Wstęp do fizyki kwantowej

Zestaw 6

1. Cząstka o masie m znajduje się w polu siły harmonicznej $F = -kx$, czyli cząstka ma energię potencjalną $U = k\frac{x^2}{2} = m\omega^2\frac{x^2}{2}$, gdzie $k/m = \omega^2$ (jak w klasycznym oscylatorze). Zapisać równanie Schrödingera dla cząstki, wprowadzić jednostki zredukowane: długości $a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ i energii $\epsilon = \frac{\hbar\omega}{2}$, przeprowadzić równanie do postaci zredukowanej:
$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + x^2\psi = E\psi \tag{1}$$

2. W równaniu (1) podstawić funkcję $\psi(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})u(x)$ i uzyskać równanie:
$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + (E-1)u = 0. \tag{2}$$
Porównać uzyskane równanie z równaniem na wielomiany Hermite'a (wykaz funkcji specjalnych do pobrania ze strony wykładowcy, wzór B-19). Nasze równanie ma skończone rozwiązania, mające postać wielomianów Hermite'a $u(x) = H_n(x)$ gdy
$$E - 1 = 2n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$
Stąd dostajemy wartości własne energii (w jednostkach zredukowanych):$E = 2n + 1$, co po przejściu do jednostek fizycznych daje
$$E = (2n+1)\frac{\hbar\omega}{2} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega. \tag{4}$$
W stanie podstawowym ($n = 0$) energia wynosi $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (tzw. energia drgań zerowych). Ponieważ zerowy wielomian Hermite'a $H_0 = 1$, to nieunormowana funkcja stanu podstawowego jest funkcją Gaussowską:
$$\psi_0(x) = C\exp(-\frac{x^2}{2}) \tag{5}$$
Sprawdzić, że równanie ma również następujące rozwiązania:
$$\psi_1(x) = Cx\exp(-\frac{x^2}{2}) \tag{6}$$
$$\psi_2(x) = C(2x^2 - 1)\exp(-\frac{x^2}{2}) \tag{7}$$
$$\psi_3(x) = C(2x^3 - 3x)\exp(-\frac{x^2}{2}) \tag{8}$$
i na tej podstawie podać energie stanów 1-3, sprawdzić zgodność ze wzorem ogólnym.

3. Unormować $\psi_0(x)$ i $\psi_1(x)$. Sprawdzić, że $\psi_0(x)$ i $\psi_1(x)$ są ortogonalne.

4. Cząstka znajduje się w stanie podstawowym w potencjale oscylatora harmonicznego. Funkcja falowa w jednostkach fizycznych ma postać:
$$\psi(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{9}$$
znaleźć wartość średnią położenia i pędu, kwadratu położenia i kwadratu pędu (całki - patrz poniżej). Sprawdzić relację nieoznaczoności.

5. Dla funkcji (9): znaleźć gęstość prawdopodobieństwa otrzymania w wyniku pomiaru pędu wartości p. *Przypominam że w tym celu należy 'wyrzutować' funkcję falową na funkcje własne operatora pędu* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ikx)$*:*
$$\psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\exp(-ikx) \tag{10}$$
czyli przeprowadzić funkcję do przestrzeni pędu. Matematycznie, jak widać powyżej, jest to równoważne z wykonaniem transformaty Fouriera funkcji. Kwadrat tej transformaty to gęstość prawdopodobieństwa że cząstka ma pęd $\hbar k$*, czyli to czego poszukujemy.*

6. Korzystając z wyników poprzedniego punktu zapisać funkcję $\psi(x)$ jako superpozycję funkcji własnych operatora pędu, $\psi(x) = \int dk(...)\exp(ikx)$.

Całki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ax^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-ax^2\right) = 1/2\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \tag{12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\exp(\pm ikx) = \sigma\sqrt{2\pi}\exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \tag{13}$$