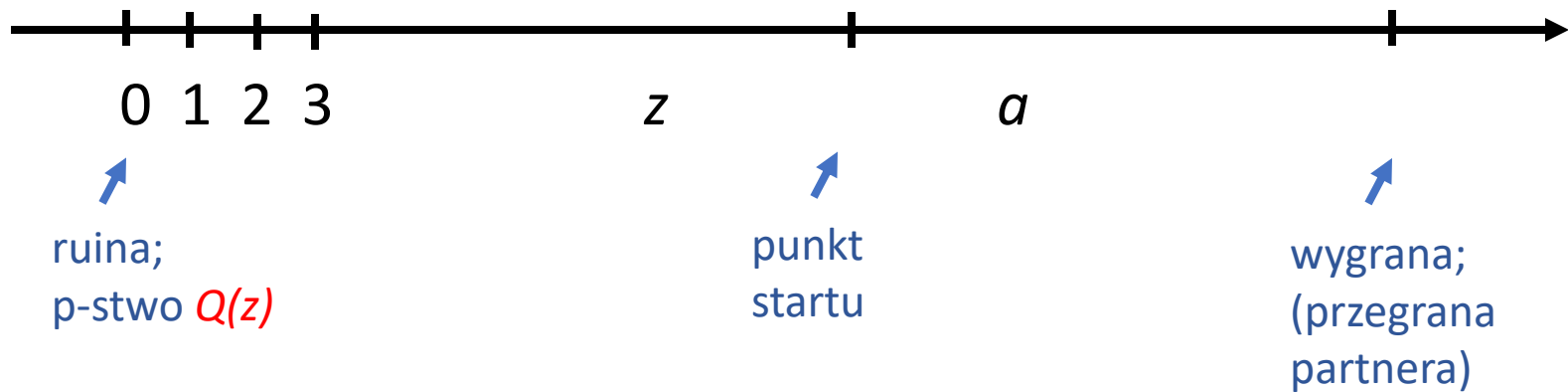
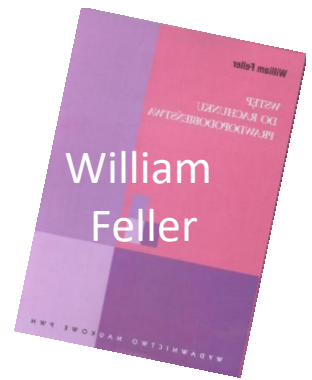


Zastosowanie

- p-stwo $Q(z)$ ruiny gracza



p p-stwo wygrania 1; ruch w prawo

$q=1-p$ p-stwo przegrania 1; ruch w lewo

Warunki brzegowe: $Q(a)=0$, $Q(0)=1$

$$Q(z) = pQ(z+1) + qQ(z-1)$$

$$Q(z) = pQ(z+1) + qQ(z-1)$$

$$Z: p \neq q$$

Rozw. szczególne: $Q(z)=1$, bo wtedy $1 = p + q$

inne rozw. szczególne: $Q(z) = (q/p)^z$; wtedy

$$\left(\frac{q}{p}\right)^z = p\left(\frac{q}{p}\right)^{z+1} + q\left(\frac{q}{p}\right)^{z-1} = p\frac{q}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^z + q\frac{p}{q}\left(\frac{q}{p}\right)^z = (q+p)\left(\frac{q}{p}\right)^z$$

Rozw. ogólne: $Q(z) = A + B(q/p)^z$; wtedy z war. brzegowych

$$Q(a) = A + B(q/p)^a = 0$$

$$Q(0) = A + B = 1$$

Obliczając A, B i podstawiając, mamy

$$Q(z) = \frac{(q/p)^a - (q/p)^z}{(q/p)^a - 1}$$

$$Q(z) = \frac{(q/p)^a - (q/p)^z}{(q/p)^a - 1}$$

Dwukrotnie mniejsze stawki: $z \rightarrow 2z$, $a \rightarrow 2a$. Oznaczmy $q/p=x$

$$Q(2z) = \frac{x^{2a} - x^{2z}}{x^{2a} - 1} = \frac{x^a - x^z}{x^a - 1} \frac{x^a + x^z}{x^a + 1} = Q(z) \frac{x^a + x^z}{x^a + 1}$$

Gdy $q > p$, to Q rośnie; gdy $q < p$, Q maleje.

Gra z nieskończenie bogatym przeciwnikiem: $a \rightarrow \infty$

$$q > p : \quad \lim_{a \rightarrow \infty} Q(z) = 1$$

$$q < p : \quad \lim_{a \rightarrow \infty} Q(z) = (q/p)^z$$

$$Q(z) = pQ(z+1) + qQ(z-1)$$

$$Z: p = q = 1/2$$

Wtedy oba rozw. szczególne są równe: $(q/p)^z = 1$

Inne rozw. szczególne: $Q(z)=z$, bo wtedy $z = p(z+1) + q(z-1)$

Rozw. ogólne: $Q(z) = A + Bz$; wtedy z war. brzegowych

$$Q(a) = A + Ba = 0$$

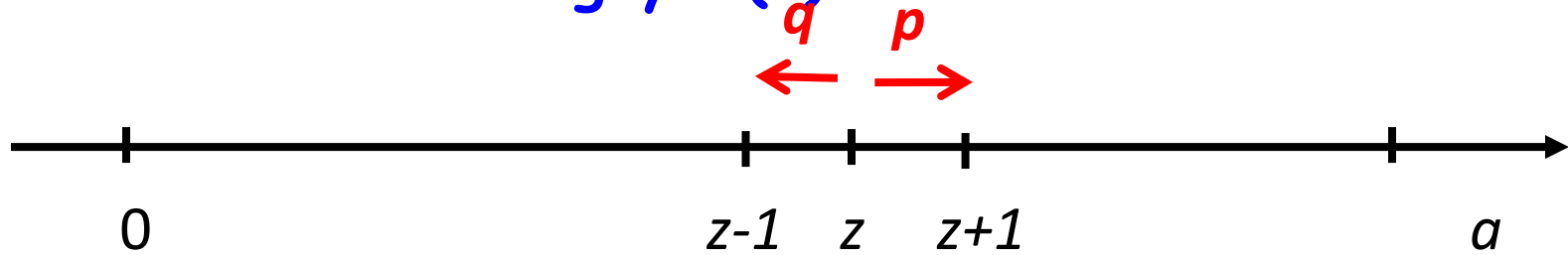
$$Q(0) = A = 1$$

Obliczając A, B i podstawiając, mamy

$$Q(z) = 1 - \frac{z}{a}$$

Grając z nieskończenie bogatym przeciwnikiem, gracz powinien wybrać kwotę a , po wygraniu której przerwie grę.

Średni czas trwania gry $T(z)$



$$T(z) = pT(z+1) + qT(z-1) + 1$$

↑
skok
w prawo

↑
skok
w lewo

↑
czas na
ten skok

czyli $T(z)$ jest wyrażone poprzez $T(z \pm 1)$ po wykonaniu 1 kroku

Przypadek $p=1, q=0$: $T(z) = T(z+1) + 1$

Przypadek $p=0, q=1$: $T(z) = T(z-1) + 1$

War. brzegowe: $T(0)=0, \quad T(a)=0$

$$T(z) = pT(z+1) + qT(z-1) + 1$$

Dla $p \neq q$ rozw. szczególne : $T(z) = \frac{z}{q-p}$; wtedy

$$\frac{z}{q-p} = p \frac{z+1}{q-p} + q \frac{z-1}{q-p} + \frac{q-p}{q-p}$$

Dla różnicy dwóch szczególnych rozwiązań $\Delta T(z)$ równanie ma postać

$$\Delta T(z) = p\Delta T(z+1) + q\Delta T(z-1)$$

Znamy rozwiązanie dla ΔT : $\Delta T(z) = A + B \left(\frac{q}{p} \right)^z$

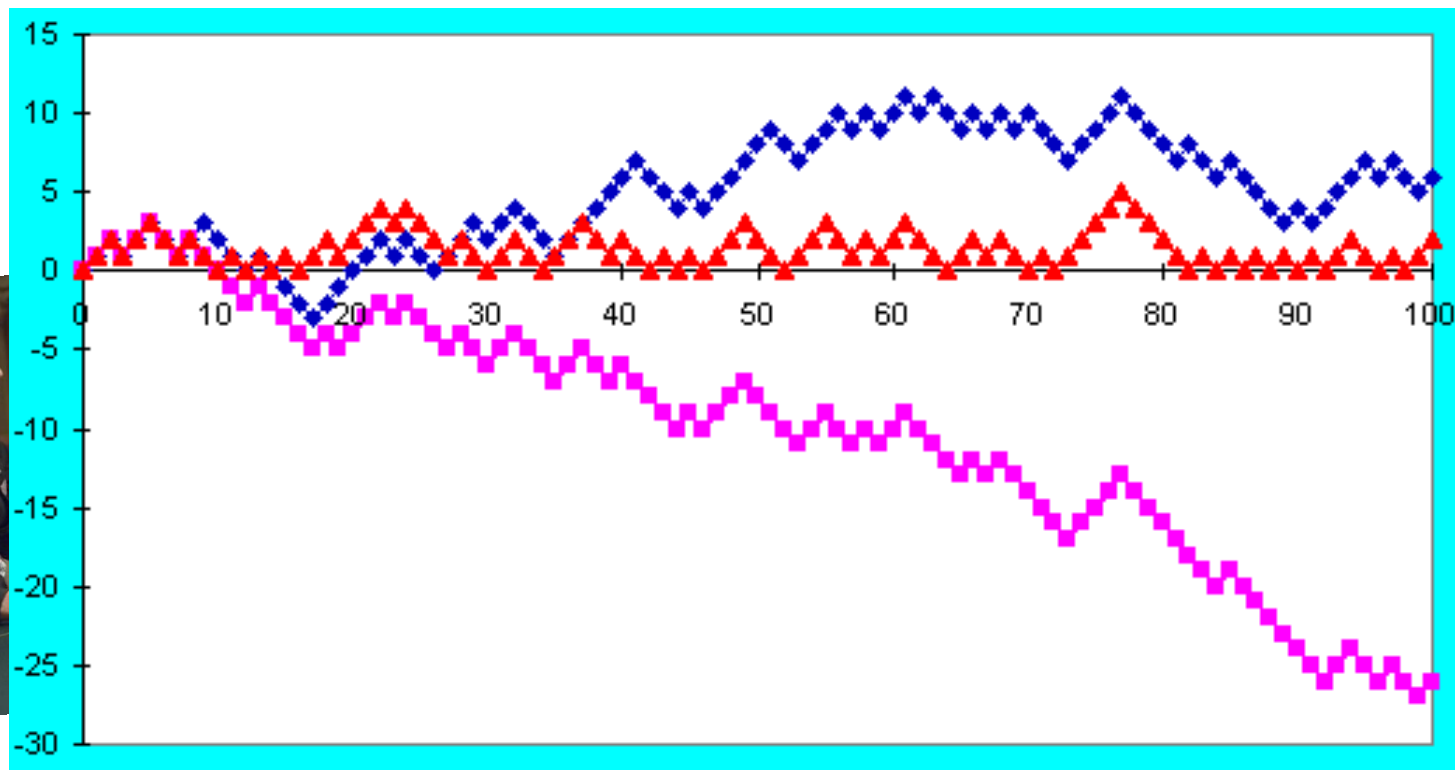
gdzie A, B - z warunków brzegowych.

Dla $p \neq q$

$$T(z) = \frac{z}{q-p} - \frac{a}{q-p} \times \frac{1-(q/p)^z}{1-(q/p)^a}$$

$$q > p : \lim_{a \rightarrow \infty} T(z) = \frac{z}{q-p}$$

$$q < p : \lim_{a \rightarrow \infty} T(z) = \infty$$



$$T(z) = pT(z+1) + qT(z-1) + 1$$

Dla $p = q$

rozw. szczególne $T(z) = -z^2$

$$-z^2 = -\frac{1}{2}(z+1)^2 - \frac{1}{2}(z-1)^2 + 1$$

Rozw. ogólne: $T(z) = -z^2 + A + Bz$, co daje

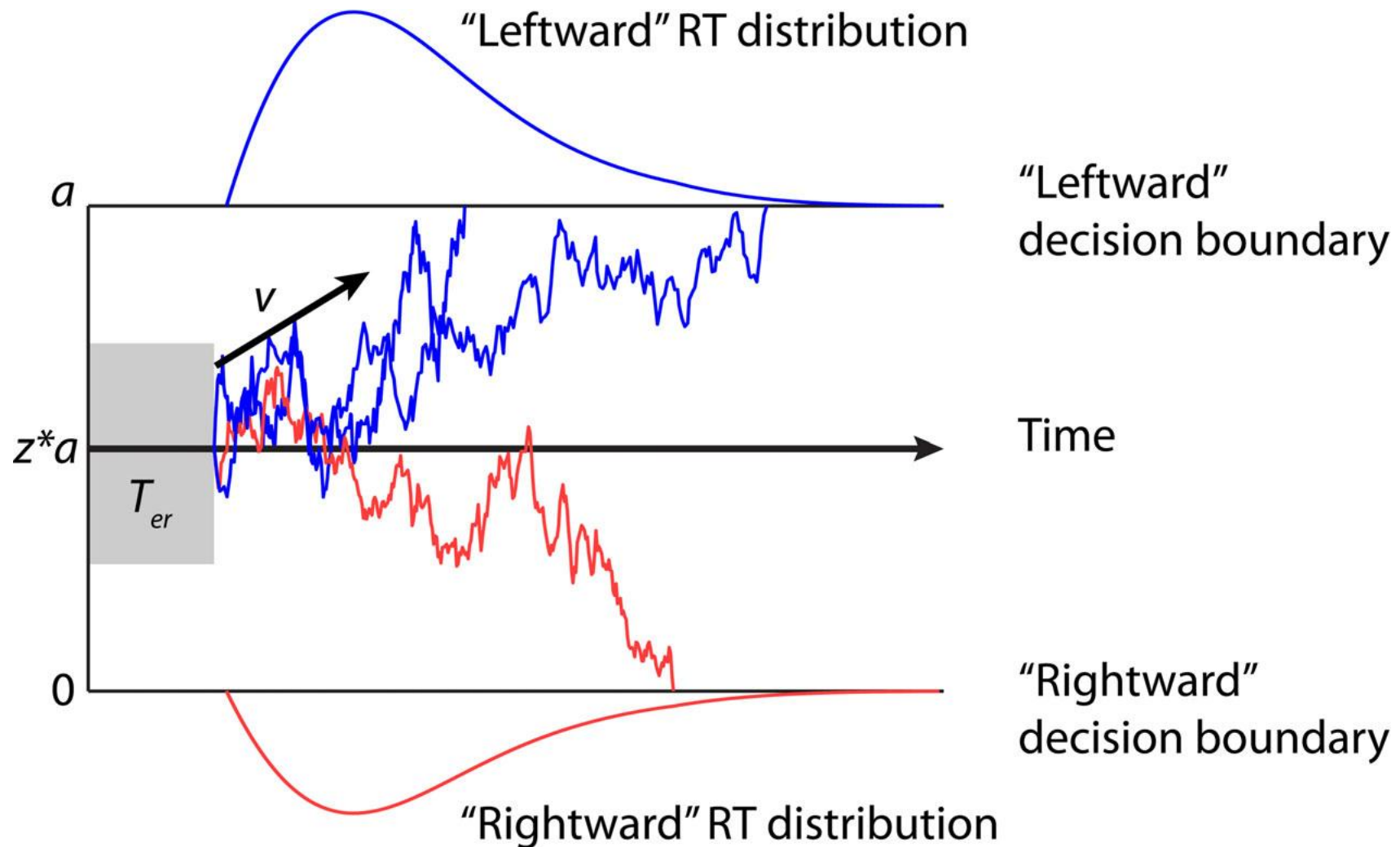
$$T(z) = z(a - z)$$

n -krotnie mniejsze stawki $\rightarrow n^2$ -krotne wydłużenie $T(z)$

Nieskończenie bogaty przeciwnik: $\lim_{a \rightarrow \infty} T(z) = \infty$

$T(z)$ jest również średnim czasem oczekiwania, aż bogaty przeciwnik się odegra, lub wygra dowolną kwotę.

Two-alternative forced choice



[Zhang+Rowe, *Frontiers in Neuroscience* 8(8):69 · April 2014]