

DRGANIA I FALE

Nanoinżynieria materiałów, zestaw nr 4 - szereg Fouriera, fale na strunie.

Wprowadzenie:

If a function of x , $f(x)$, is integrable in $(-\pi, \pi)$ and it is periodic with period 2π outside of this interval *i.e.*,

$$f(x \pm 2k\pi) = f(x), k = 1, 2, 3, \dots,$$

then the periodic function $f(x)$ can be analysed into a series

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad \dots(7.1)$$

The series is called a Fourier series corresponding to $f(x)$, where the Fourier coefficients a_n and b_n are given by

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, n = 0, 1, 2, \dots, \quad \dots(7.2)$$

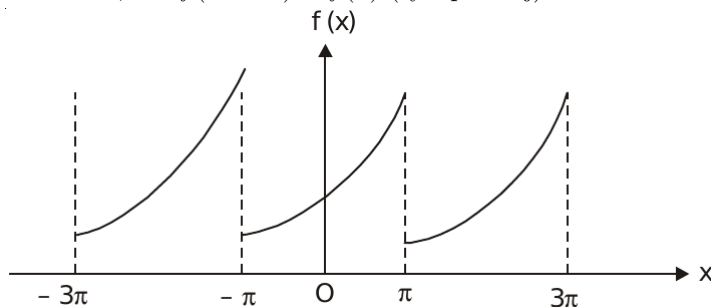
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, n = 1, 2, 3, \dots, \quad \dots(7.3)$$

Należy pamiętać, że w punktach nieciągłości (np. końce przedziału) szereg zbiega się do średniej z granic lewo i prawostronnej.

1. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję:

$$f(x) = e^x, -\pi < x < \pi \quad (1)$$

o okresie 2π , tzn $f(x + 2\pi) = f(x)$ (rys. poniżej).



Przy pomocy rozwinięcia obliczyć

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + m^2}. \quad (2)$$

2. Idealna struna o długości $2L$ i gęstości liniowej ρ jest zamocowana w punktach $-L$ i L oraz jest napięta siłą T . Znaleźć ogólną postać możliwych drgań struny przy zadanych warunkach początkowych na wychylenie $h(x)$ oraz prędkość początkową $V_0(x)$ w postaci szeregu Fouriera. Jak parzystość funkcji h i V_0 wpływa na szereg?
3. Strunę z zadania poprzedniego w $t = 0$ odkształcono w trójkąt równoramienny o wysokości H i puszczone swobodnie. Podać kształt struny w funkcji czasu. Narysować szereg (gnuplot/wolfram/....) i wykonać animację drgań.