

Zestaw 1 (przypomnienie z matematyki)

1. Dana jest macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

znaleźć jej wartości własne, wektory własne, obliczyć ich iloczyn skalarny. Unormować wektory własne macierzy.

2. Dana jest macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

znaleźć jej wartości własne, wektory własne, obliczyć ich iloczyn skalarny.

3. Która z macierzy z zadań powyżej jest macierzą hermitowską? Jakie własności mają macierze hermitowskie? Podobne do powyższych własności mają również różniczkowe operatory hermitowskie, ich funkcje własne i wartości własne. W szczególności, każdą "przyzwoitą" funkcję da się rozwinąć w szereg funkcji własnych operatora hermitowskiego, bo te funkcje tworzą układ zupełny (bazę w przestrzeni funkcji). Będziemy z tego korzystać w przyszłości.

4. Rozwinąć wektor $|x\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ w bazie zbudowanej z unormowanych wektorów własnych macierzy z zadania 1 (znaleźć ogólny wzór na współczynniki rozwinięcia).

Uwaga: Stany kwantowe i notacja Diraca. Możliwe stany kwantowe układu fizycznego tworzą (abstrakcyjną) przestrzeń Hilberta, która jest przestrzenią wektorową ze zdefiniowanym iloczynem skalarnym (czyli potrafimy mierzyć w niej długość). Bardzo wygodną formą do przeprowadzania ogólnych obliczeń w przestrzeni Hilberta jest tzw. notacja Diraca. Abstrakcyjny stan ' α ' cząstki kwantowej (np. stan podstawowy elektronu w atomie wodoru) reprezentuje tzw. wektor stanu 'ket' $|\alpha\rangle$. Wektor sprzężony po hermitowsku do $|\alpha\rangle$ to wektor 'bra' $\langle\alpha| = \langle\alpha|^\dagger$. Normą wektora jest pierwiastek z iloczynu skalarnego $\langle\alpha|\alpha\rangle$. Stan nazywamy unormowanym, jeśli $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ (w analogii do unormowanych wektorów). Notacja Diraca jest ogólna i pozwala opisać wektory czy funkcje, dlatego dzięki niej można wyprowadzać wyrażenia bez wchodzenia w szczegóły reprezentacji.

5. Unormować funkcję $f(x) = A \sin(nx)$ w przedziale $(0, \pi)$, $n \in N$ (tzn. znaleźć takie A aby $\langle f|f \rangle = 1$, iloczynem skalarnym jest całka na przedziale zmienności). Wykazać, że zbiór funkcji f tworzy ortonormalny układ funkcji na tym przedziale. Unormować i rozwinąć funkcję $g(x) = Bx$ w bazie funkcji $f(x)$ (wzór na współczynniki rozwinięcia formalnie ma taką samą postać jak w zadaniu dla wektorów).
6. Delta Diraca $\delta(x)$. Funkcją (a właściwie *dystrybucją*) $\delta(x)$ nazywamy funkcję o własności:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (3)$$

gdzie $f(x)$ jest dowolną funkcją ciągłą w $x = 0$. Ponadto, $\delta(x) \rightarrow \infty$ dla $x = 0$ oraz $\delta(x) = 0$ dla $x \neq 0$. Delta Diraca jest odpowiednikiem delty Kroneckera dla zmiennej ciągłej. Jest wiele reprezentacji $\delta(x)$, np. funkcja Gaussa lub Lorentza przy odchyleniu standardowym / szerokości połówkowej dążącej do zera. Tutaj skorzystamy z reprezentacji:

$$\delta(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin Lx}{\pi x}. \quad (4)$$

Wykazać, że tak zadana $\delta(x)$ spełnia warunek (3). Przy pomocy $\delta(x)$ wykazać ortogonalność funkcji $\psi_k(x) = Ae^{ikx}$ dla różnych k , w przedziale $x \in (-\infty, \infty)$, tzn. udowodnić, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-ikx} Ae^{ik'x} dx = \text{const} * \delta(k - k'). \quad (5)$$

Unormować funkcję $\psi_k(x)$ (tzn. znaleźć takie A , aby w powyższym równaniu $\text{const} = 1$).