2}\omega_R (\sigma_x \cos \omega t - \sigma_y \sin \omega t) , \end{aligned} \quad (42)$$

gdzie γ_p jest czynnikiem żyromagnetycznym protonu, a ponadto zostały zdefiniowane dwie nowe częstości ω_c i ω_R za pomocą związków

$$\hbar\omega_c = \gamma_p B_0 , \quad (43)$$

$$\hbar\omega_R = \gamma_p B_1 . \quad (44)$$

Częstość ω_c nazywamy **częstością cyklotronową**, a częstość ω_R nazywamy **częstością Rabi'ego**.

czyli

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}\gamma_p B_0 \sigma_z - \frac{1}{2}\gamma_p B_1 (\sigma_x \cos \omega t - \sigma_y \sin \omega t) \\ &= -\frac{\hbar}{2}\omega_c \sigma_z - \frac{\hbar}{2}\omega_R (\sigma_x \cos \omega t - \sigma_y \sin \omega t) , \end{aligned} \quad (42)$$

gdzie γ_p jest czynnikiem żyromagnetycznym protonu, a ponadto zostały zdefiniowane dwie nowe częstości ω_c i ω_R za pomocą związków

$$\hbar\omega_c = \gamma_p B_0 , \quad (43)$$

$$\hbar\omega_R = \gamma_p B_1 . \quad (44)$$

Częstość ω_c nazywamy **częstością cyklotronową**, a częstość ω_R nazywamy **częstością Rabi'ego**. Częstość Rabi'ego jest proporcjonalna do pola B_1 i może być odpowiednio dobierana.

Najpierw rozważymy rozwiązania dla zewnętrznego pola magnetycznego niezależnego od czasu.

Najpierw rozważymy rozwiązania dla zewnętrznego pola magnetycznego niezależnego od czasu. W tym celu kładziemy $\mathbf{B}_1 = 0$, co oznacza, że na proton działa wyłącznie stałe pole magnetyczne \mathbf{B}_0 .

Najpierw rozważymy rozwiązania dla zewnętrznego pola magnetycznego niezależnego od czasu. W tym celu kładziemy $\mathbf{B}_1 = 0$, co oznacza, że na proton działa wyłącznie stałe pole magnetyczne \mathbf{B}_0 . W tym przypadku hamiltonian (42) nie zależy od czasu i przyjmuje postać

$$H = -\frac{\hbar}{2}\omega_c\sigma_z = -\frac{\hbar}{2}\omega_c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Najpierw rozważymy rozwiązania dla zewnętrznego pola magnetycznego niezależnego od czasu. W tym celu kładziemy $\mathbf{B}_1 = 0$, co oznacza, że na proton działa wyłącznie stałe pole magnetyczne \mathbf{B}_0 . W tym przypadku hamiltonian (42) nie zależy od czasu i przyjmuje postać

$$H = -\frac{\hbar}{2}\omega_c\sigma_z = -\frac{\hbar}{2}\omega_c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Hamiltonian (45) można zapisać jako

Najpierw rozważymy rozwiązania dla zewnętrznego pola magnetycznego niezależnego od czasu. W tym celu kładziemy $\mathbf{B}_1 = 0$, co oznacza, że na proton działa wyłącznie stałe pole magnetyczne \mathbf{B}_0 . W tym przypadku hamiltonian (42) nie zależy od czasu i przyjmuje postać

$$H = -\frac{\hbar}{2}\omega_c\sigma_z = -\frac{\hbar}{2}\omega_c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Hamiltonian (45) można zapisać jako

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Stanami własnymi hamiltonianu (46) są stany własne operatora σ_z , czyli stany $|0\rangle$ i $|1\rangle$ [wzór (32)].

Stanami własnymi hamiltonianu (46) są stany własne operatora σ_z , czyli stany $|0\rangle$ i $|1\rangle$ [wzór (32)]. Stanom tym odpowiadają wartości własne

$$E_0 = -\frac{\hbar}{2}\omega_c \quad (47)$$

Stanami własnymi hamiltonianu (46) są stany własne operatora σ_z , czyli stany $|0\rangle$ i $|1\rangle$ [wzór (32)]. Stanom tym odpowiadają wartości własne

$$E_0 = -\frac{\hbar}{2}\omega_c \quad (47)$$

i

$$E_1 = +\frac{\hbar}{2}\omega_c . \quad (48)$$

Ewolucja czasowa stanów własnych hamiltonianu (46) odbywa się zgodnie z zależnym od czasu równaniem Schrödingera

Ewolucja czasowa stanów własnych hamiltonianu (46) odbywa się zgodnie z zależnym od czasu równaniem Schrödingera

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H_0|\psi(t)\rangle . \quad (49)$$

Ewolucja czasowa stanów własnych hamiltonianu (46) odbywa się zgodnie z zależnym od czasu równaniem Schrödingera

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H_0|\psi(t)\rangle . \quad (49)$$

W chwili początkowej $t = 0$ stan spinowy protonu dany jest wzorem

Ewolucja czasowa stanów własnych hamiltonianu (46) odbywa się zgodnie z zależnym od czasu równaniem Schrödingera

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H_0|\psi(t)\rangle . \quad (49)$$

W chwili początkowej $t = 0$ stan spinowy protonu dany jest wzorem

$$|\psi(t = 0)\rangle = a_0(0)|0\rangle + a_1(0)|1\rangle . \quad (50)$$

Ewolucja czasowa stanów własnych hamiltonianu (46) odbywa się zgodnie z zależnym od czasu równaniem Schrödingera

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H_0|\psi(t)\rangle . \quad (49)$$

W chwili początkowej $t = 0$ stan spinowy protonu dany jest wzorem

$$|\psi(t = 0)\rangle = a_0(0)|0\rangle + a_1(0)|1\rangle . \quad (50)$$

Jest to warunek początkowy dla równania (49).

Ewolucja czasowa stanów własnych hamiltonianu (46) odbywa się zgodnie z zależnym od czasu równaniem Schrödingera

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H_0|\psi(t)\rangle . \quad (49)$$

W chwili początkowej $t = 0$ stan spinowy protonu dany jest wzorem

$$|\psi(t = 0)\rangle = a_0(0)|0\rangle + a_1(0)|1\rangle . \quad (50)$$

Jest to warunek początkowy dla równania (49). Ponieważ stany własne hamiltonianu (46) są stanami stacjonarnymi, rozwiązanie równania (49) dla dowolnej chwili t ma postać

Ewolucja czasowa stanów własnych hamiltonianu (46) odbywa się zgodnie z zależnym od czasu równaniem Schrödingera

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H_0|\psi(t)\rangle . \quad (49)$$

W chwili początkowej $t = 0$ stan spinowy protonu dany jest wzorem

$$|\psi(t = 0)\rangle = a_0(0)|0\rangle + a_1(0)|1\rangle . \quad (50)$$

Jest to warunek początkowy dla równania (49). Ponieważ stany własne hamiltonianu (46) są stanami stacjonarnymi, rozwiązanie równania (49) dla dowolnej chwili t ma postać

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_0t/\hbar}a_0(0)|0\rangle + e^{-iE_1t/\hbar}a_1(0)|1\rangle . \quad (51)$$

Rozwiążemy teraz równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle \quad (52)$$

Rozwiążemy teraz równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle \quad (52)$$

z zależnym od czasu hamiltonianem (42).

Rozwiążemy teraz równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle \quad (52)$$

z zależnym od czasu hamiltonianem (42). Wykorzystując postać macierzy Pauliego (31) możemy przepisać hamiltonian (42) w postaci macierzowej

$$H = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_c & \omega_R e^{i\omega t} \\ \omega_R e^{-i\omega t} & -\omega_c \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Rozwiążemy teraz równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle \quad (52)$$

z zależnym od czasu hamiltonianem (42). Wykorzystując postać macierzy Pauliego (31) możemy przepisać hamiltonian (42) w postaci macierzowej

$$H = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_c & \omega_R e^{i\omega t} \\ \omega_R e^{-i\omega t} & -\omega_c \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Stany $|\psi(t)\rangle$ nie są teraz stanami stacjonarnymi, można je jednak zapisać w bazie stanów $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ w ogólnej postaci

Rozwiążemy teraz równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle \quad (52)$$

z zależnym od czasu hamiltonianem (42). Wykorzystując postać macierzy Pauliego (31) możemy przepisać hamiltonian (42) w postaci macierzowej

$$H = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_c & \omega_R e^{i\omega t} \\ \omega_R e^{-i\omega t} & -\omega_c \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Stany $|\psi(t)\rangle$ nie są teraz stanami stacjonarnymi, można je jednak zapisać w bazie stanów $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ w ogólnej postaci

$$|\psi(t)\rangle = a_0(t)|0\rangle + a_1(t)|1\rangle. \quad (54)$$

Na podstawie (52) i (54) otrzymujemy układ sprzężonych równań różniczkowych

Na podstawie (52) i (54) otrzymujemy układ sprzężonych równań różniczkowych

$$i \frac{da_0(t)}{dt} = -\frac{\omega_c}{2} a_0(t) - \frac{\omega_R}{2} e^{i\omega t} a_1(t), \quad (55)$$

Na podstawie (52) i (54) otrzymujemy układ sprzężonych równań różniczkowych

$$i \frac{da_0(t)}{dt} = -\frac{\omega_c}{2} a_0(t) - \frac{\omega_R}{2} e^{i\omega t} a_1(t) , \quad (55)$$

$$i \frac{da_1(t)}{dt} = -\frac{\omega_R}{2} e^{-i\omega t} a_0(t) + \frac{\omega_c}{2} a_1(t) . \quad (56)$$

Podstawiając

$$a_0(t) = \alpha(t)e^{i\omega_c t/2}, \quad a_1(t) = \beta(t)e^{-i\omega_c t/2} \quad (57)$$

Podstawiając

$$a_0(t) = \alpha(t)e^{i\omega_c t/2}, \quad a_1(t) = \beta(t)e^{-i\omega_c t/2} \quad (57)$$

przekształcamy układ równań (55) i (56) do postaci

$$i \frac{d\alpha(t)}{dt} = -\frac{\omega_R}{2} e^{i(\omega - \omega_c)t} \beta(t), \quad (58)$$

Podstawiając

$$a_0(t) = \alpha(t)e^{i\omega_c t/2}, \quad a_1(t) = \beta(t)e^{-i\omega_c t/2} \quad (57)$$

przekształcamy układ równań (55) i (56) do postaci

$$i\frac{d\alpha(t)}{dt} = -\frac{\omega_R}{2}e^{i(\omega-\omega_c)t}\beta(t), \quad (58)$$

$$i\frac{d\beta(t)}{dt} = -\frac{\omega_R}{2}e^{-i(\omega-\omega_c)t}\alpha(t). \quad (59)$$

Układ równań (58) i (59) różniczkowych pierwszego stopnia można przetransformować do postaci pojedynczego równania różniczkowego drugiego stopnia dla $\alpha(t)$

$$\frac{2}{\omega_R} \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} - \frac{2i\Delta\omega}{\omega_R} \frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{1}{2}\omega_R\alpha(t) = 0, \quad (60)$$

gdzie $\Delta\omega = \omega - \omega_c$.

Układ równań (58) i (59) różniczkowych pierwszego stopnia można przetransformować do postaci pojedynczego równania różniczkowego drugiego stopnia dla $\alpha(t)$

$$\frac{2}{\omega_R} \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} - \frac{2i\Delta\omega}{\omega_R} \frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{1}{2}\omega_R\alpha(t) = 0, \quad (60)$$

gdzie $\Delta\omega = \omega - \omega_c$. W ogólnym przypadku rozwiązania równania (60) mają postać

$$\alpha(t) = e^{i\Omega_{\pm}t} \quad (61)$$

Układ równań (58) i (59) różniczkowych pierwszego stopnia można przetransformować do postaci pojedynczego równania różniczkowego drugiego stopnia dla $\alpha(t)$

$$\frac{2}{\omega_R} \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} - \frac{2i\Delta\omega}{\omega_R} \frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{1}{2}\omega_R\alpha(t) = 0, \quad (60)$$

gdzie $\Delta\omega = \omega - \omega_c$. W ogólnym przypadku rozwiązania równania (60) mają postać

$$\alpha(t) = e^{i\Omega_{\pm}t} \quad (61)$$

przy czym

$$\Omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\Delta\omega \pm \Omega), \quad (62)$$

Układ równań (58) i (59) różniczkowych pierwszego stopnia można przetransformować do postaci pojedynczego równania różniczkowego drugiego stopnia dla $\alpha(t)$

$$\frac{2}{\omega_R} \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} - \frac{2i\Delta\omega}{\omega_R} \frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{1}{2}\omega_R\alpha(t) = 0, \quad (60)$$

gdzie $\Delta\omega = \omega - \omega_c$. W ogólnym przypadku rozwiązania równania (60) mają postać

$$\alpha(t) = e^{i\Omega_{\pm}t} \quad (61)$$

przy czym

$$\Omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\Delta\omega \pm \Omega), \quad (62)$$

gdzie

$$\Omega = \sqrt{\omega_R + \Delta\omega}. \quad (63)$$

Rozwiążemy teraz układ równań (58, 59) w przypadku rezonansu, czyli dla $\omega = \omega_c$.

Rozwiążemy teraz układ równań (58, 59) w przypadku rezonansu, czyli dla $\omega = \omega_c$. Na podstawie (60) otrzymujemy wtedy równanie

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} = -\frac{\omega_R^2}{4}\alpha(t) . \quad (64)$$

Można sprawdzić, że rozwiązania układu równań (58, 59) mają postać

$$\alpha(t) = A \cos \frac{\omega_R t}{2} + B \sin \frac{\omega_R t}{2}, \quad (65)$$

$$\beta(t) = iA \sin \frac{\omega_R t}{2} - iB \cos \frac{\omega_R t}{2}. \quad (66)$$

Można sprawdzić, że rozwiązania układu równań (58, 59) mają postać

$$\alpha(t) = A \cos \frac{\omega_R t}{2} + B \sin \frac{\omega_R t}{2}, \quad (65)$$

$$\beta(t) = iA \sin \frac{\omega_R t}{2} - iB \cos \frac{\omega_R t}{2}. \quad (66)$$

Współczynniki A i B wyznaczamy z warunków początkowych.

Można sprawdzić, że rozwiązania układu równań (58, 59) mają postać

$$\alpha(t) = A \cos \frac{\omega_R t}{2} + B \sin \frac{\omega_R t}{2}, \quad (65)$$

$$\beta(t) = iA \sin \frac{\omega_R t}{2} - iB \cos \frac{\omega_R t}{2}. \quad (66)$$

Współczynniki A i B wyznaczamy z warunków początkowych. Jeżeli przyjmiemy, że dla $t = 0$: $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, czyli $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 0$, to $A = 1$, $B = 0$.

Podstawiając $A = 1$ i $B = 0$ do rozwiązań (65) i (66) otrzymujemy

$$\alpha(t) = \cos \frac{\omega_R t}{2} \quad (67)$$

oraz

$$\beta(t) = i \sin \frac{\omega_R t}{2} . \quad (68)$$

Wyniki te można wykorzystać do obliczenia prawdopodobieństwa $p_{0 \rightarrow 1}$ przejścia protonu ze stanu $|0\rangle$ do stanu $|1\rangle$.

Wyniki te można wykorzystać do obliczenia prawdopodobieństwa $p_{0 \rightarrow 1}$ przejścia protonu ze stanu $|0\rangle$ do stanu $|1\rangle$. Jeżeli w chwili $t = 0$ proton znajdował się w stanie spinowym $|0\rangle$, to po upływie czasu t może się znajdować w stanie $|1\rangle$ z prawdopodobieństwem

Wyniki te można wykorzystać do obliczenia prawdopodobieństwa $p_{0 \rightarrow 1}$ przejścia protonu ze stanu $|0\rangle$ do stanu $|1\rangle$. Jeżeli w chwili $t = 0$ proton znajdował się w stanie spinowym $|0\rangle$, to po upływie czasu t może się znajdować w stanie $|1\rangle$ z prawdopodobieństwem

$$p_{0 \rightarrow 1} = \sin^2 \frac{\omega_R t}{2}, \quad (69)$$

Wyniki te można wykorzystać do obliczenia prawdopodobieństwa $p_{0 \rightarrow 1}$ przejścia protonu ze stanu $|0\rangle$ do stanu $|1\rangle$. Jeżeli w chwili $t = 0$ proton znajdował się w stanie spinowym $|0\rangle$, to po upływie czasu t może się znajdować w stanie $|1\rangle$ z prawdopodobieństwem

$$p_{0 \rightarrow 1} = \sin^2 \frac{\omega_R t}{2}, \quad (69)$$

przy czym wzór (69) jest słuszny dla rezonansu, czyli dla $\omega = \omega_c$.

Wykorzystamy wzór (69) do wyznaczenia prawdopodobieństw przejść dla określonych czasów działania pola rotującego \mathbf{B}_1 .

Wykorzystamy wzór (69) do wyznaczenia prawdopodobieństw przejść dla określonych czasów działania pola rotującego \mathbf{B}_1 .

(1) Impuls π

Wykorzystamy wzór (69) do wyznaczenia prawdopodobieństw przejść dla określonych czasów działania pola rotującego \mathbf{B}_1 .

(1) Impuls π

Jeżeli do wzoru (69) podstawimy

$$t = T_\pi = \frac{\pi}{\omega_R}, \quad (70)$$

Wykorzystamy wzór (69) do wyznaczenia prawdopodobieństw przejść dla określonych czasów działania pola rotującego \mathbf{B}_1 .

(1) Impuls π

Jeżeli do wzoru (69) podstawimy

$$t = T_\pi = \frac{\pi}{\omega_R}, \quad (70)$$

czyli

$$\omega_R t = \pi, \quad (71)$$

Wykorzystamy wzór (69) do wyznaczenia prawdopodobieństw przejść dla określonych czasów działania pola rotującego \mathbf{B}_1 .

(1) Impuls π

Jeżeli do wzoru (69) podstawimy

$$t = T_\pi = \frac{\pi}{\omega_R}, \quad (70)$$

czyli

$$\omega_R t = \pi, \quad (71)$$

to otrzymamy

$$p_{0 \rightarrow 1} = 1.$$

Wykorzystamy wzór (69) do wyznaczenia prawdopodobieństw przejść dla określonych czasów działania pola rotującego \mathbf{B}_1 .

(1) Impuls π

Jeżeli do wzoru (69) podstawimy

$$t = T_\pi = \frac{\pi}{\omega_R}, \quad (70)$$

czyli

$$\omega_R t = \pi, \quad (71)$$

to otrzymamy

$$p_{0 \rightarrow 1} = 1.$$

Pole rotujące \mathbf{B}_1 , działające na proton, przez czas T_π nazywamy **impulsem** π .

Wykorzystamy wzór (69) do wyznaczenia prawdopodobieństw przejść dla określonych czasów działania pola rotującego \mathbf{B}_1 .

(1) Impuls π

Jeżeli do wzoru (69) podstawimy

$$t = T_\pi = \frac{\pi}{\omega_R}, \quad (70)$$

czyli

$$\omega_R t = \pi, \quad (71)$$

to otrzymamy

$$p_{0 \rightarrow 1} = 1.$$

Pole rotujące \mathbf{B}_1 , działające na proton, przez czas T_π nazywamy **impulsem π** . Impuls π przeprowadza stan początkowy $|0\rangle$ w stan $|1\rangle$.

(2) Impuls $\pi/2$

(2) Impuls $\pi/2$

Jeżeli natomiast do wzoru (69) podstawimy

$$t = T_{\pi/2} = \frac{\pi}{2\omega_R}, \quad (72)$$

(2) Impuls $\pi/2$

Jeżeli natomiast do wzoru (69) podstawimy

$$t = T_{\pi/2} = \frac{\pi}{2\omega_R}, \quad (72)$$

to otrzymamy

$$p_{0 \rightarrow 1} = 1/2,$$

(2) Impuls $\pi/2$

Jeżeli natomiast do wzoru (69) podstawimy

$$t = T_{\pi/2} = \frac{\pi}{2\omega_R}, \quad (72)$$

to otrzymamy

$$p_{0 \rightarrow 1} = 1/2,$$

co oznacza, że po upływie czasu $t = T_{\pi/2} = \pi/(2\omega_R)$ otrzymujemy kombinację liniową stanów $|0\rangle$ i $|1\rangle$ o postaci

(2) Impuls $\pi/2$

Jeżeli natomiast do wzoru (69) podstawimy

$$t = T_{\pi/2} = \frac{\pi}{2\omega_R}, \quad (72)$$

to otrzymamy

$$p_{0 \rightarrow 1} = 1/2,$$

co oznacza, że po upływie czasu $t = T_{\pi/2} = \pi/(2\omega_R)$ otrzymujemy kombinację liniową stanów $|0\rangle$ i $|1\rangle$ o postaci

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\omega_c t/2} |0\rangle + i e^{-i\omega_c t/2} |1\rangle \right). \quad (73)$$

W celu interpretacji powyższego wyniku zdefiniujmy stany

$$|\tilde{0}\rangle \stackrel{def}{=} e^{i\omega_{ct}/2}|0\rangle, \quad (74)$$

W celu interpretacji powyższego wyniku zdefiniujmy stany

$$|\tilde{0}\rangle \stackrel{def}{=} e^{i\omega_{ct}/2}|0\rangle, \quad (74)$$

$$|\tilde{1}\rangle \stackrel{def}{=} ie^{-i\omega_{ct}/2}|1\rangle. \quad (75)$$

W celu interpretacji powyższego wyniku zdefiniujmy stany

$$|\tilde{0}\rangle \stackrel{def}{=} e^{i\omega_{ct}/2}|0\rangle, \quad (74)$$

$$|\tilde{1}\rangle \stackrel{def}{=} ie^{-i\omega_{ct}/2}|1\rangle. \quad (75)$$

Stany te są fizycznie równoważne stanom $|0\rangle$ i $|1\rangle$, ponieważ są to nadal stany własne operatora σ_z do wartości własnych ± 1 .

W celu interpretacji powyższego wyniku zdefiniujmy stany

$$|\tilde{0}\rangle \stackrel{def}{=} e^{i\omega_{ct}/2}|0\rangle, \quad (74)$$

$$|\tilde{1}\rangle \stackrel{def}{=} ie^{-i\omega_{ct}/2}|1\rangle. \quad (75)$$

Stany te są fizycznie równoważne stanom $|0\rangle$ i $|1\rangle$, ponieważ są to nadal stany własne operatora σ_z do wartości własnych ± 1 . Rozwiązanie (73) przyjmuje zatem postać

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\tilde{0}\rangle + |\tilde{1}\rangle). \quad (76)$$

Wniosek

Wniosek

Impuls $\pi/2$ przeprowadza stan początkowy $|0\rangle$ w stan (76),

Wniosek

Impuls $\pi/2$ przeprowadza stan początkowy $|0\rangle$ w stan (76), czyli kombinację liniową stanów bazy obliczeniowej z jednakowymi amplitudami.

Wniosek

Impuls $\pi/2$ przeprowadza stan początkowy $|0\rangle$ w stan (76), czyli kombinację liniową stanów bazy obliczeniowej z jednakowymi amplitudami. Innymi słowy po upływie czasu $T_{\pi/2}$ oba stany bazy są realizowane z prawdopodobieństwem $1/2$.