

KORELACJE KWANTOWE

Korelacje klasyczne i kwantowe

Zgodnie z teorią statystyki matematycznej **współczynnik korelacji** definiujemy jako

Zgodnie z teorią statystyki matematycznej **współczynnik korelacji** definiujemy jako

$$\text{corr}(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (1)$$

gdzie x i y są zmiennymi losowymi o **macierzy kowariancji**

Zgodnie z teorią statystyki matematycznej **współczynnik korelacji** definiujemy jako

$$\text{corr}(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (1)$$

gdzie x i y są zmiennymi losowymi o **macierzy kowariancji**

$$\text{cov}(x, y) = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (2)$$

Zgodnie z teorią statystyki matematycznej **współczynnik korelacji** definiujemy jako

$$\text{corr}(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (1)$$

gdzie x i y są zmiennymi losowymi o **macierzy kowariancji**

$$\text{cov}(x, y) = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (2)$$

i **odchyleniach standardowych**

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}, \quad (3)$$

Zgodnie z teorią statystyki matematycznej **współczynnik korelacji** definiujemy jako

$$\text{corr}(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (1)$$

gdzie x i y są zmiennymi losowymi o **macierzy kowariancji**

$$\text{cov}(x, y) = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (2)$$

i **odchyleniach standardowych**

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}, \quad (3)$$

przy czym symbolem $\langle \xi \rangle$ oznaczamy **wartość oczekiwaną (średnią)** zmiennej losowej ξ .

Zgodnie z teorią statystyki matematycznej **współczynnik korelacji** definiujemy jako

$$\text{corr}(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (1)$$

gdzie x i y są zmiennymi losowymi o **macierzy kowariancji**

$$\text{cov}(x, y) = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (2)$$

i **odchyleniach standardowych**

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}, \quad (3)$$

przy czym symbolem $\langle \xi \rangle$ oznaczamy **wartość oczekiwaną (średnią)** zmiennej losowej ξ . Jeżeli wartości oczekiwane zmiennych x i y są równe zero, to

$$\text{corr}(x, y) = \frac{\langle xy \rangle}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (4)$$

Na potrzeby tego wykładu definiuję **klasyczną korelację** wielkości losowych a i b jako

Na potrzeby tego wykładu definiuję **klasyczną korelację** wielkości losowych a i b jako

$$r_{klas} = \langle ab \rangle = \frac{1}{N} \sum_j a_j b_j , \quad (5)$$

Na potrzeby tego wykładu definiuję **klasyczną korelację** wielkości losowych a i b jako

$$r_{klas} = \langle ab \rangle = \frac{1}{N} \sum_j a_j b_j , \quad (5)$$

gdzie N oznacza liczbę par losowań (pomiarów) dających wyniki a_j i b_j .

Na potrzeby tego wykładu definiuję **klasyczną korelację** wielkości losowych a i b jako

$$r_{klas} = \langle ab \rangle = \frac{1}{N} \sum_j a_j b_j , \quad (5)$$

gdzie N oznacza liczbę par losowań (pomiarów) dających wyniki a_j i b_j .

Kwantowa korelacja zdefiniowana jest jako

Na potrzeby tego wykładu definiuję **klasyczną korelację** wielkości losowych a i b jako

$$r_{klas} = \langle ab \rangle = \frac{1}{N} \sum_j a_j b_j , \quad (5)$$

gdzie N oznacza liczbę par losowań (pomiarów) dających wyniki a_j i b_j .

Kwantowa korelacja zdefiniowana jest jako

$$r_{kwant} = \langle \psi | \hat{a} \hat{b} | \psi \rangle , \quad (6)$$

gdzie \hat{a} i \hat{b} są operatorami odpowiadającymi wielkościom a i b , a $|\psi\rangle$ jest wektorem stanu kwantowego.

Przykład korelacji klasycznej i kwantowej

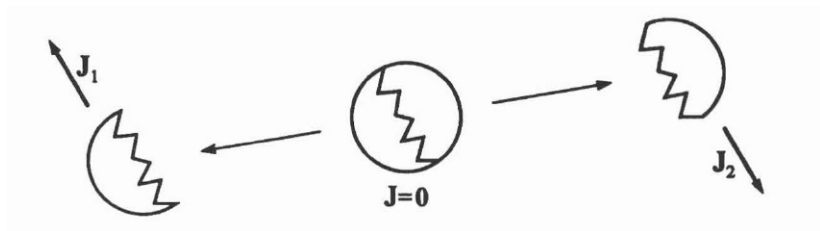
Przykład korelacji klasycznej i kwantowej

Rozważymy dwa równoważne sobie problemy: klasyczny i kwantowy, dla których obliczymy korelację wg. wzorów (5) i (6).

Najpierw zajmiemy się problemem klasycznym.

Najpierw zajmiemy się problemem klasycznym.
Rozważmy kulę (może to być np. kula armatnia) o początkowym momencie pędu $\mathbf{J} = 0$, która eksploduje na dwa asymetryczne fragmenty o momentach pędu \mathbf{J}_1 i $\mathbf{J}_2 = -\mathbf{J}_1$, które są rejestrowane przez dwóch obserwatorów.

Najpierw zajmiemy się problemem klasycznym.
Rozważmy kulę (może to być np. kula armatnia) o początkowym momencie pędu $\mathbf{J} = 0$, która eksploduje na dwa asymetryczne fragmenty o momentach pędu \mathbf{J}_1 i $\mathbf{J}_2 = -\mathbf{J}_1$, które są rejestrowane przez dwóch obserwatorów.



Rysunek: 6.1. Eksplozja kuli.

Pierwszy obserwator rejestruje pierwszy fragment kuli i mierzy wielkość dynamiczną

$$a = \text{sign}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}_1) , \quad (7)$$

Pierwszy obserwator rejestruje pierwszy fragment kuli i mierzy wielkość dynamiczną

$$a = \text{sign}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}_1) , \quad (7)$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha}$ jest wektorem w dowolnym kierunku wybranym przez pierwszego obserwatora.

Pierwszy obserwator rejestruje pierwszy fragment kuli i mierzy wielkość dynamiczną

$$a = \text{sign}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J}_1), \quad (7)$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha}$ jest wektorem w dowolnym kierunku wybranym przez pierwszego obserwatora. Wynik pomiaru wielkości (7) może przyjąć tylko dwie wartości $a = \pm 1$.

Podobnie drugi obserwator rejestruje drugi fragment kuli i mierzy wielkość

$$b = \text{sign}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J}_2) , \quad (8)$$

Podobnie drugi obserwator rejestruje drugi fragment kuli i mierzy wielkość

$$b = \text{sign}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J}_2) , \quad (8)$$

gdzie $\boldsymbol{\beta}$ jest innym wektorem w kierunku wybranym przez drugiego obserwatora.

Podobnie drugi obserwator rejestruje drugi fragment kuli i mierzy wielkość

$$b = \text{sign}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J}_2) , \quad (8)$$

gdzie $\boldsymbol{\beta}$ jest innym wektorem w kierunku wybranym przez drugiego obserwatora. Podobnie jak poprzednio możliwymi wynikami pomiaru są liczby $b = \pm 1$.

Eksperyment powtarzany jest N razy (z użyciem N kul).

Eksperyment powtarzany jest N razy (z użyciem N kul).
Powiedzmy, że a_j i b_j są wynikami pomiarów otrzymanymi przez obu obserwatorów dla j -tej kuli.

Eksperyment powtarzany jest N razy (z użyciem N kul).
Powiedzmy, że a_j i b_j są wynikami pomiarów otrzymanymi przez obu obserwatorów dla j -tej kuli. Kierunki wektorów \mathbf{J}_1 i \mathbf{J}_2 posiadają rozkład przypadkowy, a więc wartości oczekiwane

$$\langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_j a_j \simeq 0 \quad (9)$$

Eksperyment powtarzany jest N razy (z użyciem N kul).
Powiedzmy, że a_j i b_j są wynikami pomiarów otrzymanymi przez obu obserwatorów dla j -tej kuli. Kierunki wektorów \mathbf{J}_1 i \mathbf{J}_2 posiadają rozkład przypadkowy, a więc wartości oczekiwane

$$\langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_j a_j \simeq 0 \quad (9)$$

i

$$\langle b \rangle = \frac{1}{N} \sum_j b_j \simeq 0 \quad (10)$$

Eksperyment powtarzany jest N razy (z użyciem N kul). Powiedzmy, że a_j i b_j są wynikami pomiarów otrzymanymi przez obu obserwatorów dla j -tej kuli. Kierunki wektorów \mathbf{J}_1 i \mathbf{J}_2 posiadają rozkład przypadkowy, a więc wartości oczekiwane

$$\langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_j a_j \simeq 0 \quad (9)$$

i

$$\langle b \rangle = \frac{1}{N} \sum_j b_j \simeq 0 \quad (10)$$

są bliskie zera (dla $N \rightarrow \infty$ stają się one dokładnie równe zero).

Natomiast **korelacja klasyczna**, czyli

$$r_{klas} = \langle ab \rangle = \frac{1}{N} \sum_j a_j b_j \quad (11)$$

Natomiast **korelacja klasyczna**, czyli

$$r_{klas} = \langle ab \rangle = \frac{1}{N} \sum_j a_j b_j \quad (11)$$

na ogół nie znika.

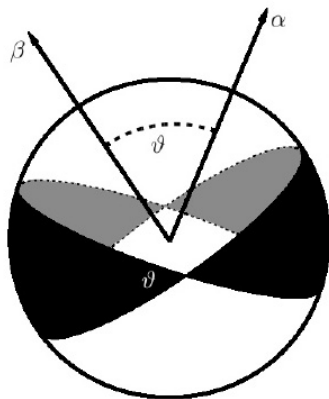
Natomiast **korelacja klasyczna**, czyli

$$r_{klas} = \langle ab \rangle = \frac{1}{N} \sum_j a_j b_j \quad (11)$$

na ogół nie znika. Jeżeli, np. $\alpha = \beta$, to obserwatorzy zawsze będą otrzymywać wyniki $a_j = -b_j$ i wtedy $r_{klas} = -1$.

Obliczamy korelację klasyczną dla dowolnych wektorów α i β .

Obliczamy korelację klasyczną dla dowolnych wektorów α i β .
W tym celu rozważamy powierzchnię sferyczną o jednostkowym promieniu o środku wyznaczonym przez początki wektorów α i β .



Rysunek: 6.2. Obliczanie korelacji klasycznej.

Oznaczmy symbolem θ kąt pomiędzy wektorami α i β .

Oznaczmy symbolem θ kąt pomiędzy wektorami α i β . Dwie płaszczyzny przechodzące przez środek sfery, pierwsza prostopadła do wektora α , a druga – do wektora β , dzielą powierzchnię sfery na dwie części o stosunku pól powierzchni

Oznaczmy symbolem θ kąt pomiędzy wektorami α i β . Dwie płaszczyzny przechodzące przez środek sfery, pierwsza prostopadła do wektora α , a druga – do wektora β , dzielą powierzchnię sfery na dwie części o stosunku pól powierzchni

$$\eta = \frac{\theta}{\pi - \theta} . \quad (12)$$

Oznaczmy symbolem θ kąt pomiędzy wektorami α i β . Dwie płaszczyzny przechodzące przez środek sfery, pierwsza prostopadła do wektora α , a druga – do wektora β , dzielą powierzchnię sfery na dwie części o stosunku pól powierzchni

$$\eta = \frac{\theta}{\pi - \theta}. \quad (12)$$

Dla jednej z półsfery wyznaczonych przez płaszczyzny prostopadłe do wektora α wektor \mathbf{J}_1 tworzy z wektorem α kąt θ_1 przyjmujący wartości z przedziału $[0, \pi/2)$, a zatem $a = +1$.

Oznaczmy symbolem θ kąt pomiędzy wektorami α i β . Dwie płaszczyzny przechodzące przez środek sfery, pierwsza prostopadła do wektora α , a druga – do wektora β , dzielą powierzchnię sfery na dwie części o stosunku pól powierzchni

$$\eta = \frac{\theta}{\pi - \theta}. \quad (12)$$

Dla jednej z półsfery wyznaczonych przez płaszczyzny prostopadłe do wektora α wektor \mathbf{J}_1 tworzy z wektorem α kąt θ_1 przyjmujący wartości z przedziału $[0, \pi/2)$, a zatem $a = +1$. Natomiast dla drugiej półsfery $\theta_1 \in [\pi/2, \pi)$, czyli $a = -1$.

Oznaczmy symbolem θ kąt pomiędzy wektorami α i β . Dwie płaszczyzny przechodzące przez środek sfery, pierwsza prostopadła do wektora α , a druga – do wektora β , dzielą powierzchnię sfery na dwie części o stosunku pól powierzchni

$$\eta = \frac{\theta}{\pi - \theta}. \quad (12)$$

Dla jednej z półsfery wyznaczonych przez płaszczyzny prostopadłe do wektora α wektor \mathbf{J}_1 tworzy z wektorem α kąt θ_1 przyjmujący wartości z przedziału $[0, \pi/2)$, a zatem $a = +1$. Natomiast dla drugiej półsfery $\theta_1 \in [\pi/2, \pi)$, czyli $a = -1$. Podobnie płaszczyzny prostopadłe do wektora β wyznaczają dwie półsfery, dla których $b = \pm 1$.

Oznaczmy symbolem θ kąt pomiędzy wersorami α i β . Dwie płaszczyzny przechodzące przez środek sfery, pierwsza prostopadła do wersora α , a druga – do wersora β , dzielą powierzchnię sfery na dwie części o stosunku pól powierzchni

$$\eta = \frac{\theta}{\pi - \theta}. \quad (12)$$

Dla jednej z półsfery wyznaczonych przez płaszczyzny prostopadłe do wersora α wektor \mathbf{J}_1 tworzy z wersorem α kąt θ_1 przyjmujący wartości z przedziału $[0, \pi/2)$, a zatem $a = +1$. Natomiast dla drugiej półsfery $\theta_1 \in [\pi/2, \pi)$, czyli $a = -1$. Podobnie płaszczyzny prostopadłe do wersora β wyznaczają dwie półsfery, dla których $b = \pm 1$. Ponieważ $\mathbf{J}_2 = -\mathbf{J}_1$, to wektory \mathbf{J}_1 i \mathbf{J}_2 tworzą kąt π .

Oznaczmy symbolem θ kąt pomiędzy wersorami $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$. Dwie płaszczyzny przechodzące przez środek sfery, pierwsza prostopadła do wersora $\boldsymbol{\alpha}$, a druga – do wersora $\boldsymbol{\beta}$, dzielą powierzchnię sfery na dwie części o stosunku pól powierzchni

$$\eta = \frac{\theta}{\pi - \theta}. \quad (12)$$

Dla jednej z półsfery wyznaczonych przez płaszczyzny prostopadłe do wersora $\boldsymbol{\alpha}$ wektor \mathbf{J}_1 tworzy z wersorem $\boldsymbol{\alpha}$ kąt θ_1 przyjmujący wartości z przedziału $[0, \pi/2)$, a zatem $a = +1$. Natomiast dla drugiej półsfery $\theta_1 \in [\pi/2, \pi)$, czyli $a = -1$.

Podobnie płaszczyzny prostopadłe do wersora $\boldsymbol{\beta}$ wyznaczają dwie półsfery, dla których $b = \pm 1$.

Ponieważ $\mathbf{J}_2 = -\mathbf{J}_1$, to wektory \mathbf{J}_1 i \mathbf{J}_2 tworzą kąt π . Natomiast wektory \mathbf{J}_2 i $\boldsymbol{\beta}$ tworzą kąt $\theta_2 = \pi - (\theta + \theta_1)$.

Dwie płaszczyzny prostopadłe do wektorów α i β dzielą sferę na 4 części (por rysunek).

Dwie płaszczyzny prostopadłe do wektorów α i β dzielą sferę na 4 części (por rysunek).

- (1) W pierwszej części (górnej) $\theta_1 \in [0, \pi/2)$ i $\theta_2 \in [0, \pi/2)$, czyli $a = +1$ i $b = +1$.

Dwie płaszczyzny prostopadłe do wektorów α i β dzielą sferę na 4 części (por rysunek).

- (1) W pierwszej części (górnej) $\theta_1 \in [0, \pi/2)$ i $\theta_2 \in [0, \pi/2)$, czyli $a = +1$ i $b = +1$.
- (2) W drugiej części (dolnej) $\theta_1 \in [\pi/2, \pi)$ i $\theta_2 \in [\pi/2, \pi)$, czyli $a = -1$ i $b = -1$.

Dwie płaszczyzny prostopadłe do wektorów α i β dzielą sferę na 4 części (por rysunek).

- (1) W pierwszej części (górnej) $\theta_1 \in [0, \pi/2)$ i $\theta_2 \in [0, \pi/2)$, czyli $a = +1$ i $b = +1$.
- (2) W drugiej części (dolnej) $\theta_1 \in [\pi/2, \pi)$ i $\theta_2 \in [\pi/2, \pi)$, czyli $a = -1$ i $b = -1$.
- (3) W trzeciej części (prawej) $\theta_1 \in [0, \pi/2)$ i $\theta_2 \in [\pi/2, \pi)$, czyli $a = +1$ i $b = -1$.

Dwie płaszczyzny prostopadłe do wektorów α i β dzielą sferę na 4 części (por rysunek).

- (1) W pierwszej części (górnej) $\theta_1 \in [0, \pi/2)$ i $\theta_2 \in [0, \pi/2)$, czyli $a = +1$ i $b = +1$.
- (2) W drugiej części (dolnej) $\theta_1 \in [\pi/2, \pi)$ i $\theta_2 \in [\pi/2, \pi)$, czyli $a = -1$ i $b = -1$.
- (3) W trzeciej części (prawej) $\theta_1 \in [0, \pi/2)$ i $\theta_2 \in [\pi/2, \pi)$, czyli $a = +1$ i $b = -1$.
- (4) W czwartej części (lewej) $\theta_1 \in [\pi/2, \pi]$ i $\theta_2 \in [0, \pi/2)$, czyli $a = -1$ i $b = +1$.

Jeżeli rozkład orientacji wektora \mathbf{J}_1 jest jednorodny, to przy obliczaniu wartości oczekiwanej wg. wzoru (5) części (1) i (2) wnoszą wkłady $ab = +1$ z wagą θ/π , natomiast części (3) i (4) wnoszą wkłady $ab = -1$ z wagą $(\pi - \theta)/\pi$. Wagi te wynikają ze stosunku pól (12).

Jeżeli rozkład orientacji wektora \mathbf{J}_1 jest jednorodny, to przy obliczaniu wartości oczekiwanej wg. wzoru (5) części (1) i (2) wnoszą wkłady $ab = +1$ z wagą θ/π , natomiast części (3) i (4) wnoszą wkłady $ab = -1$ z wagą $(\pi - \theta)/\pi$. Wagi te wynikają ze stosunku pól (12). Otrzymujemy więc

Jeżeli rozkład orientacji wektora \mathbf{J}_1 jest jednorodny, to przy obliczaniu wartości oczekiwanej wg. wzoru (5) części (1) i (2) wnoszą wkłady $ab = +1$ z wagą θ/π , natomiast części (3) i (4) wnoszą wkłady $ab = -1$ z wagą $(\pi - \theta)/\pi$. Wagi te wynikają ze stosunku pól (12). Otrzymujemy więc

$$r_{klas} = \langle ab \rangle = \frac{\theta - (\pi - \theta)}{\pi} = -1 + \frac{2\theta}{\pi}. \quad (13)$$

Jeżeli rozkład orientacji wektora \mathbf{J}_1 jest jednorodny, to przy obliczaniu wartości oczekiwanej wg. wzoru (5) części (1) i (2) wnoszą wkłady $ab = +1$ z wagą θ/π , natomiast części (3) i (4) wnoszą wkłady $ab = -1$ z wagą $(\pi - \theta)/\pi$. Wagi te wynikają ze stosunku pól (12). Otrzymujemy więc

$$r_{klas} = \langle ab \rangle = \frac{\theta - (\pi - \theta)}{\pi} = -1 + \frac{2\theta}{\pi}. \quad (13)$$

Ze wzoru (13) wynika, że korelacja klasyczna przyjmuje wartości z przedziału $[-1, +1]$.

Rozważmy teraz problem kwantowy, równoważny rozpatrywanemu powyżej problemowi klasycznemu.

Rozważmy teraz problem kwantowy, równoważny rozpatrywanemu powyżej problemowi klasycznemu. Powiedzmy, że cząstka kwantowa o spinie $S = 0$ rozpada się na dwie cząstki o spinach $\pm\hbar/2$.

Rozważmy teraz problem kwantowy, równoważny rozpatrywanemu powyżej problemowi klasycznemu. Powiedzmy, że cząstka kwantowa o spinie $S = 0$ rozpada się na dwie cząstki o spinach $\pm\hbar/2$. Dwaj obserwatorzy wykonują odpowiednie pomiary kwantowe, czyli mierzą wartości oczekiwane operatorów $\hat{a} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1$ i $\hat{b} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$,

Rozważmy teraz problem kwantowy, równoważny rozpatrywanemu powyżej problemowi klasycznemu. Powiedzmy, że cząstka kwantowa o spinie $S = 0$ rozpada się na dwie cząstki o spinach $\pm\hbar/2$. Dwaj obserwatorzy wykonują odpowiednie pomiary kwantowe, czyli mierzą wartości oczekiwane operatorów $\hat{a} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1$ i $\hat{b} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$, gdzie $\boldsymbol{\sigma}_1$ i $\boldsymbol{\sigma}_2$ są wektorami utworzonymi ze spinowych macierzy Pauliego dla cząstek 1 i 2, a wersory $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ zostały wybrane przez obserwatorów w sposób dowolny.

Rozważmy teraz problem kwantowy, równoważny rozpatrywanemu powyżej problemowi klasycznemu.

Powiedzmy, że cząstka kwantowa o spinie $S = 0$ rozpada się na dwie cząstki o spinach $\pm\hbar/2$. Dwaj obserwatorzy wykonują odpowiednie pomiary kwantowe, czyli mierzą wartości oczekiwane operatorów $\hat{a} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1$ i $\hat{b} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$, gdzie $\boldsymbol{\sigma}_1$ i $\boldsymbol{\sigma}_2$ są wektorami utworzonymi ze spinowych macierzy Pauliego dla cząstek 1 i 2, a wersory $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ zostały wybrane przez obserwatorów w sposób dowolny.

Przypominam, że operator spinu cząstki i -tej zdefiniowany jest jako $\mathbf{s}_i = (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}_i$.

Wartościami własnymi operatorów \hat{a} i \hat{b} są liczby $a = \pm 1$ i $b = \pm 1$.

Wartościami własnymi operatorów \hat{a} i \hat{b} są liczby $a = \pm 1$ i $b = \pm 1$. Ze względu na przypadkowy rozkład wektorów spinu cząstek 1 i 2 wartości oczekiwane tych operatorów zerują się, czyli $\langle a \rangle = \langle b \rangle = 0$.

Obliczmy korelację kwantową wielkości a i b , czyli wielkość

Obliczmy korelację kwantową wielkości a i b , czyli wielkość

$$r_{kwant} = \langle ab \rangle = \langle \psi | (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) | \psi \rangle \quad (14)$$

Obliczmy korelację kwantową wielkości a i b , czyli wielkość

$$r_{kwant} = \langle ab \rangle = \langle \psi | (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) | \psi \rangle \quad (14)$$

w stanie singletowym, dla którego zachodzi $\boldsymbol{\sigma}_2 | \psi \rangle = -\boldsymbol{\sigma}_1 | \psi \rangle$.

Korzystamy z tożsamości

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} + i(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (15)$$

Korzystamy z tożsamości

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} + i(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\sigma} , \quad (15)$$

która jest spełniona dla operatora wektorowego $\boldsymbol{\sigma}$ utworzonego z trzech macierzy Pauliego.

W wyniku prostych obliczeń otrzymujemy

$$r_{kwant} = \langle ab \rangle = -\langle \psi | (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) | \psi \rangle = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} . \quad (16)$$

W wyniku prostych obliczeń otrzymujemy

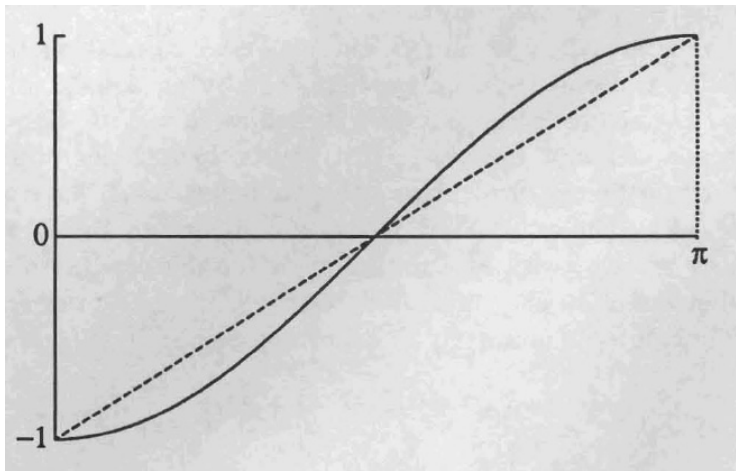
$$r_{kwant} = \langle ab \rangle = -\langle \psi | (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) | \psi \rangle = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} . \quad (16)$$

Ostatecznie

$$r_{kwant} = -\cos \theta . \quad (17)$$

Otrzymane wyniki obliczeń korelacji (13) i (17) dla równoważnych problemów klasycznego i kwantowego pokazane są na rysunku.

Otrzymane wyniki obliczeń korelacji (13) i (17) dla równoważnych problemów klasycznego i kwantowego pokazane są na rysunku.



Rysunek: 6.3. Porównanie korelacji klasycznej (linia przerywana) i kwantowej (linia ciągła).

Otrzymane wyniki (13) i (17) pokazują, że

Otrzymane wyniki (13) i (17) pokazują, że
**korelacja kwantowa jest silniejsza od korelacji
klasycznej,**

Otrzymane wyniki (13) i (17) pokazują, że
**korelacja kwantowa jest silniejsza od korelacji
klasycznej,**

za wyjątkiem przypadków $r_{klas} = r_{kwant} = +1$,
 $r_{klas} = r_{kwant} = -1$ oraz $r_{klas} = r_{kwant} = 0$.

Otrzymane wyniki (13) i (17) pokazują, że
**korelacja kwantowa jest silniejsza od korelacji
klasycznej,**

za wyjątkiem przypadków $r_{klas} = r_{kwant} = +1$,
 $r_{klas} = r_{kwant} = -1$ oraz $r_{klas} = r_{kwant} = 0$. Te przypadki
oznaczają odpowiednio **pełną korelację, pełną
antykorrelację oraz brak korelacji.**

Otrzymane wyniki (13) i (17) pokazują, że **korelacja kwantowa jest silniejsza od korelacji klasycznej,**

za wyjątkiem przypadków $r_{klas} = r_{kwant} = +1$, $r_{klas} = r_{kwant} = -1$ oraz $r_{klas} = r_{kwant} = 0$. Te przypadki oznaczają odpowiednio **pełną korelację, pełną antykorelację oraz brak korelacji.**

Silniejsza korelacja kwantowa oznacza, że cząstki kwantowe silniej wpływają wzajemnie na siebie niż cząstki klasyczne, co prowadzi do silniejszych kwantowych efektów uporządkowania (słabszej tendencji do chaosu).

Wbrew pozorom cząstki kwantowe – łatwiej niż cząstki klasyczne – mogą wytwarzać stany uporządkowane.

Wbrew pozorom cząstki kwantowe – łatwiej niż cząstki klasyczne – mogą wytwarzać stany uporządkowane.

Przykłady: nadprzewodnictwo, nadciekłość.

Nierówności Bella

Nierówności Bella opisują fundamentalną różnicę pomiędzy korelacjami klasycznymi i kwantowymi.

Nierówności Bella opisują fundamentalną różnicę pomiędzy korelacjami klasycznymi i kwantowymi. Nierówności te stosują się do dowolnego układu fizycznego, na którym możemy wykonać pomiar prowadzący do dwóch różnych wyników, którym możemy arbitralnie przypisać wartości ± 1 .

Nierówności Bella opisują fundamentalną różnicę pomiędzy korelacjami klasycznymi i kwantowymi. Nierówności te stosują się do dowolnego układu fizycznego, na którym możemy wykonać pomiar prowadzący do dwóch różnych wyników, którym możemy arbitralnie przypisać wartości ± 1 . Przykłady pomiarów takich wielkości fizycznych zostały przedstawione w poprzednim podrozdziale.

Nierówności Bella opisują **pomiary zarówno klasyczne jak i kwantowe**.

Nierówności Bella opisują **pomiary zarówno klasyczne jak i kwantowe**.

Podają one w sposób ilościowy różnicę pomiędzy nimi.

Rozpatrujemy eksperyment wykonywany przez Alicję (A) i Boba (Bartka, B) o schemacie pokazanym na rysunku.

Rozpatrujemy eksperyment wykonywany przez Alicję (A) i Boba (Bartka, B) o schemacie pokazanym na rysunku.



Dwie cząstki zostają spreparowane w sposób powtarzalny przez Cezarego (C).

Dwie cząstki zostają spreparowane w sposób powtarzalny przez Cezarego (C). Następnie jedna cząstka zostaje wysłana do Alicji, a druga do Bartka.

Dwie cząstki zostają spreparowane w sposób powtarzalny przez Cezarego (C). Następnie jedna cząstka zostaje wysłana do Alicji, a druga do Bartka. Alicja ma do dyspozycji dwa przyrządy pomiarowe, które mierzą wielkości Q i R , z których każda może przyjmować dwie różne wartości ± 1 .

Dwie cząstki zostają spreparowane w sposób powtarzalny przez Cezarego (C). Następnie jedna cząstka zostaje wysłana do Alicji, a druga do Bartka. Alicja ma do dyspozycji dwa przyrządy pomiarowe, które mierzą wielkości Q i R , z których każda może przyjmować dwie różne wartości ± 1 . Alicja wybiera przyrząd mierzący Q lub R w sposób przypadkowy.

Dwie cząstki zostają spreparowane w sposób powtarzalny przez Cezarego (C). Następnie jedna cząstka zostaje wysłana do Alicji, a druga do Bartka. Alicja ma do dyspozycji dwa przyrządy pomiarowe, które mierzą wielkości Q i R , z których każda może przyjmować dwie różne wartości ± 1 . Alicja wybiera przyrząd mierzący Q lub R w sposób przypadkowy. Podobnie Bartek może zmierzyć wielkości S i T i otrzymać w wyniku pomiaru $+1$ lub -1 .

Dwie cząstki zostają spreparowane w sposób powtarzalny przez Cezarego (C). Następnie jedna cząstka zostaje wysłana do Alicji, a druga do Bartka. Alicja ma do dyspozycji dwa przyrządy pomiarowe, które mierzą wielkości Q i R , z których każda może przyjmować dwie różne wartości ± 1 . Alicja wybiera przyrząd mierzący Q lub R w sposób przypadkowy. Podobnie Bartek może zmierzyć wielkości S i T i otrzymać w wyniku pomiaru $+1$ lub -1 . Również Bartek wybiera przyrząd mierzący S lub T w sposób przypadkowy.

Dwie cząstki zostają spreparowane w sposób powtarzalny przez Cezarego (C). Następnie jedna cząstka zostaje wysłana do Alicji, a druga do Bartka. Alicja ma do dyspozycji dwa przyrządy pomiarowe, które mierzą wielkości Q i R , z których każda może przyjmować dwie różne wartości ± 1 . Alicja wybiera przyrząd mierzący Q lub R w sposób przypadkowy. Podobnie Bartek może zmierzyć wielkości S i T i otrzymać w wyniku pomiaru $+1$ lub -1 . Również Bartek wybiera przyrząd mierzący S lub T w sposób przypadkowy. Alicja i Bartek wykonują swoje pomiary równocześnie. Obserwatorzy ci są tak daleko oddaleni od siebie, że wykonywane przez nich pomiary nie wpływają na ich wyniki.

Obliczamy wielkość

$$QS + RS + RT - QT = (Q + R)S + (R - Q)T . \quad (18)$$

Obliczamy wielkość

$$QS + RS + RT - QT = (Q + R)S + (R - Q)T . \quad (18)$$

Z faktu, że R i Q przyjmują wartości ± 1 wynika, że albo

$$(Q + R)S = 0 , \quad (19)$$

Obliczamy wielkość

$$QS + RS + RT - QT = (Q + R)S + (R - Q)T . \quad (18)$$

Z faktu, że R i Q przyjmują wartości ± 1 wynika, że albo

$$(Q + R)S = 0 , \quad (19)$$

albo

$$(R - Q)T = 0 . \quad (20)$$

Obliczamy wielkość

$$QS + RS + RT - QT = (Q + R)S + (R - Q)T . \quad (18)$$

Z faktu, że R i Q przyjmują wartości ± 1 wynika, że albo

$$(Q + R)S = 0 , \quad (19)$$

albo

$$(R - Q)T = 0 . \quad (20)$$

Dla każdego z tych przypadków zgodnie z równaniem (18) zachodzi

Obliczamy wielkość

$$QS + RS + RT - QT = (Q + R)S + (R - Q)T . \quad (18)$$

Z faktu, że R i Q przyjmują wartości ± 1 wynika, że albo

$$(Q + R)S = 0 , \quad (19)$$

albo

$$(R - Q)T = 0 . \quad (20)$$

Dla każdego z tych przypadków zgodnie z równaniem (18) zachodzi

$$QS + RS + RT - QT = \pm 2 . \quad (21)$$

Założmy, że $p(q, r, s, t)$ jest prawdopodobieństwem tego, że – przed wykonaniem pomiarów – układ obu cząstek znajduje się w takim stanie, że

Założmy, że $p(q, r, s, t)$ jest prawdopodobieństwem tego, że – przed wykonaniem pomiarów – układ obu cząstek znajduje się w takim stanie, że

$$Q = q, R = r, S = s, T = t.$$

Założmy, że $p(q, r, s, t)$ jest prawdopodobieństwem tego, że – przed wykonaniem pomiarów – układ obu cząstek znajduje się w takim stanie, że

$$Q = q, R = r, S = s, T = t.$$

Obliczmy wartość oczekiwaną wielkości (18) przy użyciu prawdopodobieństw $p(q, r, s, t)$. Otrzymujemy

Założmy, że $p(q, r, s, t)$ jest prawdopodobieństwem tego, że – przed wykonaniem pomiarów – układ obu cząstek znajduje się w takim stanie, że

$$Q = q, R = r, S = s, T = t.$$

Obliczmy wartość oczekiwaną wielkości (18) przy użyciu prawdopodobieństw $p(q, r, s, t)$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle QS + RS + RT - QT \rangle &= \sum_{qrst} p(q, r, s, t)(qs + rs + rt - qt) \\ &\leq \sum_{qrst} p(q, r, s, t) \times 2 = 2, \end{aligned} \quad (22)$$

Założmy, że $p(q, r, s, t)$ jest prawdopodobieństwem tego, że – przed wykonaniem pomiarów – układ obu cząstek znajduje się w takim stanie, że

$$Q = q, R = r, S = s, T = t.$$

Obliczmy wartość oczekiwaną wielkości (18) przy użyciu prawdopodobieństw $p(q, r, s, t)$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle QS + RS + RT - QT \rangle &= \sum_{qrst} p(q, r, s, t)(qs + rs + rt - qt) \\ &\leq \sum_{qrst} p(q, r, s, t) \times 2 = 2, \end{aligned} \quad (22)$$

czyli otrzymaliśmy nierówność

$$\langle QS + RS + RT - QT \rangle \leq 2. \quad (23)$$

Wartość oczekiwaną wielkości (18) możemy też obliczyć w inny sposób jako

Wartość oczekiwaną wielkości (18) możemy też obliczyć w inny sposób jako

$$\begin{aligned}\langle QS + RS + RT - QT \rangle &= \sum_{qrst} p(q, r, s, t)qs + \sum_{qrst} p(q, r, s, t)rs \\ &\quad + \sum_{qrst} p(q, r, s, t)rt - \sum_{qrst} p(q, r, s, t)qt \\ &= \langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle . \quad (24)\end{aligned}$$

Wartość oczekiwaną wielkości (18) możemy też obliczyć w inny sposób jako

$$\begin{aligned}\langle QS + RS + RT - QT \rangle &= \sum_{qrst} p(q, r, s, t)qs + \sum_{qrst} p(q, r, s, t)rs \\ &\quad + \sum_{qrst} p(q, r, s, t)rt - \sum_{qrst} p(q, r, s, t)qt \\ &= \langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle . \quad (24)\end{aligned}$$

Porównując (23) i (24) otrzymujemy **nierówność Bella**

Wartość oczekiwaną wielkości (18) możemy też obliczyć w inny sposób jako

$$\begin{aligned}\langle QS + RS + RT - QT \rangle &= \sum_{qrst} p(q, r, s, t)qs + \sum_{qrst} p(q, r, s, t)rs \\ &\quad + \sum_{qrst} p(q, r, s, t)rt - \sum_{qrst} p(q, r, s, t)qt \\ &= \langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle . \quad (24)\end{aligned}$$

Porównując (23) i (24) otrzymujemy **nierówność Bella**

$$\langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle \leq 2 . \quad (25)$$

Nierówność (25) jest jedną spośród większego zbioru nierówności, zwanych **nierównościami Bella**.

Nierówność (25) jest jedną spośród większego zbioru nierówności, zwanych **nierównościami Bella**. Postać nierówności (25) zwana jest też **nierównością CHSH[†]**.

Nierówność (25) jest jedną spośród większego zbioru nierówności, zwanych **nierównościami Bella**. Postać nierówności (25) zwana jest też **nierównością CHSH[†]**. Nierówność (25) podaje **oszacowanie od góry kombinacji liniowej korelacji** czterech wielkości mierzonych parami przez dwóch niezależnych, odległych od siebie obserwatorów.

Nierówność (25) jest jedną spośród większego zbioru nierówności, zwanych **nierównościami Bella**. Postać nierówności (25) zwana jest też **nierównością CHSH[†]**. Nierówność (25) podaje **oszacowanie od góry kombinacji liniowej korelacji** czterech wielkości mierzonych parami przez dwóch niezależnych, odległych od siebie obserwatorów. Wielkości mierzone mogą być wielkościami klasycznymi lub kwantowymi.

Nierówność (25) jest jedną spośród większego zbioru nierówności, zwanych **nierównościami Bella**. Postać nierówności (25) zwana jest też **nierównością CHSH**[†]. Nierówność (25) podaje **oszacowanie od góry kombinacji liniowej korelacji** czterech wielkości mierzonych parami przez dwóch niezależnych, odległych od siebie obserwatorów. Wielkości mierzone mogą być wielkościami klasycznymi lub kwantowymi.

[†]Clauser, J.F., Horne, M.A., Shimony, A., Holt, R.A., Phys. Rev. Lett. 23 (1969) 880.

Wyniki pomiarów korelacji pomiędzy parami fotonów pokazały,
że

Wyniki pomiarów korelacji pomiędzy parami fotonów pokazały, że **nierówność CHSH nie jest spełniona[†]**.

Wyniki pomiarów korelacji pomiędzy parami fotonów pokazały, że **nierówność CHSH nie jest spełniona**[†].

[†]A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1804.

Rozważymy dwa przykłady eksperymentów pokazujących, że nierówność Bella nie jest spełniona.

Rozważmy dwa przykłady eksperymentów pokazujących, że nierówność Bella nie jest spełniona.

Będą to:

Rozważmy dwa przykłady eksperymentów pokazujących, że nierówność Bella nie jest spełniona.

Będą to:

- (1) pomiar polaryzacji liniowej fotonów (eksperyment wykonany),

Rozważmy dwa przykłady eksperymentów pokazujących, że nierówność Bella nie jest spełniona.

Będą to:

- (1) pomiar polaryzacji liniowej fotonów (eksperyment wykonany),
- (2) pomiar spinu układu dwóch elektronów (eksperyment myślowy).

(1) Polaryzacja liniowa fotonów

(1) Polaryzacja liniowa fotonów

Rozważmy parę fotonów emitowanych w przeciwnych kierunkach.

(1) Polaryzacja liniowa fotonów

Rozważmy parę fotonów emitowanych w przeciwnych kierunkach. Dwóch odległych od siebie obserwatorów mierzy liniową polaryzację tych fotonów.

(1) Polaryzacja liniowa fotonów

Rozważmy parę fotonów emitowanych w przeciwnych kierunkach. Dwóch odległych od siebie obserwatorów mierzy liniową polaryzację tych fotonów. Pierwszy obserwator (A) mierzy polaryzację fotonu wyemitowanego w jednym z kierunków.

(1) Polaryzacja liniowa fotonów

Rozważmy parę fotonów emitowanych w przeciwnych kierunkach. Dwóch odległych od siebie obserwatorów mierzy liniową polaryzację tych fotonów. Pierwszy obserwator (A) mierzy polaryzację fotonu wyemitowanego w jednym z kierunków. Obserwator A może wybrać dwie różne orientacje swojego analizatora polaryzacji. Tworzą one kąty α i γ z dowolną wybraną osią.

(1) Polaryzacja liniowa fotonów

Rozważmy parę fotonów emitowanych w przeciwnych kierunkach. Dwóch odległych od siebie obserwatorów mierzy liniową polaryzację tych fotonów. Pierwszy obserwator (A) mierzy polaryzację fotonu wyemitowanego w jednym z kierunków. Obserwator A może wybrać dwie różne orientacje swojego analizatora polaryzacji. Tworzą one kąty α i γ z dowolną wybraną osią. Dla każdej orientacji eksperyment, wykonany przez obserwatora A, daje dwa (nieprzewidywalne) wyniki, którym możemy przypisać liczby ± 1 .

(1) Polaryzacja liniowa fotonów

Rozważmy parę fotonów emitowanych w przeciwnych kierunkach. Dwóch odległych od siebie obserwatorów mierzy liniową polaryzację tych fotonów. Pierwszy obserwator (A) mierzy polaryzację fotonu wyemitowanego w jednym z kierunków. Obserwator A może wybrać dwie różne orientacje swojego analizatora polaryzacji. Tworzą one kąty α i γ z dowolną wybraną osią. Dla każdej orientacji eksperyment, wykonany przez obserwatora A, daje dwa (nieprzewidywalne) wyniki, którym możemy przypisać liczby ± 1 . Jeżeli obserwator A wybierze ustawienie analizatora pod kątem α , to wynik pomiaru, oznaczony symbolem a może przyjmować wartości $a = \pm 1$.

(1) Polaryzacja liniowa fotonów

Rozważmy parę fotonów emitowanych w przeciwnych kierunkach. Dwóch odległych od siebie obserwatorów mierzy liniową polaryzację tych fotonów. Pierwszy obserwator (A) mierzy polaryzację fotonu wyemitowanego w jednym z kierunków. Obserwator A może wybrać dwie różne orientacje swojego analizatora polaryzacji. Tworzą one kąty α i γ z dowolną wybraną osią. Dla każdej orientacji eksperyment, wykonany przez obserwatora A, daje dwa (nieprzewidywalne) wyniki, którym możemy przypisać liczby ± 1 . Jeżeli obserwator A wybierze ustawienie analizatora pod kątem α , to wynik pomiaru, oznaczony symbolem a może przyjmować wartości $a = \pm 1$. Jeżeli natomiast wybierze ustawienie analizatora pod kątem γ , to otrzyma wynik $c = \pm 1$.

Drugi obserwator (B) mierzy polaryzację fotonu wyemitowanego w przeciwnym kierunku do fotonu rejestrowanego przez A.

Drugi obserwator (B) mierzy polaryzację fotonu wyemitowanego w przeciwnym kierunku do fotonu rejestrowanego przez A. Podobnie jak A obserwator B może wybrać dwie inne orientacje swojego analizatora pod kątami β i δ z wybraną osią.

Drugi obserwator (B) mierzy polaryzację fotonu wyemitowanego w przeciwnym kierunku do fotonu rejestrowanego przez A. Podobnie jak A obserwator B może wybrać dwie inne orientacje swojego analizatora pod kątami β i δ z wybraną osią. Wynikami pomiarów, otrzymanymi przez obserwatora B dla analizatora ustawionego pod kątami β i γ , są odpowiednio wielkości $b = \pm 1$ i $d = \pm 1$.

Drugi obserwator (B) mierzy polaryzację fotonu wyemitowanego w przeciwnym kierunku do fotonu rejestrowanego przez A. Podobnie jak A obserwator B może wybrać dwie inne orientacje swojego analizatora pod kątami β i δ z wybraną osią. Wynikami pomiarów, otrzymanymi przez obserwatora B dla analizatora ustawionego pod kątami β i γ , są odpowiednio wielkości $b = \pm 1$ i $d = \pm 1$.

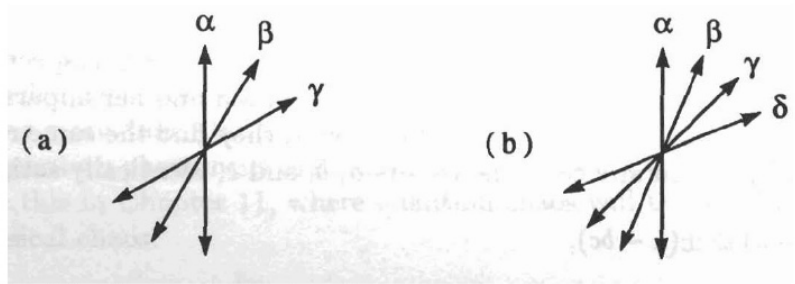


Fig. 6.7. Linear polarization directions giving the maximal violation of (a) Bell's inequality (6.26), and (b) the CHSH inequality (6.30).

Jeżeli obserwatorzy A i B wykonają wystarczająco długie serie pomiarów, to na podstawie ich wyników będą mogli oszacować korelacje pomiędzy wielkościami a , b , c i d .

Jeżeli obserwatorzy A i B wykonają wystarczająco długie serie pomiarów, to na podstawie ich wyników będą mogli oszacować korelacje pomiędzy wielkościami a , b , c i d . Korelacje te spełniają nierówność (25), która może być zapisana jako

Jeżeli obserwatorzy A i B wykonają wystarczająco długie serie pomiarów, to na podstawie ich wyników będą mogli oszacować korelacje pomiędzy wielkościami a , b , c i d . Korelacje te spełniają nierówność (25), która może być zapisana jako

$$|\langle ab \rangle + \langle bc \rangle + \langle cd \rangle - \langle da \rangle| \leq 2 . \quad (26)$$

W przypadku liniowo spolaryzowanych fotonów odpowiednie korelacje można wyrazić za pomocą kątów pomiędzy płaszczyzną polaryzacji analizatora a wybraną osią, np. dla kątów α i β

W przypadku liniowo spolaryzowanych fotonów odpowiednie korelacje można wyrazić za pomocą kątów pomiędzy płaszczyzną polaryzacji analizatora a wybraną osią, np. dla kątów α i β

$$\langle ab \rangle = \cos 2(\alpha - \beta) . \quad (27)$$

W przypadku liniowo spolaryzowanych fotonów odpowiednie korelacje można wyrazić za pomocą kątów pomiędzy płaszczyzną polaryzacji analizatora a wybraną osią, np. dla kątów α i β

$$\langle ab \rangle = \cos 2(\alpha - \beta) . \quad (27)$$

Zadanie: wyprowadzić ten związek.

W przypadku liniowo spolaryzowanych fotonów odpowiednie korelacje można wyrazić za pomocą kątów pomiędzy płaszczyzną polaryzacji analizatora a wybraną osią, np. dla kątów α i β

$$\langle ab \rangle = \cos 2(\alpha - \beta) . \quad (27)$$

Zadanie: wyprowadzić ten związek.

Dla rozważanego eksperymentu nierówność (26) przyjmuje postać

W przypadku liniowo spolaryzowanych fotonów odpowiednie korelacje można wyrazić za pomocą kątów pomiędzy płaszczyzną polaryzacji analizatora a wybraną osią, np. dla kątów α i β

$$\langle ab \rangle = \cos 2(\alpha - \beta) . \quad (27)$$

Zadanie: wyprowadzić ten związek.

Dla rozważanego eksperymentu nierówność (26) przyjmuje postać

$$| \cos 2(\alpha - \beta) + \cos 2(\beta - \gamma) + \cos 2(\gamma - \delta) - \cos 2(\delta - \alpha) | \leq 2 . \quad (28)$$

Obliczmy wartość lewej strony nierówności (28) w przypadku, gdy wybrane płaszczyzny polaryzacji analizatorów tworzą z sobą kąty 22.5° .

Obliczmy wartość lewej strony nierówności (28) w przypadku, gdy wybrane płaszczyzny polaryzacji analizatorów tworzą z sobą kąty 22.5° . Wtedy pierwsze trzy cosinusy są równe $1/\sqrt{2}$, a czwarty jest równy $-1/\sqrt{2}$.

Obliczmy wartość lewej strony nierówności (28) w przypadku, gdy wybrane płaszczyzny polaryzacji analizatorów tworzą z sobą kąty 22.5° . Wtedy pierwsze trzy cosinusy są równe $1/\sqrt{2}$, a czwarty jest równy $-1/\sqrt{2}$. A zatem lewa strona nierówności (28) wynosi $2\sqrt{2}$, czyli nierówność nie jest spełniona.

Obliczmy wartość lewej strony nierówności (28) w przypadku, gdy wybrane płaszczyzny polaryzacji analizatorów tworzą z sobą kąty 22.5° . Wtedy pierwsze trzy cosinusy są równe $1/\sqrt{2}$, a czwarty jest równy $-1/\sqrt{2}$. A zatem lewa strona nierówności (28) wynosi $2\sqrt{2}$, czyli nierówność nie jest spełniona. Dla kątów 22.5° zachodzi **maksymalne naruszenie** nierówności (28).

Obliczmy wartość lewej strony nierówności (28) w przypadku, gdy wybrane płaszczyzny polaryzacji analizatorów tworzą z sobą kąty 22.5° . Wtedy pierwsze trzy cosinusy są równe $1/\sqrt{2}$, a czwarty jest równy $-1/\sqrt{2}$. A zatem lewa strona nierówności (28) wynosi $2\sqrt{2}$, czyli nierówność nie jest spełniona.

Dla kątów 22.5° zachodzi **maksymalne naruszenie** nierówności (28).

Można natomiast pokazać, że nierówność (28) jest spełniona dla klasycznej korelacji, np. danej wzorem (13).

(2) Układ dwóch kubitów spinowych

(2) Układ dwóch kubitów spinowych

Rozważmy następujący eksperyment myślowy.

(2) Układ dwóch kubitów spinowych

Rozważmy następujący eksperyment myślowy. Powiedzmy, że obserwator C spreparował układ dwóch spinów $1/2$ w stanie dwukubitowym

(2) Układ dwóch kubitów spinowych

Rozważmy następujący eksperyment myślowy. Powiedzmy, że obserwator C spreparował układ dwóch spinów $1/2$ w stanie dwukubitowym

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B}{\sqrt{2}} . \quad (29)$$

(2) Układ dwóch kubitów spinowych

Rozważmy następujący eksperyment myślowy. Powiedzmy, że obserwator C spreparował układ dwóch spinów $1/2$ w stanie dwukubitowym

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B}{\sqrt{2}} . \quad (29)$$

Obserwator C przekazuje pierwszy kubit Alicji (A), a drugi Bartkowi (B).

(2) Układ dwóch kubitów spinowych

Rozważmy następujący eksperyment myślowy. Powiedzmy, że obserwator C spreparował układ dwóch spinów $1/2$ w stanie dwukubitowym

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B}{\sqrt{2}}. \quad (29)$$

Obserwator C przekazuje pierwszy kubit Alicji (A), a drugi Bartkowi (B).

Alicja przeprowadza pomiary następujących wielkości:

(2) Układ dwóch kubitów spinowych

Rozważmy następujący eksperyment myślowy. Powiedzmy, że obserwator C spreparował układ dwóch spinów $1/2$ w stanie dwukubitowym

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B}{\sqrt{2}} . \quad (29)$$

Obserwator C przekazuje pierwszy kubit Alicji (A), a drugi Bartkowi (B).

Alicja przeprowadza pomiary następujących wielkości:

$$Q = Z_A , \quad R = X_A , \quad (30)$$

(2) Układ dwóch kubitów spinowych

Rozważmy następujący eksperyment myślowy. Powiedzmy, że obserwator C spreparował układ dwóch spinów $1/2$ w stanie dwukubitowym

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B}{\sqrt{2}} . \quad (29)$$

Obserwator C przekazuje pierwszy kubit Alicji (A), a drugi Bartkowi (B).

Alicja przeprowadza pomiary następujących wielkości:

$$Q = Z_A , \quad R = X_A , \quad (30)$$

natomiast Bartek wykonuje pomiary wielkości

(2) Układ dwóch kubitów spinowych

Rozważmy następujący eksperyment myślowy. Powiedzmy, że obserwator C spreparował układ dwóch spinów $1/2$ w stanie dwukubitowym

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B}{\sqrt{2}} . \quad (29)$$

Obserwator C przekazuje pierwszy kubit Alicji (A), a drugi Bartkowi (B).

Alicja przeprowadza pomiary następujących wielkości:

$$Q = Z_A , \quad R = X_A , \quad (30)$$

natomiast Bartek wykonuje pomiary wielkości

$$S = \frac{-Z_B - X_B}{\sqrt{2}} , \quad T = \frac{Z_B - X_B}{\sqrt{2}} . \quad (31)$$

(2) Układ dwóch kubitów spinowych

Rozważmy następujący eksperyment myślowy. Powiedzmy, że obserwator C spreparował układ dwóch spinów $1/2$ w stanie dwukubitowym

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B}{\sqrt{2}} . \quad (29)$$

Obserwator C przekazuje pierwszy kubit Alicji (A), a drugi Bartkowi (B).

Alicja przeprowadza pomiary następujących wielkości:

$$Q = Z_A , \quad R = X_A , \quad (30)$$

natomiast Bartek wykonuje pomiary wielkości

$$S = \frac{-Z_B - X_B}{\sqrt{2}} , \quad T = \frac{Z_B - X_B}{\sqrt{2}} . \quad (31)$$

Przypominam, że symbole X i Z oznaczają skrócony zapis macierzy Pauliego odpowiednio σ_x i σ_z .

Obliczamy wartości oczekiwane iloczynów operatorów (30) i (31) w stanie (29) i otrzymujemy

Obliczamy wartości oczekiwane iloczynów operatorów (30) i (31) w stanie (29) i otrzymujemy

$$\langle QS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle RS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle RT \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle QT \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (32)$$

Obliczamy wartości oczekiwane iloczynów operatorów (30) i (31) w stanie (29) i otrzymujemy

$$\langle QS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle RS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle RT \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle QT \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (32)$$

Zadanie: obliczyć te wartości oczekiwane.

Obliczamy wartości oczekiwane iloczynów operatorów (30) i (31) w stanie (29) i otrzymujemy

$$\langle QS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle RS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle RT \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle QT \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (32)$$

Zadanie: obliczyć te wartości oczekiwane.

Otrzymaliśmy zatem wynik

$$\langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle = 2\sqrt{2}, \quad (33)$$

Obliczamy wartości oczekiwane iloczynów operatorów (30) i (31) w stanie (29) i otrzymujemy

$$\langle QS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle RS \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle RT \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle QT \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (32)$$

Zadanie: obliczyć te wartości oczekiwane.

Otrzymaliśmy zatem wynik

$$\langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle = 2\sqrt{2}, \quad (33)$$

który oznacza naruszenie nierówności (25).

Stany splątane

Omówimy teraz nieco dokładniej własności stanów dwukubitowych [por. wykład 4, wzory (6) i (7)].

Omówimy teraz nieco dokładniej własności stanów dwukubitowych [por. wykład 4, wzory (6) i (7)].
Rozważamy układ kwantowy złożony z dwóch podukładów A i B .

Omówimy teraz nieco dokładniej własności stanów dwukubitowych [por. wykład 4, wzory (6) i (7)].

Rozważamy układ kwantowy złożony z dwóch podukładów A i B . Ortonormalny zupełny zbiór wektorów

$$\{|i_1\rangle, |i_2\rangle, \dots, |i_m\rangle\}$$

stanowi bazę w przestrzeni Hilberta \mathcal{H}_A stanów kwantowych podukładu A ,

Omówimy teraz nieco dokładniej własności stanów dwukubitowych [por. wykład 4, wzory (6) i (7)].

Rozważamy układ kwantowy złożony z dwóch podukładów A i B . Ortonormalny zupełny zbiór wektorów

$$\{|i_1\rangle, |i_2\rangle, \dots |i_m\rangle\}$$

stanowi bazę w przestrzeni Hilberta \mathcal{H}_A stanów kwantowych podukładu A , natomiast zbiór wektorów

$$\{|j_1\rangle, |j_2\rangle, \dots |j_n\rangle\}$$

stanowi bazę w przestrzeni Hilberta \mathcal{H}_B stanów kwantowych podukładu B .

Dowolny stan układu złożonego można przedstawić w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ w postaci

Dowolny stan układu złożonego można przedstawić w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ w postaci

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} |i_{\mu} j_{\nu}\rangle, \quad (34)$$

Dowolny stan układu złożonego można przedstawić w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ w postaci

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} |i_{\mu} j_{\nu}\rangle, \quad (34)$$

gdzie $|i_{\mu} j_{\nu}\rangle = |i_{\mu}\rangle \otimes |j_{\nu}\rangle$ jest iloczynem tensorowym wektorów bazowych.

Dowolny stan układu złożonego można przedstawić w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ w postaci

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} |i_{\mu} j_{\nu}\rangle, \quad (34)$$

gdzie $|i_{\mu} j_{\nu}\rangle = |i_{\mu}\rangle \otimes |j_{\nu}\rangle$ jest iloczynem tensorowym wektorów bazowych. Ponadto spełniony jest warunek unormowania stanu (34), czyli

$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n |a_{\mu\nu}|^2 = 1. \quad (35)$$

Jeżeli stan (34) można wyrazić w postaci

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B , \quad (36)$$

Jeżeli stan (34) można wyrazić w postaci

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B , \quad (36)$$

czyli

$$|\psi\rangle_{AB} = \left(\sum_{\mu=1}^m \alpha_{\mu} |i_{\mu}\rangle \right) \left(\sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu} |j_{\nu}\rangle \right) , \quad (37)$$

Jeżeli stan (34) można wyrazić w postaci

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B , \quad (36)$$

czyli

$$|\psi\rangle_{AB} = \left(\sum_{\mu=1}^m \alpha_{\mu} |i_{\mu}\rangle \right) \left(\sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu} |j_{\nu}\rangle \right) , \quad (37)$$

to stan $|\psi\rangle_{AB}$ nazywamy **stanem separowalnym**.

Jeżeli stan (34) można wyrazić w postaci

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B , \quad (36)$$

czyli

$$|\psi\rangle_{AB} = \left(\sum_{\mu=1}^m \alpha_{\mu} |i_{\mu}\rangle \right) \left(\sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu} |j_{\nu}\rangle \right) , \quad (37)$$

to stan $|\psi\rangle_{AB}$ nazywamy **stanem separowalnym**.

Jeżeli natomiast

$$|\psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B , \quad (38)$$

Jeżeli stan (34) można wyrazić w postaci

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B , \quad (36)$$

czyli

$$|\psi\rangle_{AB} = \left(\sum_{\mu=1}^m \alpha_{\mu} |i_{\mu}\rangle \right) \left(\sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu} |j_{\nu}\rangle \right) , \quad (37)$$

to stan $|\psi\rangle_{AB}$ nazywamy **stanem separowalnym**.

Jeżeli natomiast

$$|\psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B , \quad (38)$$

to stan $|\psi\rangle_{AB}$ nazywamy **stanem splątany**.

Jeżeli stan (34) można wyrazić w postaci

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B , \quad (36)$$

czyli

$$|\psi\rangle_{AB} = \left(\sum_{\mu=1}^m \alpha_{\mu} |i_{\mu}\rangle \right) \left(\sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu} |j_{\nu}\rangle \right) , \quad (37)$$

to stan $|\psi\rangle_{AB}$ nazywamy **stanem separowalnym**.

Jeżeli natomiast

$$|\psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B , \quad (38)$$

to stan $|\psi\rangle_{AB}$ nazywamy **stanem splątany**.

Stan splątany = entangled state (ang.), inaczej **e-bit**.

Uwaga

Uwaga

Wyrażając stany kwantowe za pomocą funkcji falowych można zdefiniować stan separowalny układu złożonego opisanego funkcją falową $\psi_{AB}(r_A, r_B)$ jako stan opisany iloczynem funkcji falowych $\psi_A(r_A)$ i $\psi_B(r_B)$ podukładów A i B , czyli

Uwaga

Wyrażając stany kwantowe za pomocą funkcji falowych można zdefiniować stan separowalny układu złożonego opisanego funkcją falową $\psi_{AB}(r_A, r_B)$ jako stan opisany iloczynem funkcji falowych $\psi_A(r_A)$ i $\psi_B(r_B)$ podukładów A i B , czyli

$$\psi_{AB}(r_A, r_B) = \psi_A(r_A)\psi_B(r_B) , \quad (39)$$

Uwaga

Wyrażając stany kwantowe za pomocą funkcji falowych można zdefiniować stan separowalny układu złożonego opisanego funkcją falową $\psi_{AB}(r_A, r_B)$ jako stan opisany iloczynem funkcji falowych $\psi_A(r_A)$ i $\psi_B(r_B)$ podukładów A i B , czyli

$$\psi_{AB}(r_A, r_B) = \psi_A(r_A)\psi_B(r_B) , \quad (39)$$

gdzie r_A i r_B są zbiorami współrzędnych kartezjańskich opisujących położenia cząstek odpowiednio w podukładach A i B .

Uwaga

Wyrażając stany kwantowe za pomocą funkcji falowych można zdefiniować stan separowalny układu złożonego opisanego funkcją falową $\psi_{AB}(r_A, r_B)$ jako stan opisany iloczynem funkcji falowych $\psi_A(r_A)$ i $\psi_B(r_B)$ podukładów A i B , czyli

$$\psi_{AB}(r_A, r_B) = \psi_A(r_A)\psi_B(r_B) , \quad (39)$$

gdzie r_A i r_B są zbiorami współrzędnych kartezjańskich opisujących położenia cząstek odpowiednio w podukładach A i B .

Natomiast funkcja falowa stanu splątanego układu złożonego AB spełnia nierówność

Uwaga

Wyrażając stany kwantowe za pomocą funkcji falowych można zdefiniować stan separowalny układu złożonego opisanego funkcją falową $\psi_{AB}(r_A, r_B)$ jako stan opisany iloczynem funkcji falowych $\psi_A(r_A)$ i $\psi_B(r_B)$ podukładów A i B , czyli

$$\psi_{AB}(r_A, r_B) = \psi_A(r_A)\psi_B(r_B) , \quad (39)$$

gdzie r_A i r_B są zbiorami współrzędnych kartezjańskich opisujących położenia cząstek odpowiednio w podukładach A i B .

Natomiast funkcja falowa stanu splątanego układu złożonego AB spełnia nierówność

$$\psi_{AB}(r_A, r_B) \neq \psi_A(r_A)\psi_B(r_B) , \quad (40)$$

Uwaga

Wyrażając stany kwantowe za pomocą funkcji falowych można zdefiniować stan separowalny układu złożonego opisanego funkcją falową $\psi_{AB}(r_A, r_B)$ jako stan opisany iloczynem funkcji falowych $\psi_A(r_A)$ i $\psi_B(r_B)$ podukładów A i B , czyli

$$\psi_{AB}(r_A, r_B) = \psi_A(r_A)\psi_B(r_B) , \quad (39)$$

gdzie r_A i r_B są zbiorami współrzędnych kartezjańskich opisujących położenia cząstek odpowiednio w podukładach A i B .

Natomiast funkcja falowa stanu splątanego układu złożonego AB spełnia nierówność

$$\psi_{AB}(r_A, r_B) \neq \psi_A(r_A)\psi_B(r_B) , \quad (40)$$

czyli nie może być wyrażona w postaci iloczynu funkcji falowych podukładów.

Stany Bella

Stany Bella

Wśród stanów splątanych szczególnie ważną rolę odgrywają **stany Bella**, zdefiniowane jako

Stany Bella

Wśród stanów splątanych szczególnie ważną rolę odgrywają **stany Bella**, zdefiniowane jako

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (41)$$

Stany Bella

Wśród stanów splątanych szczególnie ważną rolę odgrywają **stany Bella**, zdefiniowane jako

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (41)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (42)$$

Stany Bella

Wśród stanów splątanych szczególnie ważną rolę odgrywają **stany Bella**, zdefiniowane jako

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (41)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (42)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (43)$$

Stany Bella

Wśród stanów splątanych szczególnie ważną rolę odgrywają **stany Bella**, zdefiniowane jako

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (41)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (42)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (43)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (44)$$

Stany Bella

Wśród stanów splątanych szczególnie ważną rolę odgrywają **stany Bella**, zdefiniowane jako

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (41)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (42)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (43)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (44)$$

Stany Bella nazywane są czasem **stanami EPR** od nazwisk Einstein, Podolski, Rosen.

Stany (41), (42), (43), (44) mogą być zapisane za pomocą jednego wzoru

Stany (41), (42), (43), (44) mogą być zapisane za pomocą jednego wzoru

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|0, y\rangle + (-1)^x |1, \bar{y}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (45)$$

Stany (41), (42), (43), (44) mogą być zapisane za pomocą jednego wzoru

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|0, y\rangle + (-1)^x |1, \bar{y}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (45)$$

gdzie $\bar{y} = 1$ dla $y = 0$ i $\bar{y} = 0$ dla $y = 1$.

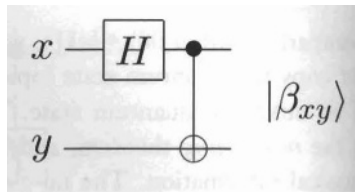
Obwód kwantowy do produkcji stanów Bella

Obwód kwantowy do produkcji stanów Bella

Rozważmy obwód kwantowy, którego schemat przedstawiony jest na rysunku.

Obwód kwantowy do produkcji stanów Bella

Rozważmy obwód kwantowy, którego schemat przedstawiony jest na rysunku.



Obwód ten składa się z jednokubitowej bramki Hadamarda i dwukubitowej bramki CNOT.

Obwód ten składa się z jednokubitowej bramki Hadamarda i dwukubitowej bramki CNOT. Wyniki działania tych bramek na cztery stany dwukubitowej bazy obliczeniowej $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ pokazane są w tabeli (1).

Tabela: (1) Stany wejściowe (in) i wyjściowe (out) obwodu kwantowego produkującego stany Bella.

in	out
$ 00\rangle$	$(00\rangle + 11\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{00}\rangle$
$ 01\rangle$	$(01\rangle + 10\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{01}\rangle$
$ 10\rangle$	$(00\rangle - 11\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{10}\rangle$
$ 11\rangle$	$(01\rangle - 10\rangle)/\sqrt{2} \equiv \beta_{11}\rangle$

Obliczmy np. działanie obwodu na stan $|00\rangle$.

Obliczmy np. działanie obwodu na stan $|00\rangle$. Przypominam, że bramka Hadamarda działa tylko na pierwszy kubit, a bramka CNOT działa na drugi kubit jak bramka NOT w zależności od stanu pierwszego kubit.

Obliczmy np. działanie obwodu na stan $|00\rangle$. Przypominam, że bramka Hadamarda działa tylko na pierwszy kubit, a bramka CNOT działa na drugi kubit jak bramka NOT w zależności od stanu pierwszego kubit.

$$\begin{aligned} U_{CNOT} H|00\rangle &= U_{CNOT} \left[\frac{(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle}{\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{00}\rangle, \end{aligned} \quad (46)$$

Obliczmy np. działanie obwodu na stan $|00\rangle$. Przypominam, że bramka Hadamarda działa tylko na pierwszy kubit, a bramka CNOT działa na drugi kubit jak bramka NOT w zależności od stanu pierwszego kubit.

$$\begin{aligned} U_{CNOT} H|00\rangle &= U_{CNOT} \left[\frac{(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle}{\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{00}\rangle, \end{aligned} \quad (46)$$

a więc otrzymujemy pierwszy ze stanów Bella.

Problem EPR

W klasycznym artykule[†] Einstein, Rosen i Podolsky (EPR) postawili fundamentalne pytanie:

W klasycznym artykule[†] Einstein, Rosen i Podolsky (EPR) postawili fundamentalne pytanie:
”Czy kwantowo-mechaniczny opis rzeczywistości fizycznej jest kompletny?”.

W klasycznym artykule[†] Einstein, Rosen i Podolsky (EPR) postawili fundamentalne pytanie:
”Czy kwantowo-mechaniczny opis rzeczywistości fizycznej jest kompletny?”.

[†]A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. 47 (1935) 777.

Autorzy (EPR) zaproponowali eksperyment myślowy (obecnie wykonalny), którego istotę można przedstawić w następujący sposób:

Autorzy (EPR) zaproponowali eksperyment myślowy (obecnie wykonalny), którego istotę można przedstawić w następujący sposób:

Rozważmy złożony układ kwantowy zawierający dwie odległe od siebie cząstki.

Autorzy (EPR) zaproponowali eksperyment myślowy (obecnie wykonalny), którego istotę można przedstawić w następujący sposób:

Rozważmy złożony układ kwantowy zawierający dwie odległe od siebie cząstki. Układ ten znajduje się w stanie splątanym o funkcji falowej

Autorzy (EPR) zaproponowali eksperyment myślowy (obecnie wykonalny), którego istotę można przedstawić w następujący sposób:

Rozważmy złożony układ kwantowy zawierający dwie odległe od siebie cząstki. Układ ten znajduje się w stanie splątanym o funkcji falowej

$$\psi = \delta(x_1 - x_2 - L)\delta(p_1 + p_2) , \quad (47)$$

Autorzy (EPR) zaproponowali eksperyment myślowy (obecnie wykonalny), którego istotę można przedstawić w następujący sposób:

Rozważmy złożony układ kwantowy zawierający dwie odległe od siebie cząstki. Układ ten znajduje się w stanie splątanym o funkcji falowej

$$\psi = \delta(x_1 - x_2 - L)\delta(p_1 + p_2) , \quad (47)$$

Symbolem δ oznaczona jest delta Diraca, która została tutaj użyta w celu uproszczenia rozważań. Poprawna funkcja falowa powinna mieć postać dowolnie wysokiego i wąskiego piku unormowanego do 1.

Autorzy (EPR) zaproponowali eksperyment myślowy (obecnie wykonalny), którego istotę można przedstawić w następujący sposób:

Rozważmy złożony układ kwantowy zawierający dwie odległe od siebie cząstki. Układ ten znajduje się w stanie splątanym o funkcji falowej

$$\psi = \delta(x_1 - x_2 - L)\delta(p_1 + p_2) , \quad (47)$$

Symbolem δ oznaczona jest delta Diraca, która została tutaj użyta w celu uproszczenia rozważań. Poprawna funkcja falowa powinna mieć postać dowolnie wysokiego i wąskiego piku unormowanego do 1. Dla dalszego uproszczenia rozważań rozpatrujemy problem jednowymiarowy, przy czym x_1 i x_2 są współrzędnymi cząstek, a p_1 i p_2 są pędami cząstek (mierzonymi w kierunku x).

Autorzy (EPR) zaproponowali eksperyment myślowy (obecnie wykonalny), którego istotę można przedstawić w następujący sposób:

Rozważmy złożony układ kwantowy zawierający dwie odległe od siebie cząstki. Układ ten znajduje się w stanie splątanym o funkcji falowej

$$\psi = \delta(x_1 - x_2 - L)\delta(p_1 + p_2) , \quad (47)$$

Symbolem δ oznaczona jest delta Diraca, która została tutaj użyta w celu uproszczenia rozważań. Poprawna funkcja falowa powinna mieć postać dowolnie wysokiego i wąskiego piku unormowanego do 1. Dla dalszego uproszczenia rozważań rozpatrujemy problem jednowymiarowy, przy czym x_1 i x_2 są współrzędnymi cząstek, a p_1 i p_2 są pędami cząstek (mierzonymi w kierunku x). L jest odległością pomiędzy cząstkami.

Autorzy (EPR) zaproponowali eksperyment myślowy (obecnie wykonalny), którego istotę można przedstawić w następujący sposób:

Rozważmy złożony układ kwantowy zawierający dwie odległe od siebie cząstki. Układ ten znajduje się w stanie splątanym o funkcji falowej

$$\psi = \delta(x_1 - x_2 - L)\delta(p_1 + p_2) , \quad (47)$$

Symbolem δ oznaczona jest delta Diraca, która została tutaj użyta w celu uproszczenia rozważań. Poprawna funkcja falowa powinna mieć postać dowolnie wysokiego i wąskiego piku unormowanego do 1. Dla dalszego uproszczenia rozważań rozpatrujemy problem jednowymiarowy, przy czym x_1 i x_2 są współrzędnymi cząstek, a p_1 i p_2 są pędami cząstek (mierzonymi w kierunku x). L jest odległością pomiędzy cząstkami. Zakładamy, że odległość ta jest znacznie większa niż zasięg oddziaływania wzajemnego cząstek.

Funkcja falowa (47) zapisana jest w reprezentacji mieszanej położeniowo-impulsowej.

Funkcja falowa (47) zapisana jest w reprezentacji mieszanej położeniowo-pędowej. W sensie fizycznym oznacza ona, że wzajemna odległość cząstek 1 i 2 jest bardzo bliska L , a ich pęd całkowity jest dowolnie bliski zera.

Funkcja falowa (47) zapisana jest w reprezentacji mieszanej położeniowo-pędowej. W sensie fizycznym oznacza ona, że wzajemna odległość cząstek 1 i 2 jest bardzo bliska L , a ich pęd całkowity jest dowolnie bliski zera. Zauważmy, że operatory wielkości w (47) komutują z sobą, czyli

Funkcja falowa (47) zapisana jest w reprezentacji mieszanej położeniowo-pędowej. W sensie fizycznym oznacza ona, że wzajemna odległość cząstek 1 i 2 jest bardzo bliska L , a ich pęd całkowity jest dowolnie bliski zera.

Zauważmy, że operatory wielkości w (47) komutują z sobą, czyli

$$[\hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{p}_1 + \hat{p}_2] = 0 , \quad (48)$$

Funkcja falowa (47) zapisana jest w reprezentacji mieszanej położeniowo-pędowej. W sensie fizycznym oznacza ona, że wzajemna odległość cząstek 1 i 2 jest bardzo bliska L , a ich pęd całkowity jest dowolnie bliski zera.

Zauważmy, że operatory wielkości w (47) komutują z sobą, czyli

$$[\hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{p}_1 + \hat{p}_2] = 0, \quad (48)$$

co oznacza, że wielkości te są równocześnie mierzalne.

Jeżeli układ cząstek znajduje się w stanie (47), to nie znamy ani położeń poszczególnych cząstek (znamy jedynie ich odległość wzajemną) ani pędów tych cząstek (znamy wyłącznie ich pęd całkowity).

Jeżeli układ cząstek znajduje się w stanie (47), to nie znamy ani położeń poszczególnych cząstek (znamy jedynie ich odległość wzajemną) ani pędów tych cząstek (znamy wyłącznie ich pęd całkowity).

Jeżeli jednak wykonamy pomiar położenia x_1 pierwszej cząstki, to będziemy mogli przewidzieć – z prawdopodobieństwem równym 1 – położenie x_2 cząstki drugiej, **bez wykonania pomiaru położenia tej cząstki.**

Jeżeli układ cząstek znajduje się w stanie (47), to nie znamy ani położeń poszczególnych cząstek (znamy jedynie ich odległość wzajemną) ani pędów tych cząstek (znamy wyłącznie ich pęd całkowity).

Jeżeli jednak wykonamy pomiar położenia x_1 pierwszej cząstki, to będziemy mogli przewidzieć – z prawdopodobieństwem równym 1 – położenie x_2 cząstki drugiej, **bez wykonania pomiaru położenia tej cząstki.**

Podobnie, jeżeli wykonamy pomiar pędu p_1 cząstki 1, to będziemy mogli przewidzieć – z pewnością – pęd p_2 cząstki 2, znowu **bez wykonania pomiaru pędu tej cząstki.**

Jednakże **mechanika kwantowa wyklucza jednoczesny dokładny pomiar obu wielkości x_2 i p_2** , ponieważ operatory \hat{x}_2 i \hat{p}_2 nie komutują z sobą.

⇒ EPR starali się pokazać, że opis kwantowo-mechaniczny, zgodnie z którym pełna informacja o układzie kwantowym zawarta jest w funkcji falowej, nie jest kompletny.

⇒ EPR starali się pokazać, że opis kwantowo-mechaniczny, zgodnie z którym pełna informacja o układzie kwantowym zawarta jest w funkcji falowej, nie jest kompletny.

Na tym polega tzw. **paradoks EPR**.

Rozwiązanie paradoksu EPR opiera się na spostrzeżeniu, że stan EPR (47) jest stanem splątany.

Rozwiązanie paradoksu EPR opiera się na spostrzeżeniu, że stan EPR (47) jest stanem splątanym. Rozważymy zatem pomiar wykonany nad układem w stanie splątanym.

Rozwiązanie paradoksu EPR opiera się na spostrzeżeniu, że stan EPR (47) jest stanem splątany. Rozważymy zatem pomiar wykonany nad układem w stanie splątany. W celu możliwie jasnego przedstawienia rozwiązania problemu nie będziemy rozpatrywali oryginalnego problemu EPR, lecz równoważny mu problem pomiaru spinu układu dwóch elektronów w stanie splątany.

Korelacje w eksperymencie EPR

Korelacje w eksperymencie EPR

Załóżmy, że spreparowaliśmy stan singletowy $|\psi_S\rangle$ układu dwóch cząstek (elektronów) o spinie $1/2$.

Korelacje w eksperymencie EPR

Załóżmy, że spreparowaliśmy stan singletowy $|\psi_S\rangle$ układu dwóch cząstek (elektronów) o spinie $1/2$. Stan ten ma postać stanu splątanego Bella $|\beta_{11}\rangle$, czyli

Korelacje w eksperymencie EPR

Załóżmy, że spreparowaliśmy stan singletowy $|\psi_S\rangle$ układu dwóch cząstek (elektronów) o spinie $1/2$. Stan ten ma postać stanu splątanego Bella $|\beta_{11}\rangle$, czyli

$$|\psi_S\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (49)$$

Korelacje w eksperymencie EPR

Założmy, że spreparowaliśmy stan singletowy $|\psi_S\rangle$ układu dwóch cząstek (elektronów) o spinie $1/2$. Stan ten ma postać stanu splątanego Bella $|\beta_{11}\rangle$, czyli

$$|\psi_S\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (49)$$

Powiedzmy, że wykonamy pomiar składowej spinu wzdłuż dowolnej osi, wyznaczonej przez wektor \mathbf{e} , dla każdego z elektronów.

Korelacje w eksperymencie EPR

Załóżmy, że spreparowaliśmy stan singletowy $|\psi_S\rangle$ układu dwóch cząstek (elektronów) o spinie $1/2$. Stan ten ma postać stanu splątanego Bella $|\beta_{11}\rangle$, czyli

$$|\psi_S\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (49)$$

Powiedzmy, że wykonamy pomiar składowej spinu wzdłuż dowolnej osi, wyznaczonej przez wersor \mathbf{e} , dla każdego z elektronów. Pomiarowi temu odpowiada operator

Korelacje w eksperymencie EPR

Założmy, że spreparowaliśmy stan singletowy $|\psi_S\rangle$ układu dwóch cząstek (elektronów) o spinie $1/2$. Stan ten ma postać stanu splątanego Bella $|\beta_{11}\rangle$, czyli

$$|\psi_S\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} . \quad (49)$$

Powiedzmy, że wykonamy pomiar składowej spinu wzdłuż dowolnej osi, wyznaczonej przez wersor \mathbf{e} , dla każdego z elektronów. Pomiarowi temu odpowiada operator

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma} = e_x \sigma_x + e_y \sigma_y + e_z \sigma_z . \quad (50)$$

Można pokazać, że operator $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ posiada dwie wartości własne ± 1 oraz że operatory rzutowe na odpowiednie stany własne tego operatora mają postać

Można pokazać, że operator $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ posiada dwie wartości własne ± 1 oraz że operatory rzutowe na odpowiednie stany własne tego operatora mają postać

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(\hat{I} \pm \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}) . \quad (51)$$

Można pokazać, że operator $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ posiada dwie wartości własne ± 1 oraz że operatory rzutowe na odpowiednie stany własne tego operatora mają postać

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(\hat{I} \pm \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}) . \quad (51)$$

Zadanie: Wykazać ten związek

Okazuje się, że dla dowolnego wyboru wersora \mathbf{e} pomiary składowej spinu w kierunku \mathbf{e} , wykonane dla dwóch elektronów w stanie (49), dadzą następujące wyniki:

Okazuje się, że dla dowolnego wyboru wektora \mathbf{e} pomiary składowej spinu w kierunku \mathbf{e} , wykonane dla dwóch elektronów w stanie (49), dadzą następujące wyniki:
jeżeli pomiar na pierwszym elektronie da wynik $+1$, to pomiar wykonany na drugim elektronie da zawsze wynik -1 i odwrotnie.

Okazuje się, że dla dowolnego wyboru wektora \mathbf{e} pomiary składowej spinu w kierunku \mathbf{e} , wykonane dla dwóch elektronów w stanie (49), dadzą następujące wyniki:

jeżeli pomiar na pierwszym elektronie da wynik $+1$, to pomiar wykonany na drugim elektronie da zawsze wynik -1 i odwrotnie.

Wydaje się zatem, że drugi elektron "zna" wynik pomiaru wykonanego na pierwszym elektronie, niezależnie od tego, w jaki sposób wykonaliśmy pomiar na pierwszym elektronie.

Okazuje się, że dla dowolnego wyboru wektora \mathbf{e} pomiary składowej spinu w kierunku \mathbf{e} , wykonane dla dwóch elektronów w stanie (49), dadzą następujące wyniki:

jeżeli pomiar na pierwszym elektronie da wynik $+1$, to pomiar wykonany na drugim elektronie da zawsze wynik -1 i odwrotnie.

Wydaje się zatem, że drugi elektron "zna" wynik pomiaru wykonanego na pierwszym elektronie, niezależnie od tego, w jaki sposób wykonaliśmy pomiar na pierwszym elektronie. Odpowiemy teraz na pytanie, dlaczego jest to możliwe.

Powiedzmy, że $|a\rangle$ i $|b\rangle$ są stanami własnymi operatora $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$,
czyli spełnione są równania własne

Powiedzmy, że $|a\rangle$ i $|b\rangle$ są stanami własnymi operatora $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$,
czyli spełnione są równania własne

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}|a\rangle = +|a\rangle, \quad (52)$$

Powiedzmy, że $|a\rangle$ i $|b\rangle$ są stanami własnymi operatora $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$,
czyli spełnione są równania własne

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}|a\rangle = +|a\rangle, \quad (52)$$

oraz

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}|b\rangle = -|b\rangle. \quad (53)$$

Powiedzmy, że $|a\rangle$ i $|b\rangle$ są stanami własnymi operatora $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, czyli spełnione są równania własne

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}|a\rangle = +|a\rangle, \quad (52)$$

oraz

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}|b\rangle = -|b\rangle. \quad (53)$$

Transformacja z bazy $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ do bazy stanów własnych operatora σ_z , czyli $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ma postać

Powiedzmy, że $|a\rangle$ i $|b\rangle$ są stanami własnymi operatora $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$,
czyli spełnione są równania własne

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}|a\rangle = +|a\rangle , \quad (52)$$

oraz

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}|b\rangle = -|b\rangle . \quad (53)$$

Transformacja z bazy $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ do bazy stanów własnych
operatora σ_z , czyli $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ma postać

$$|0\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle , \quad (54)$$

$$|1\rangle = \gamma|a\rangle + \delta|b\rangle . \quad (55)$$

Występujące w równaniach (54) i (55) liczby zespolone α , β , γ i δ tworzą macierz unitarną U transformacji

Występujące w równaniach (54) i (55) liczby zespolone α , β , γ i δ tworzą macierz unitarną U transformacji

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Występujące w równaniach (54) i (55) liczby zespolone α , β , γ i δ tworzą macierz unitarną U transformacji

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Wyznacznik tej macierzy

$$\det(U) = \alpha\delta - \beta\gamma = e^{i\theta}, \quad (57)$$

Występujące w równaniach (54) i (55) liczby zespolone α , β , γ i δ tworzą macierz unitarną U transformacji

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Wyznacznik tej macierzy

$$\det(U) = \alpha\delta - \beta\gamma = e^{i\theta}, \quad (57)$$

gdzie θ jest liczbą rzeczywistą.

Występujące w równaniach (54) i (55) liczby zespolone α , β , γ i δ tworzą macierz unitarną U transformacji

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Wyznacznik tej macierzy

$$\det(U) = \alpha\delta - \beta\gamma = e^{i\theta}, \quad (57)$$

gdzie θ jest liczbą rzeczywistą. Ostatnia równość w (57) wynika z unitarności macierzy U .

Znajdujemy rozkład stanu singletowego (49) w bazie $\{|a\rangle, |b\rangle\}$

Znajdujemy rozkład stanu singletowego (49) w bazie $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ i otrzymujemy

$$|\psi_S\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = (\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{|ab\rangle - |ba\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (58)$$

Znajdujemy rozkład stanu singletowego (49) w bazie $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ i otrzymujemy

$$|\psi_S\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = (\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{|ab\rangle - |ba\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (58)$$

W równaniu (58) wyrażenie w nawiasie jest wyznacznikiem macierzy U , czyli jest równe $e^{i\theta}$, który jest globalnym czynnikiem fazowym.

Znajdujemy rozkład stanu singletowego (49) w bazie $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ i otrzymujemy

$$|\psi_S\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = (\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{|ab\rangle - |ba\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (58)$$

W równaniu (58) wyrażenie w nawiasie jest wyznacznikiem macierzy U , czyli jest równe $e^{i\theta}$, który jest globalnym czynnikiem fazowym.

Ze względu na dowolność fazy globalnej możemy położyć $\theta = 0$, co daje równość

$$\frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|ab\rangle - |ba\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (59)$$

Z równości (59) wynika, że jeżeli wykonamy pomiar wartości własnych operatora $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ na obu elektronach, to otrzymanie wyniku $+1$ (-1) dla pierwszego elektronu implikuje wynik -1 ($+1$) dla drugiego elektronu.

Z równości (59) wynika, że jeżeli wykonamy pomiar wartości własnych operatora $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ na obu elektronach, to otrzymanie wyniku $+1$ (-1) dla pierwszego elektronu implikuje wynik -1 ($+1$) dla drugiego elektronu.

A zatem paradoks EPR wynika z podstawowych praw mechaniki kwantowej.

Z równości (59) wynika, że jeżeli wykonamy pomiar wartości własnych operatora $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ na obu elektronach, to otrzymanie wyniku $+1$ (-1) dla pierwszego elektronu implikuje wynik -1 ($+1$) dla drugiego elektronu.

A zatem paradoks EPR wynika z podstawowych praw mechaniki kwantowej.

Jest to zjawisko interesujące, a nawet intrygujące, dające się jednak wyjaśnić bez popadania w sprzeczność z prawami mechaniki kwantowej.

Fizyczna natura zjawiska EPR polega na **silnej korelacji**, która występuje dla układu kwantowego w stanie splątanym.