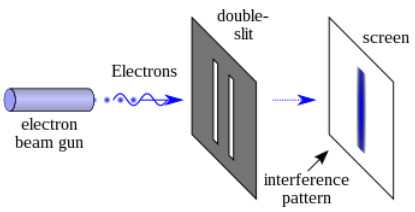
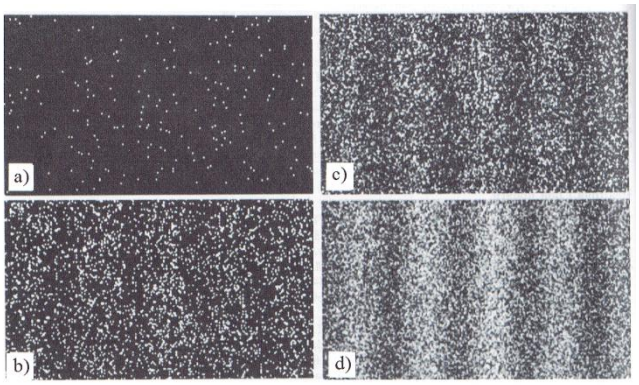
Fizyka współczesna – Zestaw 5 *





Rys. 38.9. Zdjęcia pokazujące powstawanie obrazu interferencyjnego wywołanego wiązką elektronów w doświadczeniu z dwiema szczelinami przedstawionym na rysunku 38.6. Fale materii, tak jak fale światła, są *falami prawdopodobieństwa*. Przybliżone liczby elektronów wynoszą: (a) 100, (b) 3000, (c) 20 000 i (d) 70 000 (Przedrukowano za zgodą z Tonomura A., Endo J., Matsuda T., Kawasaki T.: Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern, *American Journal of Physics* 57 (2), 1989, s. 117–120. Copyright © 1989, American Association of Physics Teachers)

Pojedyncze elektrony padają na przegrodę z dwiema szczelinami i po przejściu są rejestrowane na ekranie. Fala materii jednego elektronu interferuje sama ze sobą. Jednak elektrony są rejestrowane jako punkty w losowych miejscach na ekranie. Oraz interferencyjny widać dopiero gdy wiele elektronów przejdzie przez szczeliny. Określenie gdzie pojawi się dany elektron jest niemożliwe, ale można obliczyć prawdopodobieństwo. Probabilistyczna natura mechaniki kwantowej jest fundamentalna.

Wprowadza się równanie Schrödingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x,t)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t},$$

gdzie $\Psi(x,t)$ jest funkcją falową, a V(x,t) potencjałem. W ogólności $\Psi(x,t)$ jest zespolona i zawiera wszystkie informacje o układzie. Jeżeli potencjał nie zależy od czasu to można zapisać równanie Schrödingera niezależne od czasu

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x),$$

$$\Psi(x,t)=e^{-iEt/\hbar}\psi(x).$$

Funkcja falowa nie ma bezpośredniej interpretacji fizycznej, ale kwadrat modułu określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki

$$P(x)=|\psi(x)|^2=\psi^*(x)\psi(x).$$

Funkcja falowa musi być ciągła (wraz z pochodną) i skończona (normowalna). Normowanie funkcji falowej definiuje się tym, że cząstka musi gdzieś być w przestrzeni

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\psi(x)=1.$$

1. Rozwiąż równanie Schrödingera dla cząstki swobodnej (V(x)=0).

2. Rozwiąż równanie Schrödingera dla cząstki uwięzionej w nieskończonej studni potencjału o szerokości L

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & dla\ x < 0, x > L \\ 0, & dla\ pozostałych \end{cases}$$

Przyjmując że cząstka znajduje się w stanie podstawowym, oblicz prawdopodobieństwo znalezienia jej w obszarze [0; L/3] oraz w [L/3; 2L/3].

3. Rozwiąż równanie Schrödingera dla cząstki o energii $E>V_0$ padającej na próg potencjału (na lewo od x=0, leci w kierunku dodatnim osi x)

$$V(x) = \begin{cases} 0, & dla\ x < 0 \\ V_0, & dla\ pozostałych \end{cases}$$

Oblicz prawdopodobieństwo transmisji cząstki o energii $E=1{,}2\ V_0$.

4. Zapisz równanie Schrödingera wraz z warunkami brzegowymi dla cząstki o energii $E<V_0$ padającej na barierę potencjału o wysokości V_0 znajdującej się w obszarze [0; L].

W tym przypadku wyrażenie na współczynnik transmisji można przybliżyć jako

$$T \approx e^{-2bL},$$

$$b = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(\mathrm{V_0} - \mathrm{E})}{h^2}}.$$

Oblicz prawdopodobieństwa przetunelowania elektronu o energii 5 eV przez barierę o wysokości 6eV i szerokości 0,7 nm. Analogicznie oblicz prawdopodobieństwo przetunelowania protonu.