

# KWANTOWE BRAMKI LOGICZNE

# Wprowadzenie

Wykład ten poświęcony jest dokładniejszemu omówieniu własności kwantowych bramek logicznych (kwantowych operacji logicznych).

Podstawowymi elementami komputera klasycznego są **obwody elektryczne**, które zawierają przewody (druty) i **bramki logiczne**.

Podstawowymi elementami komputera klasycznego są **obwody elektryczne**, które zawierają przewody (druty) i **bramki logiczne**.

Komputer kwantowy powinien być zbudowany w analogiczny sposób z **obwodów kwantowych**, które są złożone z przewodów i **kwantowych bramek logicznych**.

Podstawowymi elementami komputera klasycznego są **obwody elektryczne**, które zawierają przewody (druty) i **bramki logiczne**.

Komputer kwantowy powinien być zbudowany w analogiczny sposób z **obwodów kwantowych**, które są złożone z przewodów i **kwantowych bramek logicznych**. Informacja jest przetwarzana przez bramki logiczne i przenoszona przez przewody.

Stosując język matematyki opisujemy kwantową bramkę logiczną za pomocą **operacji unitarnej**  $U$ , która przekształca kubit wejściowy w kubit wyjściowy, czyli

Stosując język matematyki opisujemy kwantową bramkę logiczną za pomocą **operacji unitarnej**  $U$ , która przekształca kubit wejściowy w kubit wyjściowy, czyli

$$|\psi_{output}\rangle = U|\psi_{input}\rangle , \quad (1)$$

Stosując język matematyki opisujemy kwantową bramkę logiczną za pomocą **operacji unitarnej**  $U$ , która przekształca kubit wejściowy w kubit wyjściowy, czyli

$$|\psi_{output}\rangle = U|\psi_{input}\rangle , \quad (1)$$

przy czym spełniony jest warunek unitarności operatora  $U$

Stosując język matematyki opisujemy kwantową bramkę logiczną za pomocą **operacji unitarnej**  $U$ , która przekształca kubit wejściowy w kubit wyjściowy, czyli

$$|\psi_{output}\rangle = U|\psi_{input}\rangle , \quad (1)$$

przy czym spełniony jest warunek unitarności operatora  $U$

$$U^\dagger U = I , \text{ czyli } U^\dagger = U^{-1} , \quad (2)$$

gdzie  $I$  jest operatorem jednostkowym.

Równanie (1) możemy zapisać w skróconej postaci

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle . \quad (3)$$

# Uwagi

## Uwagi

- (1) Unitarność operatora  $U$  wynika z konieczności zachowania unormowania kubitów.

## Uwagi

- (1) Unitarność operatora  $U$  wynika z konieczności zachowania unormowania kubitów. Dla unitarnego operatora  $U$  zachodzi bowiem

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle = \langle \psi | I | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1 .$$

- (2) Unitarność operatora  $U$  prowadzi do **odwracalności** operacji kwantowych.

- (2) Unitarność operatora  $U$  prowadzi do **odwracalności** operacji kwantowych. Wynika to z faktu, iż operator ewolucji w czasie  $U(t)$  ma postać

- (2) Unitarność operatora  $U$  prowadzi do **odwracalności** operacji kwantowych. Wynika to z faktu, iż operator ewolucji w czasie  $U(t)$  ma postać

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right), \quad (4)$$

- (2) Unitarność operatora  $U$  prowadzi do **odwracalności** operacji kwantowych. Wynika to z faktu, iż operator ewolucji w czasie  $U(t)$  ma postać

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right), \quad (4)$$

gdzie  $\hat{H}$  jest hamiltonianem układu.

- (2) Unitarność operatora  $U$  prowadzi do **odwracalności** operacji kwantowych. Wynika to z faktu, iż operator ewolucji w czasie  $U(t)$  ma postać

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right), \quad (4)$$

gdzie  $\hat{H}$  jest hamiltonianem układu.  
Zgodnie z (4)

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$$

oraz

$$|\psi(-t)\rangle = U(-t)|\psi(0)\rangle = U^\dagger(t)|\psi(0)\rangle.$$

- (2) Unitarność operatora  $U$  prowadzi do **odwracalności** operacji kwantowych. Wynika to z faktu, iż operator ewolucji w czasie  $U(t)$  ma postać

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right), \quad (4)$$

gdzie  $\hat{H}$  jest hamiltonianem układu.  
Zgodnie z (4)

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$$

oraz

$$|\psi(-t)\rangle = U(-t)|\psi(0)\rangle = U^\dagger(t)|\psi(0)\rangle.$$

Dla  $t > 0$  ten sam stan  $|\psi(0)\rangle$  można otrzymać jako wynik ewolucji w czasie "wstecz"

$$|\psi(0)\rangle = U^\dagger(t)|\psi(t)\rangle$$

i "do przodu"

$$|\psi(0)\rangle = U^\dagger(-t)|\psi(-t)\rangle.$$

Jeżeli stany  $|\psi_{input}\rangle$  i  $|\psi_{output}\rangle$  są pojedynczymi kubitami, to mówimy o **kwantowej bramce jednokubitowej**,

Jeżeli stany  $|\psi_{input}\rangle$  i  $|\psi_{output}\rangle$  są pojedynczymi kubitami, to mówimy o **kwantowej bramce jednokubitowej**, jeżeli stany te są kubitami podwójnymi, to operator  $U$  reprezentuje **bramkę dwukubitową**.

Jeżeli stany  $|\psi_{input}\rangle$  i  $|\psi_{output}\rangle$  są pojedynczymi kubitami, to mówimy o **kwantowej bramce jednokubitowej**, jeżeli stany te są kubitami podwójnymi, to operator  $U$  reprezentuje **bramkę dwukubitową**. Natomiast dla stanów  $n$ -kubitowych, gdzie  $n > 2$ , w (1) mamy do czynienia z **bramką  $n$ -kubitową**.

Jeżeli stany  $|\psi_{input}\rangle$  i  $|\psi_{output}\rangle$  są pojedynczymi kubitami, to mówimy o **kwantowej bramce jednokubitowej**, jeżeli stany te są kubitami podwójnymi, to operator  $U$  reprezentuje **bramkę dwukubitową**. Natomiast dla stanów  $n$ -kubitowych, gdzie  $n > 2$ , w (1) mamy do czynienia z **bramką  $n$ -kubitową**. Jak się okaże – na podstawie twierdzenia o uniwersalnym zbiorze kwantowych bramek logicznych – do wykonania dowolnej kwantowej operacji logicznej wystarczy odpowiednia kombinacja bramek jedno- i dwukubitowych.

# Bramki jednokubitowe

Pojedynczy kubit jest wektorem w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}^{(2)}$ , a zatem operator  $U$  w reprezentacji macierzowej jest macierzą unitarną  $2 \times 2$ .

Pojedynczy kubit jest wektorem w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}^{(2)}$ , a zatem operator  $U$  w reprezentacji macierzowej jest macierzą unitarną  $2 \times 2$ . Kubit  $|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$  można zapisać w postaci macierzowej jako

Pojedynczy kubit jest wektorem w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}^{(2)}$ , a zatem operator  $U$  w reprezentacji macierzowej jest macierzą unitarną  $2 \times 2$ . Kubit  $|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$  można zapisać w postaci macierzowej jako

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Natomiast macierz  $U$  ma postać

Pojedynczy kubit jest wektorem w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}^{(2)}$ , a zatem operator  $U$  w reprezentacji macierzowej jest macierzą unitarną  $2 \times 2$ . Kubit  $|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$  można zapisać w postaci macierzowej jako

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Natomiast macierz  $U$  ma postać

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (6)$$

W wyniku działania operatora  $U$  ulegają zmianie amplitudy  $a_0$  i  $a_1$ , czyli

W wyniku działania operatora  $U$  ulegają zmianie amplitudy  $a_0$  i  $a_1$ , czyli

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle = a'_0|0\rangle + a'_1|1\rangle, \quad (7)$$

W wyniku działania operatora  $U$  ulegają zmianie amplitudy  $a_0$  i  $a_1$ , czyli

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle = a'_0|0\rangle + a'_1|1\rangle, \quad (7)$$

lub w reprezentacji macierzowej

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

W wyniku działania operatora  $U$  ulegają zmianie amplitudy  $a_0$  i  $a_1$ , czyli

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle = a'_0|0\rangle + a'_1|1\rangle, \quad (7)$$

lub w reprezentacji macierzowej

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Z warunku unormowania kubitów  $|\psi\rangle$  wynika, że

W wyniku działania operatora  $U$  ulegają zmianie amplitudy  $a_0$  i  $a_1$ , czyli

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle = a'_0|0\rangle + a'_1|1\rangle, \quad (7)$$

lub w reprezentacji macierzowej

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Z warunku unormowania kubitów  $|\psi\rangle$  wynika, że

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1. \quad (9)$$

W wyniku działania operatora  $U$  ulegają zmianie amplitudy  $a_0$  i  $a_1$ , czyli

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle = a'_0|0\rangle + a'_1|1\rangle, \quad (7)$$

lub w reprezentacji macierzowej

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Z warunku unormowania kubitów  $|\psi\rangle$  wynika, że

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1. \quad (9)$$

Natomiast unormowanie kubitów  $|\psi'\rangle$  jest równoważne relacji

$$|a'_0|^2 + |a'_1|^2 = 1. \quad (10)$$

Zaprezentuję teraz najważniejsze jednokubitowe bramki (operacje) kwantowe.

Zaprezentuję teraz najważniejsze jednokubitowe bramki (operacje) kwantowe.

## Bramki $X$ , $Y$ , $Z$

Zaprezentuję teraz najważniejsze jednokubitowe bramki (operacje) kwantowe.

## Bramki $X$ , $Y$ , $Z$

Bramki te zdefiniowane są za pomocą **macierzy Pauliego**

$$X = \sigma_x, \quad Y = \sigma_y, \quad Z = \sigma_z, \quad (11)$$

Zaprezentuję teraz najważniejsze jednokubitowe bramki (operacje) kwantowe.

## Bramki $X$ , $Y$ , $Z$

Bramki te zdefiniowane są za pomocą **macierzy Pauliego**

$$X = \sigma_x, \quad Y = \sigma_y, \quad Z = \sigma_z, \quad (11)$$

lub w jawnej postaci

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

## Bramka Hadamarda $H$

## Bramka Hadamarda $H$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

## Bramka fazowa $S$

## Bramka fazowa $S$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (14)$$

Bramka  $T$ , inaczej zwana bramką  $\pi/8$

Bramka  $T$ , inaczej zwana bramką  $\pi/8$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\pi/4) \end{pmatrix} \quad (15)$$

**Bramka  $T$ , inaczej zwana bramką  $\pi/8$**

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\pi/4) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Bramka  $T$  może być zapisana w równoważnej postaci jako

**Bramka  $T$ , inaczej zwana bramką  $\pi/8$**

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\pi/4) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Bramka  $T$  może być zapisana w równoważnej postaci jako

$$T = \exp(i\pi/8) \begin{pmatrix} \exp(-i\pi/8) & 0 \\ 0 & \exp(i\pi/8) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

## Bramka zmiany fazy $F$

## Bramka zmiany fazy $F$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\theta) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

## Bramka zmiany fazy $F$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\theta) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

gdzie  $\theta$  jest liczbą rzeczywistą.

## Bramka zmiany fazy $F$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\theta) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

gdzie  $\theta$  jest liczbą rzeczywistą.

Bramki  $S$  i  $T$  są szczególnymi przypadkami bramki  $F$ .

## Bramka zmiany fazy $F$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\theta) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

gdzie  $\theta$  jest liczbą rzeczywistą.

Bramki  $S$  i  $T$  są szczególnymi przypadkami bramki  $F$ .

Otrzymamy je podstawiając  $\theta = \pi/2$  (bramka  $S$ ) i  $\theta = \pi/4$  (bramka  $T$ ).

Uwaga

## Uwaga

Bramka  $X$  jest **bramką kwantowej negacji**, czyli bramką *NOT*, ponieważ w wyniku jej działania na stany bazy obliczeniowej otrzymujemy

## Uwaga

Bramka  $X$  jest **bramką kwantowej negacji**, czyli bramką *NOT*, ponieważ w wyniku jej działania na stany bazy obliczeniowej otrzymujemy

$$X|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \quad (18)$$

## Uwaga

Bramka  $X$  jest **bramką kwantowej negacji**, czyli bramką *NOT*, ponieważ w wyniku jej działania na stany bazy obliczeniowej otrzymujemy

$$X|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \quad (18)$$

oraz

$$X|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle. \quad (19)$$

A zatem bramka  $X$  zamienia stany bazy

A zatem bramka  $X$  zamienia stany bazy

$$|0\rangle \longleftrightarrow |1\rangle , \quad (20)$$

A zatem bramka  $X$  zamienia stany bazy

$$|0\rangle \longleftrightarrow |1\rangle , \quad (20)$$

co oznacza **kwantową negację**.

A zatem bramka  $X$  zamienia stany bazy

$$|0\rangle \longleftrightarrow |1\rangle , \quad (20)$$

co oznacza **kwantową negację**.

Korzystając z bramki  $X$  możemy zdefiniować nową bramkę kwantową za pomocą macierzy unitarnej

Korzystając z bramki  $X$  możemy zdefiniować nową bramkę kwantową za pomocą macierzy unitarnej

$$\sqrt{X} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Korzystając z bramki  $X$  możemy zdefiniować nową bramkę kwantową za pomocą macierzy unitarnej

$$\sqrt{X} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Działając bramką (21) na stany bazowe otrzymujemy

Korzystając z bramki  $X$  możemy zdefiniować nową bramkę kwantową za pomocą macierzy unitarnej

$$\sqrt{X} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Działając bramką (21) na stany bazowe otrzymujemy

$$\sqrt{X}|0\rangle = \frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{1-i}{2}|1\rangle, \quad (22)$$

Korzystając z bramki  $X$  możemy zdefiniować nową bramkę kwantową za pomocą macierzy unitarnej

$$\sqrt{X} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Działając bramką (21) na stany bazowe otrzymujemy

$$\sqrt{X}|0\rangle = \frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{1-i}{2}|1\rangle, \quad (22)$$

$$\sqrt{X}|1\rangle = \frac{1-i}{2}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle, \quad (23)$$

Korzystając z bramki  $X$  możemy zdefiniować nową bramkę kwantową za pomocą macierzy unitarnej

$$\sqrt{X} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Działając bramką (21) na stany bazowe otrzymujemy

$$\sqrt{X}|0\rangle = \frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{1-i}{2}|1\rangle, \quad (22)$$

$$\sqrt{X}|1\rangle = \frac{1-i}{2}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle, \quad (23)$$

Można zauważyć, że dla obu otrzymanych stanów (22) i (23) prawdopodobieństwa wystąpienia stanów bazowych  $|0\rangle$  i  $|1\rangle$  są jednakowe i równe  $1/2$ ,

Korzystając z bramki  $X$  możemy zdefiniować nową bramkę kwantową za pomocą macierzy unitarnej

$$\sqrt{X} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Działając bramką (21) na stany bazowe otrzymujemy

$$\sqrt{X}|0\rangle = \frac{1+i}{2}|0\rangle + \frac{1-i}{2}|1\rangle, \quad (22)$$

$$\sqrt{X}|1\rangle = \frac{1-i}{2}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle, \quad (23)$$

Można zauważyć, że dla obu otrzymanych stanów (22) i (23) prawdopodobieństwa wystąpienia stanów bazowych  $|0\rangle$  i  $|1\rangle$  są jednakowe i równe  $1/2$ , ponieważ

$$\left| \frac{1+i}{2} \right|^2 = \left| \frac{1-i}{2} \right|^2 = \frac{1}{2}.$$

Obliczamy iloczyn operatorów (21) i otrzymujemy

$$\sqrt{X}\sqrt{X} = X . \quad (24)$$

Obliczamy iloczyn operatorów (21) i otrzymujemy

$$\sqrt{X}\sqrt{X} = X . \quad (24)$$

Na podstawie własności (24) nazywamy bramkę  $\sqrt{X}$  **pierwiastkiem kwadratowym z kwantowej negacji**.

Obliczamy iloczyn operatorów (21) i otrzymujemy

$$\sqrt{X}\sqrt{X} = X . \quad (24)$$

Na podstawie własności (24) nazywamy bramkę  $\sqrt{X}$  **pierwiastkiem kwadratowym z kwantowej negacji**. Łatwo zauważyć, że bramka  $\sqrt{X}$  nie posiada odpowiednika klasycznego (podobnie jak wiele innych bramek kwantowych).

Inne stosowane oznaczenia:

$$X \equiv NOT \text{ lub } U_{NOT}$$

Inne stosowane oznaczenia:

$$X \equiv NOT \text{ lub } U_{NOT}$$

$$\sqrt{X} \equiv \sqrt{NOT} \text{ lub } U_{\sqrt{NOT}}$$

Przedstawię teraz ciekawą własność bramki Hadamarda (13).

Przedstawię teraz ciekawą własność bramki Hadamarda (13).  
Rozważam bazę obliczeniową, którą obecnie zapisuję w postaci

Przedstawię teraz ciekawą własność bramki Hadamarda (13).  
Rozważam bazę obliczeniową, którą obecnie zapisuję w postaci

$$\{|\mathcal{O}\rangle, |\mathcal{R}\rangle\} . \quad (25)$$

Przedstawię teraz ciekawą własność bramki Hadamarda (13).  
Rozważam bazę obliczeniową, którą obecnie zapisuję w postaci

$$\{|\mathcal{O}\rangle, |\mathcal{R}\rangle\} . \quad (25)$$

Układ, który może się znajdować w stanach bazy (25)  
nazywamy **monetą kwantową** (jest to oczywiście szczególny  
przypadek kubitów).

Przedstawię teraz ciekawą własność bramki Hadamarda (13).  
Rozważam bazę obliczeniową, którą obecnie zapisuję w postaci

$$\{|\mathcal{O}\rangle, |\mathcal{R}\rangle\} . \quad (25)$$

Układ, który może się znajdować w stanach bazy (25) nazywamy **monetą kwantową** (jest to oczywiście szczególny przypadek kubit). Stan  $\mathcal{O}$  można nazwać stanem **orła kwantowego**, a stan  $\mathcal{R}$  stanem **reszki kwantowej**.

Stany bazy (25) poddajemy działaniu bramki Hadamarda (13) i otrzymujemy w wyniku

Stany bazy (25) poddajemy działaniu bramki Hadamarda (13) i otrzymujemy w wyniku

$$H|\mathcal{O}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle, \quad (26)$$

Stany bazy (25) poddajemy działaniu bramki Hadamarda (13) i otrzymujemy w wyniku

$$H|\mathcal{O}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle, \quad (26)$$

$$H|\mathcal{R}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle. \quad (27)$$

Stany bazy (25) poddajemy działaniu bramki Hadamarda (13) i otrzymujemy w wyniku

$$H|\mathcal{O}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle, \quad (26)$$

$$H|\mathcal{R}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle. \quad (27)$$

Operacje dane wzorami (26) i (27) nazywamy **kwantowym symetrycznym rzutem monetą**.

Stany bazy (25) poddajemy działaniu bramki Hadamarda (13) i otrzymujemy w wyniku

$$H|\mathcal{O}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle, \quad (26)$$

$$H|\mathcal{R}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle. \quad (27)$$

Operacje dane wzorami (26) i (27) nazywamy **kwantowym symetrycznym rzutem monetą**. Można zauważyć, że niezależnie od tego, czy stanem początkowym jest  $|\mathcal{O}\rangle$  czy  $|\mathcal{R}\rangle$ , po każdym pojedynczym rzucie kwantowym układ znajduje się w stanie, w którym oba stany  $|\mathcal{O}\rangle$  i  $|\mathcal{R}\rangle$  mogą być zaobserwowane z prawdopodobieństwem równym  $1/2$ .

Stany bazy (25) poddajemy działaniu bramki Hadamarda (13) i otrzymujemy w wyniku

$$H|\mathcal{O}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle, \quad (26)$$

$$H|\mathcal{R}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle. \quad (27)$$

Operacje dane wzorami (26) i (27) nazywamy **kwantowym symetrycznym rzutem monetą**. Można zauważyć, że niezależnie od tego, czy stanem początkowym jest  $|\mathcal{O}\rangle$  czy  $|\mathcal{R}\rangle$ , po każdym pojedynczym rzucie kwantowym układ znajduje się w stanie, w którym oba stany  $|\mathcal{O}\rangle$  i  $|\mathcal{R}\rangle$  mogą być zaobserwowane z prawdopodobieństwem równym  $1/2$ . Własność ta uzasadnia nazwę monety kwantowej.

Założmy teraz, że układ znajduje się w stanie początkowym  $\mathcal{O}\rangle$  i wykonujemy **dwukrotnie** rzut symetryczny, czyli dokonujemy transformacji

Założmy teraz, że układ znajduje się w stanie początkowym  $|\mathcal{O}\rangle$  i wykonujemy **dwukrotnie** rzut symetryczny, czyli dokonujemy transformacji

$$H^2|\mathcal{O}\rangle = H \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle \right) = |\mathcal{O}\rangle, \quad (28)$$

Założmy teraz, że układ znajduje się w stanie początkowym  $|\mathcal{O}\rangle$  i wykonujemy **dwukrotnie** rzut symetryczny, czyli dokonujemy transformacji

$$H^2|\mathcal{O}\rangle = H \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle \right) = |\mathcal{O}\rangle, \quad (28)$$

czyli po drugim rzucie układ powraca do stanu początkowego  $|\mathcal{O}\rangle$ .

Założmy teraz, że układ znajduje się w stanie początkowym  $|\mathcal{O}\rangle$  i wykonujemy **dwukrotnie** rzut symetryczny, czyli dokonujemy transformacji

$$H^2|\mathcal{O}\rangle = H \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle \right) = |\mathcal{O}\rangle, \quad (28)$$

czyli po drugim rzucie układ powraca do stanu początkowego  $|\mathcal{O}\rangle$ .

Zaobserwowaliśmy zjawisko polegające na tym, że w drugim rzucie prawdopodobieństwo zaobserwowania stanu  $|\mathcal{R}\rangle$  wynosi 0.

Założmy teraz, że układ znajduje się w stanie początkowym  $|\mathcal{O}\rangle$  i wykonujemy **dwukrotnie** rzut symetryczny, czyli dokonujemy transformacji

$$H^2|\mathcal{O}\rangle = H \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{O}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathcal{R}\rangle \right) = |\mathcal{O}\rangle, \quad (28)$$

czyli po drugim rzucie układ powraca do stanu początkowego  $|\mathcal{O}\rangle$ .

Zaobserwowaliśmy zjawisko polegające na tym, że w drugim rzucie prawdopodobieństwo zaobserwowania stanu  $|\mathcal{R}\rangle$  wynosi 0. Zjawisko to ma charakter czysto kwantowy i nie może zajść w żadnym klasycznym układzie probabilistycznym.

# Dekompozycja dowolnej bramki jednokubitowej

## Dekompozycja dowolnej bramki jednokubitowej

Dowolna macierz unitarna  $2 \times 2$  może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy

## Dekompozycja dowolnej bramki jednokubitowej

Dowolna macierz unitarna  $2 \times 2$  może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy

$$U = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & -\sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

## Dekompozycja dowolnej bramki jednokubitowej

Dowolna macierz unitarna  $2 \times 2$  może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy

$$U = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & -\sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$  są liczbami rzeczywistymi.

## Dekompozycja dowolnej bramki jednokubitowej

Dowolna macierz unitarna  $2 \times 2$  może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy

$$U = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & -\sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$  są liczbami rzeczywistymi. Można zauważyć, że druga macierz przedstawia zwykły obrót, natomiast macierze pierwsza i trzecia też odpowiadają obrotom, ale w innej płaszczyźnie.

## Dekompozycja dowolnej bramki jednokubitowej

Dowolna macierz unitarna  $2 \times 2$  może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy

$$U = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & -\sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$  są liczbami rzeczywistymi. Można zauważyć, że druga macierz przedstawia zwykły obrót, natomiast macierze pierwsza i trzecia też odpowiadają obrotom, ale w innej płaszczyźnie.

Dekompozycja (29) dostarcza dokładnego przepisu na wykonanie **dowolnej** jednokubitowej kwantowej bramki logicznej.

# Bramki dwukubitowe

Bramki dwukubitowe działają w przestrzeni stanów dwukubitowych

Bramki dwukubitowe działają w przestrzeni stanów dwukubitowych

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle, \quad (30)$$

Bramki dwukubitowe działają w przestrzeni stanów dwukubitowych

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle, \quad (30)$$

przy czym spełniony jest warunek unormowania

Bramki dwukubitowe działają w przestrzeni stanów dwukubitowych

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle, \quad (30)$$

przy czym spełniony jest warunek unormowania

$$|a_{00}|^2 + |a_{01}|^2 + |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2 = 1. \quad (31)$$

Dwukubitowe stany bazowe można przedstawić w reprezentacji macierzowej jako macierze  $4 \times 1$

Dwukubitowe stany bazowe można przedstawić w reprezentacji macierzowej jako macierze  $4 \times 1$

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Dwukubitowe stany bazowe można przedstawić w reprezentacji macierzowej jako macierze  $4 \times 1$

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$|01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Dwukubitowe stany bazowe można przedstawić w reprezentacji macierzowej jako macierze  $4 \times 1$

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$|01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$|10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Dwukubitowe stany bazowe można przedstawić w reprezentacji macierzowej jako macierze  $4 \times 1$

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$|01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$|10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$|11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Zgodnie z podaną powyżej reprezentacją macierzową bazowych stanów dwukubitowych dowolny stan dwukubitowy  $|\psi\rangle$  posiada następującą reprezentację macierzową

Zgodnie z podaną powyżej reprezentacją macierzową bazowych stanów dwukubitowych dowolny stan dwukubitowy  $|\psi\rangle$  posiada następującą reprezentację macierzową

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Zgodnie z podaną powyżej reprezentacją macierzową bazowych stanów dwukubitowych dowolny stan dwukubitowy  $|\psi\rangle$  posiada następującą reprezentację macierzową

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

W reprezentacji macierzowej bramka dwukubitowa jest macierzą unitarną  $4 \times 4$ , która działa na stan dwukubitowy (36).

## Operacje kontrolowane (bramki sterowane)

## Operacje kontrolowane (bramki sterowane)

Ważną klasę bramek dwukubitowych stanowią **bramki sterowane (kontrolowane)**.

## Operacje kontrolowane (bramki sterowane)

Ważną klasę bramek dwukubitowych stanowią **bramki sterowane (kontrolowane)**.

Bramka sterowana ma ogólną postać

## Operacje kontrolowane (bramki sterowane)

Ważną klasę bramek dwukubitowych stanowią **bramki sterowane (kontrolowane)**.

Bramka sterowana ma ogólną postać

$$|\psi_{output}\rangle = U_{CG}|\psi_{input}\rangle , \quad (37)$$

## Operacje kontrolowane (bramki sterowane)

Ważną klasę bramek dwukubitowych stanowią **bramki sterowane (kontrolowane)**.

Bramka sterowana ma ogólną postać

$$|\psi_{output}\rangle = U_{CG}|\psi_{input}\rangle, \quad (37)$$

gdzie  $U_{CG}$  jest kontrolowaną operacją dwukubitową, odpowiadającą jednokubitowej operacji  $G$ .

Omówimy nieco dokładniej własności bramki sterowanej.

Omówimy nieco dokładniej własności bramki sterowanej.  
Kubit wejściowy można zapisać w postaci

Omówimy nieco dokładniej własności bramki sterowanej.  
Kubit wejściowy można zapisać w postaci

$$|\psi_{input}\rangle = |c\rangle|t\rangle, \quad (38)$$

Omówimy nieco dokładniej własności bramki sterowanej.  
Kubit wejściowy można zapisać w postaci

$$|\psi_{input}\rangle = |c\rangle|t\rangle, \quad (38)$$

gdzie  $|c\rangle$  i  $|t\rangle$  są stanami jednokubitowej bazy obliczeniowej ( $|c\rangle, |t\rangle = |0\rangle, |1\rangle$ ).

Omówimy nieco dokładniej własności bramki sterowanej.  
Kubit wejściowy można zapisać w postaci

$$|\psi_{input}\rangle = |c\rangle|t\rangle, \quad (38)$$

gdzie  $|c\rangle$  i  $|t\rangle$  są stanami jednokubitowej bazy obliczeniowej ( $|c\rangle, |t\rangle = |0\rangle, |1\rangle$ ). Kubit  $|c\rangle$  jest **kubitem sterującym** (*control qubit*), a kubit  $|t\rangle$  jest **kubitem sterowanym** (*target qubit*).

Omówimy nieco dokładniej własności bramki sterowanej.  
Kubit wejściowy można zapisać w postaci

$$|\psi_{input}\rangle = |c\rangle|t\rangle, \quad (38)$$

gdzie  $|c\rangle$  i  $|t\rangle$  są stanami jednokubitowej bazy obliczeniowej ( $|c\rangle, |t\rangle = |0\rangle, |1\rangle$ ). Kubit  $|c\rangle$  jest **kubitem sterującym** (*control qubit*), a kubit  $|t\rangle$  jest **kubitem sterowanym** (*target qubit*). W wyniku operacji sterowanej otrzymujemy

$$|\psi_{output}\rangle = |c\rangle|t'\rangle, \quad (39)$$

Omówimy nieco dokładniej własności bramki sterowanej.  
Kubit wejściowy można zapisać w postaci

$$|\psi_{input}\rangle = |c\rangle|t\rangle, \quad (38)$$

gdzie  $|c\rangle$  i  $|t\rangle$  są stanami jednokubitowej bazy obliczeniowej ( $|c\rangle, |t\rangle = |0\rangle, |1\rangle$ ). Kubit  $|c\rangle$  jest **kubitem sterującym** (*control qubit*), a kubit  $|t\rangle$  jest **kubitem sterowanym** (*target qubit*). W wyniku operacji sterowanej otrzymujemy

$$|\psi_{output}\rangle = |c\rangle|t'\rangle, \quad (39)$$

co oznacza, że kubit sterujący nie ulega zmianie, a zmienia się wyłącznie kubit sterowany.

Omówimy nieco dokładniej własności bramki sterowanej.  
Kubit wejściowy można zapisać w postaci

$$|\psi_{input}\rangle = |c\rangle|t\rangle, \quad (38)$$

gdzie  $|c\rangle$  i  $|t\rangle$  są stanami jednokubitowej bazy obliczeniowej ( $|c\rangle, |t\rangle = |0\rangle, |1\rangle$ ). Kubit  $|c\rangle$  jest **kubitem sterującym** (*control qubit*), a kubit  $|t\rangle$  jest **kubitem sterowanym** (*target qubit*). W wyniku operacji sterowanej otrzymujemy

$$|\psi_{output}\rangle = |c\rangle|t'\rangle, \quad (39)$$

co oznacza, że kubit sterujący nie ulega zmianie, a zmienia się wyłącznie kubit sterowany.

Inaczej operację kontrolowaną (37) można zapisać w postaci

$$|c\rangle|t'\rangle = U_{CG}|c\rangle|t\rangle. \quad (40)$$

## Bramka sterowanej (kontrolowanej) negacji

## Bramka sterowanej (kontrolowanej) negacji

Szczególnie ważną bramką sterowaną jest **bramka sterowanej (kontrolowanej) negacji**  $U_{CNOT}$ , zdefiniowana za pomocą wzoru

## Bramka sterowanej (kontrolowanej) negacji

Szczególnie ważną bramką sterowaną jest **bramka sterowanej (kontrolowanej) negacji**  $U_{CNOT}$ , zdefiniowana za pomocą wzoru

$$|c\rangle|t \oplus c\rangle = U_{CNOT}|c\rangle|t\rangle, \quad (41)$$

gdzie symbol  $\oplus$  oznacza operację dodawania modulo 2.

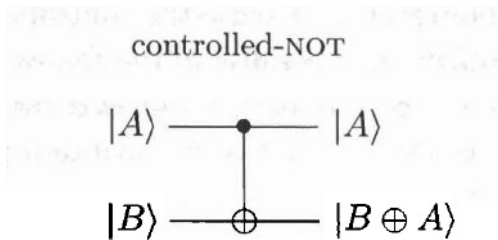
## Bramka sterowanej (kontrolowanej) negacji

Szczególnie ważną bramką sterowaną jest **bramka sterowanej (kontrolowanej) negacji**  $U_{CNOT}$ , zdefiniowana za pomocą wzoru

$$|c\rangle|t \oplus c\rangle = U_{CNOT}|c\rangle|t\rangle, \quad (41)$$

gdzie symbol  $\oplus$  oznacza operację dodawania modulo 2.

Definicja (41) oznacza, że w wyniku działania bramki sterowanej negacji wykonywana jest operacja negacji na drugim kubicie (kubicie sterowanym) wtedy i tylko wtedy, gdy pierwszy kubit (kubit sterujący) jest w stanie  $|1\rangle$ .



Rysunek: 5.1. Obwód kwantowy do implementacji bramki CNOT.

Rozpisujemy operację sterowanej negacji dla stanów bazy dwukubitowej.

Rozpisujemy operację sterowanej negacji dla stanów bazy dwukubitowej.

$$U_{CNOT}|00\rangle = |00\rangle , \quad (42)$$

Rozpisujemy operację sterowanej negacji dla stanów bazy dwukubitowej.

$$U_{CNOT}|00\rangle = |00\rangle , \quad (42)$$

$$U_{CNOT}|01\rangle = |01\rangle , \quad (43)$$

Rozpisujemy operację sterowanej negacji dla stanów bazy dwukubitowej.

$$U_{CNOT}|00\rangle = |00\rangle , \quad (42)$$

$$U_{CNOT}|01\rangle = |01\rangle , \quad (43)$$

$$U_{CNOT}|10\rangle = |11\rangle , \quad (44)$$

Rozpisujemy operację sterowanej negacji dla stanów bazy dwukubitowej.

$$U_{CNOT}|00\rangle = |00\rangle , \quad (42)$$

$$U_{CNOT}|01\rangle = |01\rangle , \quad (43)$$

$$U_{CNOT}|10\rangle = |11\rangle , \quad (44)$$

$$U_{CNOT}|11\rangle = |10\rangle . \quad (45)$$

Reprezentacja macierzowa operacji kontrolowanej negacji jest następująca:

Reprezentacja macierzowa operacji kontrolowanej negacji jest następująca:

$$U_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Dowolna bramka sterowana (37) w reprezentacji macierzowej jest macierzą  $4 \times 4$ .

Dowolna bramka sterowana (37) w reprezentacji macierzowej jest macierzą  $4 \times 4$ . Wygodnie jest ją zapisać w następującej skróconej postaci

Dowolna bramka sterowana (37) w reprezentacji macierzowej jest macierzą  $4 \times 4$ . Wygodnie jest ją zapisać w następującej skróconej postaci

$$U_{CG} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad (47)$$

Dowolna bramka sterowana (37) w reprezentacji macierzowej jest macierzą  $4 \times 4$ . Wygodnie jest ją zapisać w następującej skróconej postaci

$$U_{CG} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad (47)$$

gdzie  $\hat{1}$  jest macierzą jednostkową  $2 \times 2$ , a  $G$  jest bramką jednokubitową, reprezentowaną za pomocą macierzy  $2 \times 2$ .

# Przykład implementacji bramki CNOT

Rozważmy układ złożony z dwóch kropek kwantowych,  
utworzonych z różnych materiałów półprzewodnikowych.

Rozważmy układ złożony z dwóch kropek kwantowych, utworzonych z różnych materiałów półprzewodnikowych. Zakładamy, że układ zawiera ponadto dwa elektrony, zlokalizowane w różnych kropkach kwantowych,

Rozważmy układ złożony z dwóch kropek kwantowych, utworzonych z różnych materiałów półprzewodnikowych. Zakładamy, że układ zawiera ponadto dwa elektrony, zlokalizowane w różnych kropkach kwantowych, a kropki oddzielone są przenikliwą barierą potencjału, która umożliwia słabe sprzężenie pomiędzy elektronami.

Rozważmy układ złożony z dwóch kropek kwantowych, utworzonych z różnych materiałów półprzewodnikowych. Zakładamy, że układ zawiera ponadto dwa elektrony, zlokalizowane w różnych kropkach kwantowych, a kropki oddzielone są przenikliwą barierą potencjału, która umożliwia słabe sprzężenie pomiędzy elektronami. Cały układ (kropki kwantowe + elektrony) poddany jest działaniu zewnętrznego pola magnetycznego  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ .

Rozważmy układ złożony z dwóch kropek kwantowych, utworzonych z różnych materiałów półprzewodnikowych. Zakładamy, że układ zawiera ponadto dwa elektrony, zlokalizowane w różnych kropkach kwantowych, a kropki oddzielone są przenikliwą barierą potencjału, która umożliwia słabe sprzężenie pomiędzy elektronami. Cały układ (kropki kwantowe + elektrony) poddany jest działaniu zewnętrznego pola magnetycznego  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . W naszych rozważaniach uwzględniamy wyłącznie spinowe stopnie swobody elektronów.

Elektron w kropce kwantowej  $j$  ( $j = 1, 2$ ) posiada spinowy magnetyczny moment dipolowy  $\boldsymbol{\mu}_j$  o składowej  $z$ -owej

Elektron w kropce kwantowej  $j$  ( $j = 1, 2$ ) posiada spinowy magnetyczny moment dipolowy  $\boldsymbol{\mu}_j$  o składowej  $z$ -owej

$$\mu_{zj} = -\frac{1}{2}g_j^* \mu_B \sigma_{zj} , \quad (48)$$

Elektron w kropce kwantowej  $j$  ( $j = 1, 2$ ) posiada spinowy magnetyczny moment dipolowy  $\mu_j$  o składowej  $z$ -owej

$$\mu_{zj} = -\frac{1}{2}g_j^*\mu_B\sigma_{zj} , \quad (48)$$

gdzie  $g_j^*$  jest efektywnym czynnikiem Lande'go materiału  $j$ ,  $\mu_B$  jest magnetonem Bohra ( $\mu_B = 0.927 \times 10^{-23}$  Am<sup>2</sup>), a  $\sigma_{zj}$  jest  $z$ -ową macierzą Pauli'ego  $j$ -tego elektronu.

Elektron w kropce kwantowej  $j$  ( $j = 1, 2$ ) posiada spinowy magnetyczny moment dipolowy  $\boldsymbol{\mu}_j$  o składowej  $z$ -owej

$$\mu_{zj} = -\frac{1}{2}g_j^*\mu_B\sigma_{zj}, \quad (48)$$

gdzie  $g_j^*$  jest efektywnym czynnikiem Lande'go materiału  $j$ ,  $\mu_B$  jest magnetonem Bohra ( $\mu_B = 0.927 \times 10^{-23} \text{ Am}^2$ ), a  $\sigma_{zj}$  jest  $z$ -ową macierzą Pauli'ego  $j$ -tego elektronu.

Uwaga: w naszym modelu zachodzi jednoznaczne przyporządkowanie elektronu kropce kwantowej. Stąd kropki i elektrony numerowane są tym samym wskaźnikiem  $j = 1, 2$ .

Efektywny czynnik Lande'go elektronu przyjmuje następujące wartości:  $g^* = 1.998$  dla kryształu Si,  $g^* = 1.563$  dla kryształu Ge,  $g^* = -0.44$  dla kryształu GaAs,  $g^* = -14.9$  dla kryształu InAs, natomiast dla elektronu swobodnego w próżni  $g^* = 2.0$ .

Efektywny czynnik Lande'go elektronu przyjmuje następujące wartości:  $g^* = 1.998$  dla kryształu Si,  $g^* = 1.563$  dla kryształu Ge,  $g^* = -0.44$  dla kryształu GaAs,  $g^* = -14.9$  dla kryształu InAs, natomiast dla elektronu swobodnego w próżni  $g^* = 2.0$ .

Hamiltonian oddziaływania dipola magnetycznego  $\mu_{zj}$  z polem **B** ma postać

Efektywny czynnik Lande'go elektronu przyjmuje następujące wartości:  $g^* = 1.998$  dla kryształu Si,  $g^* = 1.563$  dla kryształu Ge,  $g^* = -0.44$  dla kryształu GaAs,  $g^* = -14.9$  dla kryształu InAs, natomiast dla elektronu swobodnego w próżni  $g^* = 2.0$ .

Hamiltonian oddziaływania dipola magnetycznego  $\mu_{zj}$  z polem  $\mathbf{B}$  ma postać

$$H_j^0 = -\mu_{zj}B = \frac{1}{2}g_j^*\mu_B\sigma_{zj}B, \quad (49)$$

Efektywny czynnik Lande'go elektronu przyjmuje następujące wartości:  $g^* = 1.998$  dla kryształu Si,  $g^* = 1.563$  dla kryształu Ge,  $g^* = -0.44$  dla kryształu GaAs,  $g^* = -14.9$  dla kryształu InAs, natomiast dla elektronu swobodnego w próżni  $g^* = 2.0$ .

Hamiltonian oddziaływania dipola magnetycznego  $\mu_{zj}$  z polem  $\mathbf{B}$  ma postać

$$H_j^0 = -\mu_{zj}B = \frac{1}{2}g_j^*\mu_B\sigma_{zj}B, \quad (49)$$

gdzie  $\sigma_{zj}$  jest operatorem  $z$ -owej składowej spinu  $j$ -tego elektronu.

Oddziaływanie (49) spinowego dipola magnetycznego z polem magnetycznym jest źródłem **spinowego efektu Zeemana**, który polega na rozszczepieniu każdego orbitalnego poziomu energetycznego na dwa podpoziomy o energiach

Oddziaływanie (49) spinowego dipola magnetycznego z polem magnetycznym jest źródłem **spinowego efektu Zeemana**, który polega na rozszczepieniu każdego orbitalnego poziomu energetycznego na dwa podpoziomy o energiach

$$E_{j\pm} = \pm \frac{1}{2} g_j^* \mu_B B , \quad (50)$$

Oddziaływanie (49) spinowego dipola magnetycznego z polem magnetycznym jest źródłem **spinowego efektu Zeemana**, który polega na rozszczepieniu każdego orbitalnego poziomu energetycznego na dwa podpoziomy o energiach

$$E_{j\pm} = \pm \frac{1}{2} g_j^* \mu_B B , \quad (50)$$

gdzie znak  $+$  odpowiada stanowi o  $z$ -owej składowej spinu  $+\hbar/2$ , a znak  $-$  odpowiada stanowi o  $z$ -owej składowej spinu  $-\hbar/2$ .

Oddziaływanie (49) spinowego dipola magnetycznego z polem magnetycznym jest źródłem **spinowego efektu Zeemana**, który polega na rozszczepieniu każdego orbitalnego poziomu energetycznego na dwa podpoziomy o energiach

$$E_{j\pm} = \pm \frac{1}{2} g_j^* \mu_B B , \quad (50)$$

gdzie znak  $+$  odpowiada stanowi o  $z$ -owej składowej spinu  $+\hbar/2$ , a znak  $-$  odpowiada stanowi o  $z$ -owej składowej spinu  $-\hbar/2$ .

Np. dla Si w polu magnetycznym  $B = 10$  T spinowe rozszczepienie Zeemana wynosi  $\Delta E_Z = E_{j+} - E_{j-} \simeq 0.6$  meV, co odpowiada emisji/absorpcji fotonu o długości fali  $\lambda \simeq 2$  mm.

Pełny spinowy hamiltonian układu ma postać

Pełny spinowy hamiltonian układu ma postać

$$H = H_1^0 + H_2^0 + H_{int} , \quad (51)$$

Pełny spinowy hamiltonian układu ma postać

$$H = H_1^0 + H_2^0 + H_{int} , \quad (51)$$

gdzie  $H_j^0$  jest jednoelektronowym hamiltonianem (49)  $j$ -tego elektronu uwięzionego w jednej z kropek kwantowych, a  $H_{int}$  jest hamiltonianem oddziaływania

Pełny spinowy hamiltonian układu ma postać

$$H = H_1^0 + H_2^0 + H_{int} , \quad (51)$$

gdzie  $H_j^0$  jest jednoelektronowym hamiltonianem (49)  $j$ -tego elektronu uwięzionego w jednej z kropek kwantowych, a  $H_{int}$  jest hamiltonianem oddziaływania

$$H_{int} = \hbar\Omega\sigma_{z1}\sigma_{z2} , \quad (52)$$

Pełny spinowy hamiltonian układu ma postać

$$H = H_1^0 + H_2^0 + H_{int} , \quad (51)$$

gdzie  $H_j^0$  jest jednoelektronowym hamiltonianem (49)  $j$ -tego elektronu uwięzionego w jednej z kropek kwantowych, a  $H_{int}$  jest hamiltonianem oddziaływania

$$H_{int} = \hbar\Omega\sigma_{z1}\sigma_{z2} , \quad (52)$$

gdzie parametr  $\Omega$  charakteryzuje sprzężenie pomiędzy spinami elektronów uwięzionych w różnych kropkach kwantowych.

Pełny spinowy hamiltonian układu ma postać

$$H = H_1^0 + H_2^0 + H_{int} , \quad (51)$$

gdzie  $H_j^0$  jest jednoelektronowym hamiltonianem (49)  $j$ -tego elektronu uwięzionego w jednej z kropek kwantowych, a  $H_{int}$  jest hamiltonianem oddziaływania

$$H_{int} = \hbar\Omega\sigma_{z1}\sigma_{z2} , \quad (52)$$

gdzie parametr  $\Omega$  charakteryzuje sprzężenie pomiędzy spinami elektronów uwięzionych w różnych kropkach kwantowych. Parametr ten jest związany z energią wymiany  $J$  za pomocą relacji

Pełny spinowy hamiltonian układu ma postać

$$H = H_1^0 + H_2^0 + H_{int} , \quad (51)$$

gdzie  $H_j^0$  jest jednoelektronowym hamiltonianem (49)  $j$ -tego elektronu uwięzionego w jednej z kropek kwantowych, a  $H_{int}$  jest hamiltonianem oddziaływania

$$H_{int} = \hbar\Omega\sigma_{z1}\sigma_{z2} , \quad (52)$$

gdzie parametr  $\Omega$  charakteryzuje sprzężenie pomiędzy spinami elektronów uwięzionych w różnych kropkach kwantowych.

Parametr ten jest związany z energią wymiany  $J$  za pomocą relacji

$$J = \hbar\Omega . \quad (53)$$

Hamiltonian jednoelektronowy (49) może być zapisany w postaci

Hamiltonian jednoelektronowy (49) może być zapisany w postaci

$$H_j^0 = \hbar\omega_j\sigma_{zj} , \quad (54)$$

Hamiltonian jednoelektronowy (49) może być zapisany w postaci

$$H_j^0 = \hbar\omega_j\sigma_{zj} , \quad (54)$$

gdzie  $\omega_j = g_j^*\mu_B B/\hbar$ .

Hamiltonian jednoelektronowy (49) może być zapisany w postaci

$$H_j^0 = \hbar\omega_j\sigma_{zj} , \quad (54)$$

gdzie  $\omega_j = g_j^*\mu_B B/\hbar$ . Należy zauważyć, że dla kropek kwantowych utworzonych z różnych materiałów zachodzi nierówność  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

Hamiltonian jednoelektronowy (49) może być zapisany w postaci

$$H_j^0 = \hbar\omega_j\sigma_{zj} , \quad (54)$$

gdzie  $\omega_j = g_j^*\mu_B B/\hbar$ . Należy zauważyć, że dla kropek kwantowych utworzonych z różnych materiałów zachodzi nierówność  $\omega_1 \neq \omega_2$ . W dalszym ciągu zakładamy, że  $\omega_1 > \omega_2$ .

Hamiltonian jednoelektronowy (49) może być zapisany w postaci

$$H_j^0 = \hbar\omega_j\sigma_{zj} , \quad (54)$$

gdzie  $\omega_j = g_j^*\mu_B B/\hbar$ . Należy zauważyć, że dla kropek kwantowych utworzonych z różnych materiałów zachodzi nierówność  $\omega_1 \neq \omega_2$ . W dalszym ciągu zakładamy, że  $\omega_1 > \omega_2$ . Operatory spinowe  $\sigma_{zj}$  spełniają równania własne

Hamiltonian jednoelektronowy (49) może być zapisany w postaci

$$H_j^0 = \hbar\omega_j\sigma_{zj} , \quad (54)$$

gdzie  $\omega_j = g_j^*\mu_B B/\hbar$ . Należy zauważyć, że dla kropek kwantowych utworzonych z różnych materiałów zachodzi nierówność  $\omega_1 \neq \omega_2$ . W dalszym ciągu zakładamy, że  $\omega_1 > \omega_2$ . Operatory spinowe  $\sigma_{zj}$  spełniają równania własne

$$\sigma_{z1}|0\rangle_1|l\rangle_2 = +\frac{\hbar}{2}|0\rangle_1|l\rangle_2 , \quad \sigma_{z1}|1\rangle_1|l\rangle_2 = -\frac{\hbar}{2}|1\rangle_1|l\rangle_2 , \quad (55)$$

Hamiltonian jednoelektronowy (49) może być zapisany w postaci

$$H_j^0 = \hbar\omega_j\sigma_{zj} , \quad (54)$$

gdzie  $\omega_j = g_j^*\mu_B B/\hbar$ . Należy zauważyć, że dla kropek kwantowych utworzonych z różnych materiałów zachodzi nierówność  $\omega_1 \neq \omega_2$ . W dalszym ciągu zakładamy, że  $\omega_1 > \omega_2$ . Operatory spinowe  $\sigma_{zj}$  spełniają równania własne

$$\sigma_{z1}|0\rangle_1|l\rangle_2 = +\frac{\hbar}{2}|0\rangle_1|l\rangle_2 , \quad \sigma_{z1}|1\rangle_1|l\rangle_2 = -\frac{\hbar}{2}|1\rangle_1|l\rangle_2 , \quad (55)$$

gdzie  $|l\rangle_j$  jest stanem własnym operatora  $z$ -owej składowej spinu  $j$ -tego elektronu ( $l = 0, 1$ ).

Hamiltonian jednoelektronowy (49) może być zapisany w postaci

$$H_j^0 = \hbar\omega_j\sigma_{zj} , \quad (54)$$

gdzie  $\omega_j = g_j^*\mu_B B/\hbar$ . Należy zauważyć, że dla kropek kwantowych utworzonych z różnych materiałów zachodzi nierówność  $\omega_1 \neq \omega_2$ . W dalszym ciągu zakładamy, że  $\omega_1 > \omega_2$ . Operatory spinowe  $\sigma_{zj}$  spełniają równania własne

$$\sigma_{z1}|0\rangle_1|l\rangle_2 = +\frac{\hbar}{2}|0\rangle_1|l\rangle_2 , \quad \sigma_{z1}|1\rangle_1|l\rangle_2 = -\frac{\hbar}{2}|1\rangle_1|l\rangle_2 , \quad (55)$$

gdzie  $|l\rangle_j$  jest stanem własnym operatora  $z$ -owej składowej spinu  $j$ -tego elektronu ( $l = 0, 1$ ). Podobne dwa równania są słuszne dla operatora  $\sigma_{z2}$ .

Stany własne  $\{|k\rangle_1|l\rangle_2\}$  dla  $k, l = 0, 1$  tworzą dwukubitową bazę obliczeniową

Stany własne  $\{|k\rangle_1|l\rangle_2\}$  dla  $k, l = 0, 1$  tworzą dwukubitową bazę obliczeniową

$$\{|0\rangle_1|0\rangle_2, |0\rangle_1|1\rangle_2, |1\rangle_1|0\rangle_2, |1\rangle_1|1\rangle_2\} . \quad (56)$$

Stany własne  $\{|k\rangle_1|l\rangle_2\}$  dla  $k, l = 0, 1$  tworzą dwukubitową bazę obliczeniową

$$\{|0\rangle_1|0\rangle_2, |0\rangle_1|1\rangle_2, |1\rangle_1|0\rangle_2, |1\rangle_1|1\rangle_2\} . \quad (56)$$

We wzorze (56) symbol  $|k\rangle_1|l\rangle_2$  oznacza, że elektron o wskaźniku  $j = 1$  znajduje się w stanie spinowym  $|k\rangle$  ( $k = 0, 1$ ) w kropce o numerze  $j = 1$ , a elektron o wskaźniku  $j = 2$  znajduje się w stanie spinowym  $|l\rangle$  ( $l = 0, 1$ ) w kropce o numerze  $j = 2$ .

Stany własne  $\{|k\rangle_1|l\rangle_2\}$  dla  $k, l = 0, 1$  tworzą dwukubitową bazę obliczeniową

$$\{|0\rangle_1|0\rangle_2, |0\rangle_1|1\rangle_2, |1\rangle_1|0\rangle_2, |1\rangle_1|1\rangle_2\} . \quad (56)$$

We wzorze (56) symbol  $|k\rangle_1|l\rangle_2$  oznacza, że elektron o wskaźniku  $j = 1$  znajduje się w stanie spinowym  $|k\rangle$  ( $k = 0, 1$ ) w kropce o numerze  $j = 1$ , a elektron o wskaźniku  $j = 2$  znajduje się w stanie spinowym  $|l\rangle$  ( $l = 0, 1$ ) w kropce o numerze  $j = 2$ .

Stany bazy obliczeniowej (56) można zapisać w skróconej postaci jako

Stany własne  $\{|k\rangle_1|l\rangle_2\}$  dla  $k, l = 0, 1$  tworzą dwukubitową bazę obliczeniową

$$\{|0\rangle_1|0\rangle_2, |0\rangle_1|1\rangle_2, |1\rangle_1|0\rangle_2, |1\rangle_1|1\rangle_2\} . \quad (56)$$

We wzorze (56) symbol  $|k\rangle_1|l\rangle_2$  oznacza, że elektron o wskaźniku  $j = 1$  znajduje się w stanie spinowym  $|k\rangle$  ( $k = 0, 1$ ) w kropce o numerze  $j = 1$ , a elektron o wskaźniku  $j = 2$  znajduje się w stanie spinowym  $|l\rangle$  ( $l = 0, 1$ ) w kropce o numerze  $j = 2$ .

Stany bazy obliczeniowej (56) można zapisać w skróconej postaci jako

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle .$$

Rozpatrzmy najpierw przypadek braku sprzężenia pomiędzy kropkami kwantowymi, czyli  $\Omega = 0$ .

Rozpatrzmy najpierw przypadek braku sprzężenia pomiędzy kropkami kwantowymi, czyli  $\Omega = 0$ . Sprzężenie to możemy wyłączyć przez zastosowanie nieprzenikliwej bariery potencjału pomiędzy kropkami, np. odpowiednio grubej bariery. Dla  $\Omega = 0$  hamiltonian (51) przyjmuje postać

Rozpatrzmy najpierw przypadek braku sprzężenia pomiędzy kropkami kwantowymi, czyli  $\Omega = 0$ . Sprzężenie to możemy wyłączyć przez zastosowanie nieprzenikliwej bariery potencjału pomiędzy kropkami, np. odpowiednio grubej bariery. Dla  $\Omega = 0$  hamiltonian (51) przyjmuje postać

$$H = H_1^0 + H_2^0 . \quad (57)$$

Korzystając z równań własnych (55) wyznaczamy wartości własne hamiltonianu (57) i otrzymujemy

Korzystając z równań własnych (55) wyznaczamy wartości własne hamiltonianu (57) i otrzymujemy

$$\varepsilon_1 = -\frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad (58)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|1\rangle_2$ ,

Korzystając z równań własnych (55) wyznaczamy wartości własne hamiltonianu (57) i otrzymujemy

$$\varepsilon_1 = -\frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad (58)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|1\rangle_2$ ,

$$\varepsilon_2 = -\frac{\hbar}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad (59)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|0\rangle_2$ ,

Korzystając z równań własnych (55) wyznaczamy wartości własne hamiltonianu (57) i otrzymujemy

$$\varepsilon_1 = -\frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad (58)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|1\rangle_2$ ,

$$\varepsilon_2 = -\frac{\hbar}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad (59)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|0\rangle_2$ ,

$$\varepsilon_3 = \frac{\hbar}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad (60)$$

dla stanu  $|0\rangle_1|1\rangle_2$ ,

Korzystając z równań własnych (55) wyznaczamy wartości własne hamiltonianu (57) i otrzymujemy

$$\varepsilon_1 = -\frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad (58)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|1\rangle_2$ ,

$$\varepsilon_2 = -\frac{\hbar}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad (59)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|0\rangle_2$ ,

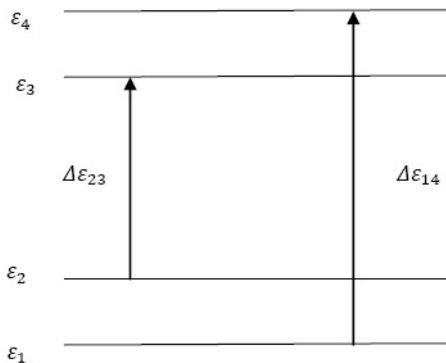
$$\varepsilon_3 = \frac{\hbar}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad (60)$$

dla stanu  $|0\rangle_1|1\rangle_2$ , oraz

$$\varepsilon_4 = \frac{\hbar}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad (61)$$

dla stanu  $|0\rangle_1|0\rangle_2$ .

Rysunek: 5.2. Poziomy energetyczne dla braku sprzężenia pomiędzy kropkami.



Każdy ze stanów spinowych  $|k\rangle_1$  lub  $|l\rangle_2$  może być selektywnie adresowany\* za pomocą fotonów o odpowiedniej częstotliwości  $\omega$

Każdy ze stanów spinowych  $|k\rangle_1$  lub  $|l\rangle_2$  może być selektywnie adresowany\* za pomocą fotonów o odpowiedniej częstotliwości  $\omega$

$$\hbar\omega = \varepsilon_n - \varepsilon_m , \quad (62)$$

Każdy ze stanów spinowych  $|k\rangle_1$  lub  $|l\rangle_2$  może być selektywnie adresowany\* za pomocą fotonów o odpowiedniej częstotliwości  $\omega$

$$\hbar\omega = \varepsilon_n - \varepsilon_m , \quad (62)$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie odpowiada różnicy energii poziomów (58, 59, 60, 61).

Każdy ze stanów spinowych  $|k\rangle_1$  lub  $|l\rangle_2$  może być selektywnie adresowany\* za pomocą fotonów o odpowiedniej częstotliwości  $\omega$

$$\hbar\omega = \varepsilon_n - \varepsilon_m , \quad (62)$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie odpowiada różnicy energii poziomów (58, 59, 60, 61). Foton o częstotliwości  $\omega$  może ulegać absorpcji lub może stymulować emisję fotonu o tej samej częstotliwości.

Każdy ze stanów spinowych  $|k\rangle_1$  lub  $|l\rangle_2$  może być selektywnie adresowany\* za pomocą fotonów o odpowiedniej częstotliwości  $\omega$

$$\hbar\omega = \varepsilon_n - \varepsilon_m , \quad (62)$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie odpowiada różnicy energii poziomów (58, 59, 60, 61). Foton o częstotliwości  $\omega$  może ulegać absorpcji lub może stymulować emisję fotonu o tej samej częstotliwości.

Przykładowo, absorpcja fotonu o częstotliwości  $\omega = \omega_1$  powoduje zmianę stanu początkowego układu  $|1\rangle_1|l\rangle_2$  na stan końcowy  $|0\rangle_1|l\rangle_2$ .

Każdy ze stanów spinowych  $|k\rangle_1$  lub  $|l\rangle_2$  może być selektywnie adresowany\* za pomocą fotonów o odpowiedniej częstotliwości  $\omega$

$$\hbar\omega = \varepsilon_n - \varepsilon_m , \quad (62)$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie odpowiada różnicy energii poziomów (58, 59, 60, 61). Foton o częstotliwości  $\omega$  może ulegać absorpcji lub może stymulować emisję fotonu o tej samej częstotliwości.

Przykładowo, absorpcja fotonu o częstotliwości  $\omega = \omega_1$  powoduje zmianę stanu początkowego układu  $|1\rangle_1|l\rangle_2$  na stan końcowy  $|0\rangle_1|l\rangle_2$ . Oznacza to, że foton o częstotliwości  $\omega_1$  działa wyłącznie na pierwszy kubit powodując odwrócenie spinu  $|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$ .

Każdy ze stanów spinowych  $|k\rangle_1$  lub  $|l\rangle_2$  może być selektywnie adresowany\* za pomocą fotonów o odpowiedniej częstotliwości  $\omega$

$$\hbar\omega = \varepsilon_n - \varepsilon_m, \quad (62)$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie odpowiada różnicy energii poziomów (58, 59, 60, 61). Foton o częstotliwości  $\omega$  może ulegać absorpcji lub może stymulować emisję fotonu o tej samej częstotliwości.

Przykładowo, absorpcja fotonu o częstotliwości  $\omega = \omega_1$  powoduje zmianę stanu początkowego układu  $|1\rangle_1|l\rangle_2$  na stan końcowy  $|0\rangle_1|l\rangle_2$ . Oznacza to, że foton o częstotliwości  $\omega_1$  działa wyłącznie na pierwszy kubit powodując odwrócenie spinu  $|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$ .

Możliwy jest również proces odwrotny  $|0\rangle_1|l\rangle_2 \rightarrow |1\rangle_1|l\rangle_2$ , który zachodzi w wyniku emisji stymulowanej obecnością fotonu o częstotliwości  $\omega_1$ .

Każdy ze stanów spinowych  $|k\rangle_1$  lub  $|l\rangle_2$  może być selektywnie adresowany\* za pomocą fotonów o odpowiedniej częstotliwości  $\omega$

$$\hbar\omega = \varepsilon_n - \varepsilon_m, \quad (62)$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie odpowiada różnicy energii poziomów (58, 59, 60, 61). Foton o częstotliwości  $\omega$  może ulegać absorpcji lub może stymulować emisję fotonu o tej samej częstotliwości.

Przykładowo, absorpcja fotonu o częstotliwości  $\omega = \omega_1$  powoduje zmianę stanu początkowego układu  $|1\rangle_1|l\rangle_2$  na stan końcowy  $|0\rangle_1|l\rangle_2$ . Oznacza to, że foton o częstotliwości  $\omega_1$  działa wyłącznie na pierwszy kubit powodując odwrócenie spinu  $|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$ .

Możliwy jest również proces odwrotny  $|0\rangle_1|l\rangle_2 \rightarrow |1\rangle_1|l\rangle_2$ , który zachodzi w wyniku emisji stymulowanej obecnością fotonu o częstotliwości  $\omega_1$ . Powyższe przejścia zachodzą dla dowolnego stanu drugiego kubit, czyli dla  $l = 0, 1$ .

Każdy ze stanów spinowych  $|k\rangle_1$  lub  $|l\rangle_2$  może być selektywnie adresowany\* za pomocą fotonów o odpowiedniej częstotliwości  $\omega$

$$\hbar\omega = \varepsilon_n - \varepsilon_m, \quad (62)$$

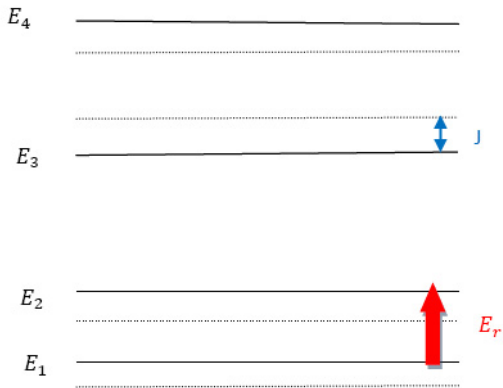
gdzie wyrażenie po prawej stronie odpowiada różnicy energii poziomów (58, 59, 60, 61). Foton o częstotliwości  $\omega$  może ulegać absorpcji lub może stymulować emisję fotonu o tej samej częstotliwości.

Przykładowo, absorpcja fotonu o częstotliwości  $\omega = \omega_1$  powoduje zmianę stanu początkowego układu  $|1\rangle_1|l\rangle_2$  na stan końcowy  $|0\rangle_1|l\rangle_2$ . Oznacza to, że foton o częstotliwości  $\omega_1$  działa wyłącznie na pierwszy kubit powodując odwrócenie spinu  $|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$ .

Możliwy jest również proces odwrotny  $|0\rangle_1|l\rangle_2 \rightarrow |1\rangle_1|l\rangle_2$ , który zachodzi w wyniku emisji stymulowanej obecnością fotonu o częstotliwości  $\omega_1$ . Powyższe przejścia zachodzą dla dowolnego stanu drugiego kubit, czyli dla  $l = 0, 1$ .

Podobnie, foton o częstotliwości  $\omega = \omega_2$  zmienia wyłącznie stan drugiego kubit.

Rysunek: 5.3. Poziomy energetyczne dla sprzężonych kropek.



\***Uwaga:** Selektowne adresowanie dotyczy wyłącznie stanów jednokubitowych  $|k\rangle_j$ , gdzie  $k = 0, 1$ .

Rozważmy teraz przypadek włączonego sprzężenia, czyli  $\Omega > 0$ .

Rozważmy teraz przypadek włączonego sprzężenia, czyli  $\Omega > 0$ . Włączenie sprzężenia pomiędzy kropkami kwantowymi może nastąpić poprzez zastosowanie odpowiednio przenikliwej bariery potencjału, np. wskutek przyłożenia odpowiedniego napięcia do elektrody umieszczonej w pobliżu obszaru bariery.

Rozważymy teraz przypadek włączonego sprzężenia, czyli  $\Omega > 0$ . Włączenie sprzężenia pomiędzy kropkami kwantowymi może nastąpić poprzez zastosowanie odpowiednio przenikliwej bariery potencjału, np. wskutek przyłożenia odpowiedniego napięcia do elektrody umieszczonej w pobliżu obszaru bariery. Można pokazać, że stany dwukubitowej bazy obliczeniowej (56) są również stanami własnymi pełnego hamiltonianu (51).

Rozważymy teraz przypadek włączonego sprzężenia, czyli  $\Omega > 0$ . Włączenie sprzężenia pomiędzy kropkami kwantowymi może nastąpić poprzez zastosowanie odpowiednio przenikliwej bariery potencjału, np. wskutek przyłożenia odpowiedniego napięcia do elektrody umieszczonej w pobliżu obszaru bariery. Można pokazać, że stany dwukubitowej bazy obliczeniowej (56) są również stanami własnymi pełnego hamiltonianu (51). Własność ta pozwala na łatwe wyznaczenie wartości własnych hamiltonianu (51).

Wartościami własnymi hamiltonianu (51) są

Wartościami własnymi hamiltonianu (51) są

$$E_1 = \varepsilon_1 + \hbar\Omega \quad (63)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|1\rangle_2$ ,

Wartościami własnymi hamiltonianu (51) są

$$E_1 = \varepsilon_1 + \hbar\Omega \quad (63)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|1\rangle_2$ ,

$$E_2 = \varepsilon_2 - \hbar\Omega \quad (64)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|0\rangle_2$ ,

Wartościami własnymi hamiltonianu (51) są

$$E_1 = \varepsilon_1 + \hbar\Omega \quad (63)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|1\rangle_2$ ,

$$E_2 = \varepsilon_2 - \hbar\Omega \quad (64)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|0\rangle_2$ ,

$$E_3 = \varepsilon_3 - \hbar\Omega \quad (65)$$

dla stanu  $|0\rangle_1|1\rangle_2$ ,

Wartościami własnymi hamiltonianu (51) są

$$E_1 = \varepsilon_1 + \hbar\Omega \quad (63)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|1\rangle_2$ ,

$$E_2 = \varepsilon_2 - \hbar\Omega \quad (64)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|0\rangle_2$ ,

$$E_3 = \varepsilon_3 - \hbar\Omega \quad (65)$$

dla stanu  $|0\rangle_1|1\rangle_2$ ,

$$E_4 = \varepsilon_4 + \hbar\Omega \quad (66)$$

dla stanu  $|0\rangle_1|0\rangle_2$ .

Wartościami własnymi hamiltonianu (51) są

$$E_1 = \varepsilon_1 + \hbar\Omega \quad (63)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|1\rangle_2$ ,

$$E_2 = \varepsilon_2 - \hbar\Omega \quad (64)$$

dla stanu  $|1\rangle_1|0\rangle_2$ ,

$$E_3 = \varepsilon_3 - \hbar\Omega \quad (65)$$

dla stanu  $|0\rangle_1|1\rangle_2$ ,

$$E_4 = \varepsilon_4 + \hbar\Omega \quad (66)$$

dla stanu  $|0\rangle_1|0\rangle_2$ . Oznacza to, że włączenie sprzężenia pomiędzy kropkami kwantowymi prowadzi do zmiany poziomów energetycznych (58, 59, 60, 61) o wartości  $\pm\hbar\Omega$ , natomiast stany własne (56) pozostają niezmienione.

Włączenie sprzężenia pomiędzy kropkami umożliwia realizację selektywnych przejść pomiędzy stanami bazy dwukubitowej (56).

Włączenie sprzężenia pomiędzy kropkami umożliwia realizację selektywnych przejść pomiędzy stanami bazy dwukubitowej (56). Oznacza to możliwość selektywnego adresowania stanów dwukubitowych (56).

Włączenie sprzężenia pomiędzy kropkami umożliwia realizację selektywnych przejść pomiędzy stanami bazy dwukubitowej (56). Oznacza to możliwość selektywnego adresowania stanów dwukubitowych (56). Dobierając precyzyjnie częstość rezonansową  $\omega_r$  fotonu możemy włączać i wyłączać żądane stany bazy (56), przy czym realizowane są przejścia kwantowe prowadzące do zmiany jednego, np. pierwszego, kubitów w zależności od stanu kubitów drugiego.

Włączenie sprzężenia pomiędzy kropkami umożliwia realizację selektywnych przejść pomiędzy stanami bazy dwukubitowej (56). Oznacza to możliwość selektywnego adresowania stanów dwukubitowych (56). Dobierając precyzyjnie częstość rezonansową  $\omega_r$  fotonu możemy włączać i wyłączać żądane stany bazy (56), przy czym realizowane są przejścia kwantowe prowadzące do zmiany jednego, np. pierwszego, kubitów w zależności od stanu kubitów drugiego. Na przykład, foton o częstości

$$\omega_r = \omega_2 - 2\Omega \tag{67}$$

Włączenie sprzężenia pomiędzy kropkami umożliwia realizację selektywnych przejść pomiędzy stanami bazy dwukubitowej (56). Oznacza to możliwość selektywnego adresowania stanów dwukubitowych (56). Dobierając precyzyjnie częstość rezonansową  $\omega_r$  fotonu możemy włączać i wyłączać żądane stany bazy (56), przy czym realizowane są przejścia kwantowe prowadzące do zmiany jednego, np. pierwszego, kubitów w zależności od stanu kubitów drugiego. Na przykład, foton o częstości

$$\omega_r = \omega_2 - 2\Omega \tag{67}$$

indukuje przejścia wyłącznie pomiędzy stanami  $|1\rangle_1|0\rangle_2$  i  $|1\rangle_1|1\rangle_2$  pozostawiając stany  $|0\rangle_1|0\rangle_2$  i  $|0\rangle_1|1\rangle_2$  niezmiennie.

Włączenie sprzężenia pomiędzy kropkami umożliwia realizację selektywnych przejść pomiędzy stanami bazy dwukubitowej (56). Oznacza to możliwość selektywnego adresowania stanów dwukubitowych (56). Dobierając precyzyjnie częstość rezonansową  $\omega_r$  fotonu możemy włączać i wyłączać żądane stany bazy (56), przy czym realizowane są przejścia kwantowe prowadzące do zmiany jednego, np. pierwszego, kubitów w zależności od stanu kubitów drugiego. Na przykład, foton o częstości

$$\omega_r = \omega_2 - 2\Omega \quad (67)$$

indukuje przejścia wyłącznie pomiędzy stanami  $|1\rangle_1|0\rangle_2$  i  $|1\rangle_1|1\rangle_2$  pozostawiając stany  $|0\rangle_1|0\rangle_2$  i  $|0\rangle_1|1\rangle_2$  niezmiennione.  $\implies$  Procesy absorpcji i emisji stymulowane przez ten foton stanowią implementację **kwantowej bramki CNOT**.

Przedstawiona propozycja implementacji kwantowej bramki CNOT opiera się na prostym modelu oddziaływania pomiędzy spinami, opisanym za pomocą hamiltonianu (52).

Przedstawiona propozycja implementacji kwantowej bramki CNOT opiera się na prostym modelu oddziaływania pomiędzy spinami, opisanym za pomocą hamiltonianu (52). Jednakże opis ten można uogólnić bazując na fakcie, iż hamiltonian oddziaływania (52) jest szczególnym przypadkiem **hamiltonianu Heisenberga**, który jest uniwersalnym hamiltonianem opisującym oddziaływania pomiędzy spinami.

Przedstawiona propozycja implementacji kwantowej bramki CNOT opiera się na prostym modelu oddziaływania pomiędzy spinami, opisanym za pomocą hamiltonianu (52). Jednakże opis ten można uogólnić bazując na fakcie, iż hamiltonian oddziaływania (52) jest szczególnym przypadkiem **hamiltonianu Heisenberga**, który jest uniwersalnym hamiltonianem opisującym oddziaływania pomiędzy spinami. Hamiltonian Heisenberga ma postać

$$H_H = J \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 , \quad (68)$$

gdzie  $\boldsymbol{\sigma}_1$  i  $\boldsymbol{\sigma}_2$  są operatorami spinu cząstek 1 i 2, a  $J$  jest energią wymiany.

Przedstawiona propozycja implementacji kwantowej bramki CNOT opiera się na prostym modelu oddziaływania pomiędzy spinami, opisanym za pomocą hamiltonianu (52). Jednakże opis ten można uogólnić bazując na fakcie, iż hamiltonian oddziaływania (52) jest szczególnym przypadkiem **hamiltonianu Heisenberga**, który jest uniwersalnym hamiltonianem opisującym oddziaływania pomiędzy spinami. Hamiltonian Heisenberga ma postać

$$H_H = J \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 , \quad (68)$$

gdzie  $\boldsymbol{\sigma}_1$  i  $\boldsymbol{\sigma}_2$  są operatorami spinu cząstek 1 i 2, a  $J$  jest energią wymiany. Hamiltonian (68) jest używany do opisu oddziaływania pomiędzy dwoma jednakowymi cząstkami o operatorze spinu  $\boldsymbol{\sigma}_j$ . Mogą to być elektrony, protony, jony atomowe, itp.

Przedstawiona propozycja implementacji kwantowej bramki CNOT opiera się na prostym modelu oddziaływania pomiędzy spinami, opisanym za pomocą hamiltonianu (52). Jednakże opis ten można uogólnić bazując na fakcie, iż hamiltonian oddziaływania (52) jest szczególnym przypadkiem **hamiltonianu Heisenberga**, który jest uniwersalnym hamiltonianem opisującym oddziaływania pomiędzy spinami. Hamiltonian Heisenberga ma postać

$$H_H = J \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 , \quad (68)$$

gdzie  $\boldsymbol{\sigma}_1$  i  $\boldsymbol{\sigma}_2$  są operatorami spinu cząstek 1 i 2, a  $J$  jest energią wymiany. Hamiltonian (68) jest używany do opisu oddziaływania pomiędzy dwoma jednakowymi cząstkami o operatorze spinu  $\boldsymbol{\sigma}_j$ . Mogą to być elektrony, protony, jony atomowe, itp.

W szczególności przedstawiony powyżej model stanowi podstawę opisu **magnetycznego rezonansu jądrowego (NMR)**.

# Uniwersalny zbiór kwantowych bramek logicznych

W obliczeniach klasycznych znana jest własność, polegająca na tym, że można użyć zbioru niewielu bramek logicznych, np. AND, OR, NOT, do obliczenia dowolnej funkcji.

W obliczeniach klasycznych znana jest własność, polegająca na tym, że można użyć zbioru niewielu bramek logicznych, np. AND, OR, NOT, do obliczenia dowolnej funkcji. Mówimy, że bramki te **uniwersalny zbiór bramek logicznych** do obliczeń klasycznych.

W obliczeniach klasycznych znana jest własność, polegająca na tym, że można użyć zbioru niewielu bramek logicznych, np. AND, OR, NOT, do obliczenia dowolnej funkcji. Mówimy, że bramki te **uniwersalny zbiór bramek logicznych** do obliczeń klasycznych.

Okazuje się, że w obliczeniach kwantowych również istnieje **uniwersalny zbiór kwantowych bramek logicznych**.

Uniwersalność zbioru kwantowych bramek logicznych rozumiana jest na dwa sposoby.

Uniwersalność zbioru kwantowych bramek logicznych rozumiana jest na dwa sposoby.

- (I) Dowolna kwantowa operacja unitarna może być wyrażona w sposób dokładny jako kompozycja wielu bramek należących do zbioru bramek uniwersalnych.

Uniwersalność zbioru kwantowych bramek logicznych rozumiana jest na dwa sposoby.

- (I) Dowolna kwantowa operacja unitarna może być wyrażona w sposób dokładny jako kompozycja wielu bramek należących do zbioru bramek uniwersalnych.

A. Barenco et al., Phys. Rev. A 52 (1995) 3457

Uniwersalność zbioru kwantowych bramek logicznych rozumiana jest na dwa sposoby.

- (I) Dowolna kwantowa operacja unitarna może być wyrażona w sposób dokładny jako kompozycja wielu bramek należących do zbioru bramek uniwersalnych.

A. Barenco et al., Phys. Rev. A 52 (1995) 3457

- (II) Dowolna kwantowa operacja unitarna może być przybliżona z dowolną dokładnością za pomocą kilku bramek należących do zbioru bramek uniwersalnych.

Uniwersalność zbioru kwantowych bramek logicznych rozumiana jest na dwa sposoby.

- (I) Dowolna kwantowa operacja unitarna może być wyrażona w sposób dokładny jako kompozycja wielu bramek należących do zbioru bramek uniwersalnych.

A. Barenco et al., Phys. Rev. A 52 (1995) 3457

- (II) Dowolna kwantowa operacja unitarna może być przybliżona z dowolną dokładnością za pomocą kilku bramek należących do zbioru bramek uniwersalnych.

M.A. Nielsen and I.L. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information" (Cambridge University Press, 2002)

# Twierdzenie o uniwersalności kwantowych bramek logicznych (I)

## Twierdzenie o uniwersalności kwantowych bramek logicznych (I)

Zbiór kwantowych bramek logicznych, który zawiera wszystkie bramki jednokubitowe i dwukubitową bramkę XOR<sup>†</sup> jest uniwersalny w tym sensie, że każda operacja unitarna działająca na stan  $n$ -kubitowy, gdzie  $n$  jest dowolne, może być wyrażona jako odpowiednia kompozycja (iloczyn) bramek należących do tego zbioru.

## Twierdzenie o uniwersalności kwantowych bramek logicznych (I)

Zbiór kwantowych bramek logicznych, który zawiera wszystkie bramki jednokubitowe i dwukubitową bramkę XOR<sup>†</sup> jest uniwersalny w tym sensie, że każda operacja unitarna działająca na stan  $n$ -kubitowy, gdzie  $n$  jest dowolne, może być wyrażona jako odpowiednia kompozycja (iloczyn) bramek należących do tego zbioru.

<sup>†</sup>**Kwantowa bramka XOR (exclusive OR)** przekształca stan dwukubitowy  $|x, y\rangle$  w stan  $|x, x \oplus y\rangle$ , czyli jest równoważna bramce **CNOT**.

## Twierdzenie o uniwersalności kwantowych bramek logicznych (II)

## Twierdzenie o uniwersalności kwantowych bramek logicznych (II)

Zbiór kwantowych bramek logicznych jest **uniwersalny**, jeżeli dowolna operacja unitarna może być przybliżona z dowolną dokładnością za pomocą **bramek Hadamarda, fazowej,  $\pi/8$  i CNOT**.

Dowód twierdzenia II opiera się na konstrukcjach trzech poziomów uniwersalności obliczeń kwantowych.

Dowód twierdzenia II opiera się na konstrukcjach trzech poziomów uniwersalności obliczeń kwantowych.

**Pierwsza konstrukcja** pokazuje, że dowolny operator unitarny może być wyrażony **w sposób dokładny** jako iloczyn operatorów unitarnych, które działają w przestrzeni stanów dwukubitowych.

Dowód twierdzenia II opiera się na konstrukcjach trzech poziomów uniwersalności obliczeń kwantowych.

**Pierwsza konstrukcja** pokazuje, że dowolny operator unitarny może być wyrażony **w sposób dokładny** jako iloczyn operatorów unitarnych, które działają w przestrzeni stanów dwukubitowych.

Innymi słowy, dowolna macierz unitarna może być przedstawiona w postaci odpowiedniego złożenia macierzy unitarnych  $2 \times 2$ .

Dowód twierdzenia II opiera się na konstrukcjach trzech poziomów uniwersalności obliczeń kwantowych.

**Pierwsza konstrukcja** pokazuje, że dowolny operator unitarny może być wyrażony **w sposób dokładny** jako iloczyn operatorów unitarnych, które działają w przestrzeni stanów dwukubitowych.

Innymi słowy, dowolna macierz unitarna może być przedstawiona w postaci odpowiedniego złożenia macierzy unitarnych  $2 \times 2$ .

**Druga konstrukcja** pokazuje, że dowolny operator unitarny działający w przestrzeni stanów dwukubitowych może być wyrażony **w sposób dokładny** jako iloczyn operatorów jednokubitowych i operatora CNOT.

Dowód twierdzenia II opiera się na konstrukcjach trzech poziomów uniwersalności obliczeń kwantowych.

**Pierwsza konstrukcja** pokazuje, że dowolny operator unitarny może być wyrażony **w sposób dokładny** jako iloczyn operatorów unitarnych, które działają w przestrzeni stanów dwukubitowych.

Innymi słowy, dowolna macierz unitarna może być przedstawiona w postaci odpowiedniego złożenia macierzy unitarnych  $2 \times 2$ .

**Druga konstrukcja** pokazuje, że dowolny operator unitarny działający w przestrzeni stanów dwukubitowych może być wyrażony **w sposób dokładny** jako iloczyn operatorów jednokubitowych i operatora CNOT.

**Trzecia konstrukcja** pokazuje, że dowolna operacja jednokubitowa może być **przybliżona z dowolną dokładnością** za pomocą **bramek Hadamarda, fazowej i  $\pi/8$** .

Dowód twierdzenia II opiera się na konstrukcjach trzech poziomów uniwersalności obliczeń kwantowych.

**Pierwsza konstrukcja** pokazuje, że dowolny operator unitarny może być wyrażony **w sposób dokładny** jako iloczyn operatorów unitarnych, które działają w przestrzeni stanów dwukubitowych.

Innymi słowy, dowolna macierz unitarna może być przedstawiona w postaci odpowiedniego złożenia macierzy unitarnych  $2 \times 2$ .

**Druga konstrukcja** pokazuje, że dowolny operator unitarny działający w przestrzeni stanów dwukubitowych może być wyrażony **w sposób dokładny** jako iloczyn operatorów jednokubitowych i operatora CNOT.

**Trzecia konstrukcja** pokazuje, że dowolna operacja jednokubitowa może być **przybliżona z dowolną dokładnością** za pomocą **bramek Hadamarda, fazowej i  $\pi/8$** .

Trzy powyższe konstrukcje dostarczają dowodu twierdzenia II.

# Obwody kwantowe

W teorii obliczeń kwantowych **obwód kwantowy** jest pewnym schematem, użytecznym przy przedstawianiu przebiegu kwantowych operacji logicznych.

W teorii obliczeń kwantowych **obwód kwantowy** jest pewnym schematem, użytecznym przy przedstawianiu przebiegu kwantowych operacji logicznych.

Natomiast w przyszłych komputerach kwantowych obwody kwantowe będą podstawowymi elementami ich konstrukcji.

Schemat obwodu kwantowego zawiera symbole kubitów (sterującego i sterowanego), bramek kwantowych oraz łączące je linie.

Schemat obwodu kwantowego zawiera symbole kubitów (sterującego i sterowanego), bramek kwantowych oraz łączące je linie. Linie te reprezentują **druty (przewody)**, które niekoniecznie odpowiadają fizycznym przewodom elektrycznym.

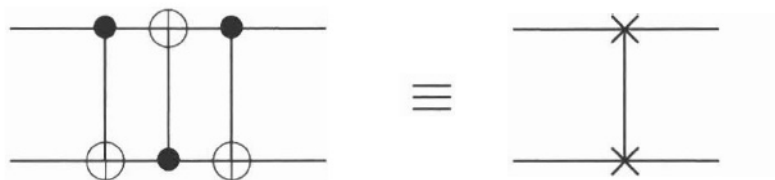
Schemat obwodu kwantowego zawiera symbole kubitów (sterującego i sterowanego), bramek kwantowych oraz łączące je linie. Linie te reprezentują **druty (przewody)**, które niekoniecznie odpowiadają fizycznym przewodom elektrycznym. Zwykle linia reprezentuje **bieg czasu** (schemat należy odczytywać od strony lewej do prawej) lub **trajektorię cząstki**, np. fotonu lub elektronu.

Schemat obwodu kwantowego zawiera symbole kubitów (sterującego i sterowanego), bramek kwantowych oraz łączące je linie. Linie te reprezentują **druty (przewody)**, które niekoniecznie odpowiadają fizycznym przewodom elektrycznym. Zwykle linia reprezentuje **bieg czasu** (schemat należy odczytywać od strony lewej do prawej) lub **trajektorię cząstki**, np. fotonu lub elektronu. Stan wejściowy jest najczęściej przyjmowany jako stan bazy obliczeniowej zawierający wyłącznie stany  $|0\rangle$ , czyli

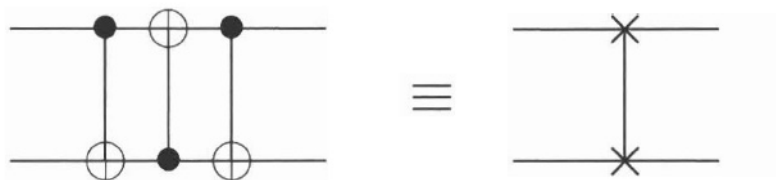
Schemat obwodu kwantowego zawiera symbole kubitów (sterującego i sterowanego), bramek kwantowych oraz łączące je linie. Linie te reprezentują **druty (przewody)**, które niekoniecznie odpowiadają fizycznym przewodom elektrycznym. Zwykle linia reprezentuje **bieg czasu** (schemat należy odczytywać od strony lewej do prawej) lub **trajektorię cząstki**, np. fotonu lub elektronu. Stan wejściowy jest najczęściej przyjmowany jako stan bazy obliczeniowej zawierający wyłącznie stany  $|0\rangle$ , czyli

$$|\psi_{input}\rangle \equiv |00\dots 0\rangle . \quad (69)$$

Rysunek: 5.5. Obwód kwantowy do implementacji bramki SWAP.

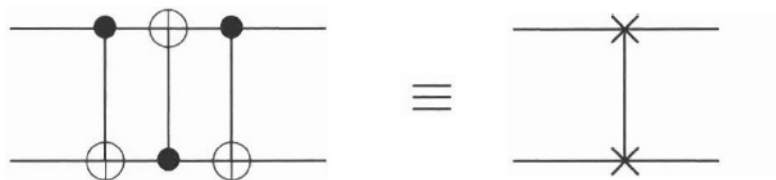


Rysunek: 5.5. Obwód kwantowy do implementacji bramki SWAP.



Powyższy obwód wykonuje operację zamiany dwóch kubitów (operację SWAP).

Rysunek: 5.5. Obwód kwantowy do implementacji bramki SWAP.



Powyższy obwód wykonuje operację zamiany dwóch kubitów (operację SWAP).

$$\begin{aligned} |x, y\rangle &\longrightarrow |x, x \oplus y\rangle \\ &\longrightarrow |x \oplus (x \oplus y), x \oplus y\rangle = |y, x \oplus y\rangle \\ &\longrightarrow |y, (x \oplus y) \oplus y\rangle = |y, x\rangle. \end{aligned} \tag{70}$$