Wstęp do fizyki kwantowej

Zestaw 7

Zadania 1-3 zostaną tylko pokrótce omówione.

1. Obliczyć komutatory: $[L_x, x]$, $[L_x, y]$, $[L_x, p_x]$, $[L_x, p_y]$, $[L_x, L_y]$.

2. Znaleźć postać operatorów L_z i L^2 we współrzędnych sferycznych. Obliczyć komutator L_z i L^2.

3. Rozwiązać równanie własne dla operatora L_z.

4. Zapisać równanie własne dla L^2:
$$\hat{L}^2 Y(\theta, \varphi) = \lambda^2 Y(\theta, \varphi) \tag{1}$$
Rozwiązanie ogólne równania własnego wymaga znajomości funkcji specjalnych, zwanych *harmonikami sferycznymi* $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Obrazki harmonik sferycznych można łatwo znaleźć w internecie (np wolfram mathworld). Znając rozwiązanie równania własnego dla L_z oraz wiedząc, że L_z i L^2 komutują, można zapostulować, że $Y(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} P(\theta)$, gdzie P jest nieznaną funkcją. Przy pomocy takiego podstawienia uprościć równanie własne. Po pozbyciu się zmiennej φ wykonać zmianę zmiennych przez podstawienie $x = \cos(\theta)$. Jak wykazano na wykłądzie uzyskacie równanie w postaci:
$$(1 - x^2)\frac{d^2 P(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP(x)}{dx} + \left[\frac{\lambda^2}{\hbar^2} - \frac{m^2}{1 - x^2}\right] P(x) = 0. \tag{2}$$

5. Zajmiemy się najpierw równaniem (2) dla $m = 0$, czyli dla stanów o $l_z = 0$. Współczynnikami równania są wielomiany o potęgach równych rzędowi pochodnej, więc można się spodziewać, że rozwiązaniami również będą wielomiany. Rozwiązać równanie przy użyciu wielomianów próbnych $P_0 = const, P_1 = ax + b, P_2 = ax^2 + bx + c$. Jak można powiązać uzyskaną wartość własną λ^2 ze stopniem wielomianu?

6. Przypadek ogólny: równanie (2) porównać z równaniem na *stowarzyszone wielomiany Legendre'a* $P_l^m(x)$ (kartki z funkcjami specjalnymi, wzór B-25). Dla jakich wartości własnych λ^2 funkcja P będzie wielomianem Legendre'a? Wypisać wielomiany i wielomiany stowarzyszone o wskaźniku $l = 0, 1, 2$.

7. Wracając teraz do fizyki i oryginalnych zmiennych ($x = \cos\theta$): funkcje własne L^2, czyli harmoniki sferyczne, będą miały postać $Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$. Wiedząc, że $Y_0^0 = const$ oraz $Y_1^0 = C * \cos(\theta)$ znaleźć postać unormowaną tych funkcji (uwaga na jakobian w całkowaniu!). Wykazać bezpośrednim rachunkiem że funkcje $Y_0^0 = const$, $Y_1^0 = C * \cos(\theta)$, $Y_1^{\pm 1} = C * \sin(\theta)e^{\pm i\varphi}$ są rozwiązaniem równania własnego zarówno dla L^2, jak i dla L_z.

8. Obliczyć wartość średnią L_z^2 w stanie opisywanym funkcją falową
$$\Psi(x) = C \sin^2 \varphi \tag{3}$$
gdzie $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

9. *Brojan, §1.3 zad 11* Znaleźć poziomy energetyczne i unormowane funkcje falowe cząstki o masie m poruszającej się z zerowym momentem pędu w nieskończonej sferycznej studni potencjału:
$$V(r) = \begin{cases} 0, & r \leqslant R \\ \infty, & r > R \end{cases} \tag{4}$$
Wskazówki: z trójwymiarowego równania Schrödingera po separacji zmiennych i uwzględnieniu że $L^2 = 0$ uzyskać równanie radialne. W równaniu radialnym podstawić $\psi(r) = u(r)/r$, przeprowadza to równanie radialne do równania oscylatora. Podstawienie narzuca dodatkowy warunek $u(0) = 0$.

10. Zapisać hamiltonian cząstki znajdującej się w potencjale sferycznie symetrycznym $V = V(r)$. Udowodnić, że w stanie własnym energia, L_z i L^2 mogą być jednocześnie określone dla tej cząstki.