Transformata Laplace'a

wg. G. Arfkena
Mathematical Methods for Physicists

krótkie vademecum

Definicja

(1) $$f(s) \equiv \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt,$$

albo, nieco bardziej formalnie

(2) $$f(s) \equiv \mathcal{L}\{F(t)\} = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st} F(t)\,dt.$$

Co ciekawe, sama funkcja $F(t)$ nie musi być całkowalna, tzn. nie musi istnieć

$$\int_0^\infty F(t)\,dt.$$

Musi jednak zachodzić ograniczenie typu

(3) $$\left| e^{-s_0 t} F(t) \right| \leqslant M,$$

dla odpowiednio dużych wartości zmiennej t i dla pewnej ustalonej wartości s_0 (ta ostatnia wartość może mieć znaczenie w procesach znajdywania transformaty odwrotnej – ale o tym będziemy mówić o wiele później).

Podstawowe własności

Zmienna t naszej funkcji F bardzo często jest *rzeczywiście* zmienną czasową i dlatego całkowanie odbywa się właśnie w takich, a nie innych granicach – od $t = 0$ do $t \to \infty$. *Bardzo wygodnie jest* przyjąć, że dla $t < 0$ funkcja $F(t) = 0$ – ta prosta konwencja ułatwia czasem pewne wyprowadzenia.
Zauważmy, że transformata Laplace'a jest (jak każda transformata całkowa) operacją liniową, tzn.

$$\mathcal{L}[\alpha F_1(t) + \beta F_2(t)] = \alpha \mathcal{L}[F_1(t)] + \beta \mathcal{L}[F_2(t)]. \tag{4}$$

Transformata funkcji potęgowej t^n to

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-st} (st)^n \, d(st) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \tag{5}$$

Podkreślmy, że n *musi* być większe od -1 – dla *mniejszych* wartości n całka (5) jest rozbieżna i transformata nie istnieje.

Proste transformaty

Być może najważniejszą, obok transformaty z funkcji t^n; $\quad n > -1$ transformatą L jest transformata

$$(6) \qquad \mathcal{L}\left[e^{kt}\right] = \int_0^\infty e^{-st} e^{kt}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-k)t}\, dt = \frac{1}{s-k}, \quad s > k.$$

(ostatni warunek to konsekwencja ograniczenia (3)). Potocznie mówimy o „efekcie przesunięcia" – zmienna s zostaje przesunięta o k. Korzystając z (6) łatwo wyprowadzimy

$$(7) \quad \mathcal{L}[\cosh kt] = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{kt} + e^{-kt}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k}\right] = \frac{s}{s^2-k^2},$$

$$(8) \quad \mathcal{L}[\sinh kt] = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{kt} - e^{-kt}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right] = \frac{k}{s^2-k^2},$$

dla $\quad s > k$.

Proste transformaty, c.d

Mając transformaty funkcji hiperbolicznych i korzystając z relacji

$$\begin{aligned} \cos kt &= \cosh ikt, \\ \sin kt &= -i \sinh ikt \end{aligned}$$

otrzymamy bez trudu transformaty funkcji trygonometrycznych

$$\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2}, \tag{9}$$

$$\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2}, \tag{10}$$

(poprawne dla $s > 0$.)

Transformata odwrotna – jak ją obliczamy?

Prawda jest dość przykra – obliczenie „formalne” transformaty, to tzw. całka Bromwicha, którą liczymy na płaszczyźnie zespolonej $\mathcal{C}_s$, wykorzystując rachunek residuów. Przykłady takich rachunków (uwypuklających np. role lematu Jordana) można znaleźć (odpowiedni link na stronie A.L) w „Rozwiązanych problemach” (autorzy Lenda i Spisak).
Rachunki często nie są banalne – wynika to z zamieszczonych tam właśnie przykładów.
Niemniej jednak, na podstawie znajomości kilku „podstawowych” transformat można pokusić się o znalezienie transformaty odwrotnej, jeżeli funkcja $f(s)$ ma postać ilorazu dwóch wielomianów (wyrażeń algebraicznych), z tym że stopień mianownika jest wyższy od stopnia licznika. Stosujemy tu *technikę rozkładu na ułamki proste*.

Transformata odwrotna – prosty przykład

Na przykład dla

$$f(s) = \frac{k^2}{s(s^2+k^2)} \equiv \frac{c}{s} + \frac{as+b}{s^2+k^2}$$

albo

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)} = \frac{c(s^2+k^2)+s(as+b)}{s(s^2+k^2)}$$

i porównując współczynniki potęg zmiennej s w licznikach ułamków po lewej i prawej stronie równania mamy
$a=-1, \quad b=0, \quad c=1$ i konsekwentnie

$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2}.$$

Pierwszy wyraz to $\mathcal{L}[1]$; drugi – to transformata kosinusa kt.
Tak więc

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+k^2}\right] = 1 - \cos kt.$$

Transformata pochodnych

Podstawowe zastosowanie transformaty Laplace'a to rozwiązywanie zwykłych równań różniczkowych, poprzez przekształcanie ich w równania algebraiczne. W dodatku, warunki brzegowe (początkowe) są „automatycznie" uwzględniane w procesie rozwiązywania. Wynika to z własności transformaty Laplace'a, zastosowanej do *pochodnych*, takich jak $\dfrac{dF}{dt}$ lub $\dfrac{d^2F}{dt^2}$ (wyższe pochodne rzadko nam są potrzebne).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dF}{dt}\right] &= \int_0^\infty e^{-st}\left[\frac{dF}{dt}\right] dt \\ &= e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = s\mathcal{L}[F(t)] - F(0). \qquad (11) \end{aligned}$$

Transformata pochodnych, c.d.

Analogiczne rachunki prowadzą do
(12)
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2F}{dt^2}\right] = \int_0^\infty e^{-st}\left[\frac{d^2F}{dt^2}\right]dt = \ldots = s^2\mathcal{L}[F(t)] - sF(0) - F'(0),$$

a także
(13)
$$\mathcal{L}\left[F^{(n)}(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st}\left[F^{(n)}(t)\right] = s^n\mathcal{L}[F(t)] - s^{n-1}F(0) - \ldots - F^{(n-1)}(0).$$

Dodajmy $F(0) = F(0+)$ (i podobnie dla pochodnych). Warunki „początkowe" rzeczywiście „wchodzą" do równań dla funkcji $f(s)$!

Transformata pochodnych, c.d.; przykłady

Prosty przykład; mamy

$$-k^2 \sin kt = \frac{d^2 \sin kt}{dt^2}.$$

Biorąc stronami $\mathcal{L}$ i stosując (12) dostajemy

$$-k^2 \mathcal{L}[\sin kt] = s^2 \mathcal{L}[\sin kt] - s \sin(0) - \left.\frac{d \sin kt}{dt}\right|_{t=0},$$

a stąd – ponownie – wzór (10)

$$\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2}.$$

Transformata pochodnych, c.d.; przykłady

Standardowym przykładem zastosowania transformaty Laplace'a może być równanie oscylatora (r. r. o stałych współczynnikach!)

$$m \, \frac{d^2 X(t)}{dt^2} = -kX(t),$$

poddane warunkom – na przykład – $X(0) = X_0$ i $X'(0) = 0$. Mamy [korzystamy z (13)]

$$m\mathcal{L}\left[\frac{d^2 X(t)}{dt^2}\right] + k\mathcal{L}[X(t)] = ms^2 - msX_0 + kx(s) = 0.$$

Po uporządkowaniu

$$x(s) = X_0 \frac{s}{s^2 + k/m} \equiv \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Oczywiście

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[x(s)] = X_0 \cos \omega_0 t.$$

Transformata pochodnych; przykłady c.d.

Zauważmy, że ta prosta technika może być zastosowana do rozwiązania równania Newtona opisującego przejście – w chwili $t = 0$ – ze stanu spoczynku $[X(0) = 0; \quad X'(0) = 0]$ w ruch jednostajny, pod wpływem „punktowego” w czasie przekazu pędu P. Równanie zapiszemy

$$m\mathcal{L}\left[\frac{d^2X(t)}{dt^2}\right] = P\delta(t). \tag{14}$$

Stosujemy transformatę do obu stron; transformata z delty dirakowskiej

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-t_0)\right] = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-t_0)\,dt = e^{-st_0}, \quad t_0 \geqslant 0.$$

Dokładniejsza analiza pozwala przyjąć

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t)\, dt = 1.$$

(można to wykazać, używając różnych „reprezentacji”całkowych własności delty i jeszcze raz korzystając z faktu, że po lewej stronie punktu $t = 0$ „niczego nie ma”.)
Dlatego równanie (14) przekształca się w

$$x(s) = \frac{P}{m}\frac{1}{s^2} \quad \rightarrow \quad X(t) = \frac{P}{m}t,$$

zgodnie z oczekiwaniami. P/m to oczywiście prędkość w ruchu (jednostajnym) ciała. Zauważ, że delta dirakowska *posiada wymiar*:

$$[\delta(t)] = \frac{1}{\mathrm{T}}.$$

Transformata pochodnych; Oscylator tłumiony

Rozpatrujemy równanie oscylatora *tłumionego*, z siłą oporu proporcjonalną do prędkości: $\boldsymbol{F}_{op} = -b\boldsymbol{v}$:

$$m\,\frac{d^2X(t)}{dt^2} + b\,\frac{dX(t)}{dt} + kX(t) = 0,$$

poddane warunkom $X(0) = X_0$ i $X'(0) = 0$. Po transformacie

$$m\left[s^2x(s) - sX_0\right] + b\left[sx(s) - X_0\right] + kx(s) = 0.$$

To proste równanie (algebraiczne) rozwiązujemy ze względu na $x(s)$:

$$x(s) = X_0\frac{ms+b}{ms^2+bs+k} = X_0\frac{ms+b}{m(s^2+\frac{b}{m}s+k/m)}.$$

Mianownik otrzymanego ułamka dopełniamy do kwadratu dwumianu

$$s^2 + \frac{b}{m}s + k/m = \left(s+\frac{b}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right) \equiv \left(s+\frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_1^2.$$

(Jeżeli tłumienie jest niewielkie – $b^2 < 4km$ – to drugi wyraz jest dodatni – oznaczamy go przez ω_1^2.) Mamy więc

Transformata pochodnych; Oscylator tłumiony, c.d.

$$\begin{aligned} x(s) &= X_0 \frac{ms+b}{m(s^2+\frac{b}{m}s+k/m)} = X_0 \frac{s+b/m}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2} \\ &= X_0 \frac{s+b/2m}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2} + X_0 \frac{b/2m}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2} \\ &= X_0 \frac{s+b/2m}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2} + X_0 \frac{(b/2m\omega_1)\,\omega_1}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2}. \end{aligned}$$

Korzystamy z „ zasady przesunięcia zmiennej s” (6):

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}[e^{at}F(t)]\,dt = \mathcal{L}\left[e^{at}F(t)\right].$$

$$X(t) = X_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\left(\cos\omega_1 t + \frac{b}{2m\omega_1}\sin\omega_1 t\right) = X_0 \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_1 t - \varphi),$$

gdzie $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{2m\omega_1}$, a $\omega_0^2 = k/m$ – częstość oscylatora nietłumionego.

Przesunięcie zmiennej t

Przypuśćmy, że zamiast $f(s)$ mamy funkcję

$$e^{-bs}f(s) = e^{-bs}\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(t+b)}F(t)\,dt, \quad b>0.$$

Ostatnią całkę przekształcamy

$$\int_0^\infty e^{-s(t+b)}F(t)\,dt = \boxed{\begin{array}{rcl} t+b & = & \tau \\ t=0 & \rightarrow & \tau=b \\ t=\infty & \rightarrow & \tau=\infty \end{array}}$$

$$= \int_b^\infty e^{-s\tau}F(\tau-b)\,d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau}F(\tau-b)\,d\tau.$$

Przejście wynika z zerowania się funkcji F dla *ujemnych wartości argumentu.*

tak więc

$$\boxed{e^{-bs}f(s) = \mathcal{L}\left[F(t-b)\right].}$$

Przesunięcie zmiennej t – przykład

Transformaty całkowe to podstawowe narzędzie rozwiązywania równań różniczkowych *o pochodnych cząstkowych*.
Ilustruje to (także) ten przykład.
Rozważamy falę elektromagnetyczną, rozchodzącą się wzdłuż osi x-ów. Każda ze składowych „poprzecznych” wektora elektrycznego $\boldsymbol{E}$, np $E_y \equiv E$ spełnia równanie falowe

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{15}$$

Poddajmy to równanie transformacie L (względem zmiennej t)
(16)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}[E(x,t)] - \frac{s^2}{c^2}\mathcal{L}[E(x,t)] + \frac{s}{c^2}E(x,0) + \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0.$$

Przesunięcie zmiennej t – przykład, c.d.

Jeżeli dla (pewnego) uproszczenia założymy, że w chwili początkowej

$$E(x,0) = \frac{1}{c^2} \left. \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

to równanie (16) przybiera prostą postać

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}[E(x,t)] - \frac{s^2}{c^2}\mathcal{L}[E(x,t)] = 0. \tag{17}$$

a raczej

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}[E(x,t)] - \frac{s^2}{c^2}\mathcal{L}[E(x,t)] = 0, \tag{18}$$

z rozwiązaniem

$$\mathcal{L}[E(x,t)] = C_1 e^{-(s/c)x} + C_2 e^{(s/c)x}. \tag{19}$$

W zależności od tego czy znajdujemy się na dodatniej czy ujemnej osi x-ów wybierzemy odpowiedni składnik tej liniowej kombinacji. Np. dla $x > 0$

$$\mathcal{L}[E(x,t)] = C_1 e^{-(s/c)x}. \tag{20}$$

Stałą C_1 obliczymy ze znajomości $E(0,t) \equiv F(t)$. Korzystając z (20) –

$$\mathcal{L}[E(0,t)] = C_1 = \mathcal{L}[F(t)] \equiv f(s)$$

i ostatecznie $\mathcal{L}[E(x,t)] = f(s)e^{-(s/c)x}$, a biorąc transformatę odwrotną dostaniemy – w zależności od relacji zmiennych x i t –

$$E(x,t) = \begin{cases} F\left(t - \frac{x}{c}\right) & t \geqslant \frac{x}{c}, \\ 0 & t < \frac{x}{c}. \end{cases}$$

Dla ujemnej półosi $0x$ analogicznym rozwiązaniem będzie $F\left(t + \frac{x}{c}\right)$.

Różniczkowanie transformaty

Jeżeli, reprezentująca transformatę L funkcji $F(t)$, całka

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,$$

jest jednostajnie zbieżna to nic nie stoi na przeszkodzie aby różniczkować ją względem s pod znakiem całki:

$$\frac{df(s)}{ds} = \int_0^\infty (-t) e^{-st} F(t)\, dt \equiv \mathcal{L}[-tF(t)]. \tag{21}$$

Oczywiście, w taki sam sposób

$$\frac{d^n f(s)}{ds^n} = \int_0^\infty (-t)^n e^{-st} F(t)\, dt \equiv \mathcal{L}\left[(-t)^n F(t)\right]. \tag{22}$$

Znajomość tego typu zależności bywa pomocna w znajdowaniu transformat odwrotnych. Np.:

$$f(s) = \frac{1}{(s-k)^2} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{(s-k)} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[e^{kt}\right] = \mathcal{L}\left[te^{kt}\right].$$

Różniczkowanie transformaty – równanie Bessela

Nasze ulubione równanie – o wskaźniku 0

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0$$

dzielimy przez x i zamieniamy $y(x) \to F(t)$. Daje to

$$tF''(t) + F'(t) + tF(t) = 0.$$

Korzystając z (21), a także z wzorów na transf. pochodnych

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2f(s) - sF(0)\right] + sf(s) - F(0) - \frac{d}{ds}f(s) = 0.$$

Korzystamy z $\left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=0} = J_0'(0) = 0$; także $F(0) = J_0(0) = 1$; dostajemy r.r.

$$\frac{df}{f} = -\frac{s\,ds}{s^2+1}$$

z rozwiązaniem

$$f(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Różniczkowanie transformaty – równanie Bessela, c.d

Ciekawe jest odwrócenie otrzymanej funkcji – funkcję $f(s)$ możemy rozwinąć w szereg Taylora (por. problem **4–4** w „Rozwiązanych problemach ...). Nie jest to specjalnie trudne –

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{C}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{C}{s}\left(1-\frac{1}{2s^2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!s^4}-\ldots+\frac{(-1)^n(2n)!}{(2^n n!)^2 s^{2n}}+\ldots\right) \end{aligned}$$

Transformatę odwrotną znajdujemy korzystając z (5)

$$\mathcal{L}\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

mamy

$$F(t)=\mathcal{L}^{-1}[f(s)]=C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2^n n!)^2}=\boxed{C=1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}$$

– zgodnie z znaną nam definicją J_0.

Całkowanie transformaty

Rozważamy całkę

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} F(t)\, dt.$$

Przy spełnieniu warunku jednostajnej zbieżności (względem x-a) możemy zmienić szyk całkowania w całce

$$\begin{aligned}
\int_s^b f(x)\, dx &= \int_s^b e^{-xt} \left[\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt\right] dx \\
&= \int_0^\infty \frac{F(t)}{t} \left(e^{-st} - e^{-bt}\right)\, dt \\
\ldots & \quad \boxed{b \to \infty} \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \frac{F(t)}{t}\, dt = \mathcal{L}\left[\frac{F(t)}{t}\right].
\end{aligned}$$

Splot; transformata splotu

Wyrażenie

$$K * \phi \equiv \int_0^x K(x-t)\phi(t)\, dt \tag{23}$$

nazywamy *splotem funkcji*, z których pierwsza – $K(x-t)$ – zależy od „względnej odległości” zmiennych. Sam splot jest funkcją x-a – górnej granicy całkowania.

Funkcja splotu często występuje w fizyce. Splotem może być na przykład natężenie promieniowania, rejestrowane przez przesuwający się wzdłuż osi odwiertu detektor. Sygnał detektora zależy od koncentracji pierwiastka promieniotwórczego w warstwach skały ($\phi(t)$; zmienna t to głębokość warstwy) i „funkcji odpowiedzi” detektora, umieszczonego w pozycji (głębokości) x. Ta ostatnia jest funkcją różnicy położeń centralnych punktów warstwy i detektora $(x-t)$. Podobnie widmo promieniowania gamma, rejestrowane przez układ spektrometryczny, jest splotem widma fizycznego (rzeczywistego udziału kwantów o określonych energiach) i znowu „funkcji odpowiedzi” układu, który rejestruje kwanty z przedziału energetycznego $(E', E' + dE')$ w przedziale $(E, E + dE)$.

Transformata splotu

$$\boxed{\mathcal{L}\left[F_1(t) * F_2(t)\right]} = \mathcal{L}\left[\int_0^t F_1(t-z)F_2(z)\,dz\right] = \mathcal{L}\left[F_1(t)\right]\mathcal{L}\left[F_2(t)\right]$$

$$= \boxed{f_1(s)f_2(s)} \tag{24}$$

Na przykład

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t F(x)\,dx\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t 1\cdot F(x)\,dx\right] = \mathcal{L}[1]\mathcal{L}[F(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[F(t)].$$

Na następnej stronie stosujemy „zabawy ze splotem” aby wykazać – znany nam – związek pomiędzy funkcjami Eulera B i Γ.

Transformata L splotu powróci też w kontekście równań całkowych (klasy Volterry).

$$F * G = \int_0^t (t-x)^a x^b \, dx = \int_0^t t^a \left(1 - \frac{x}{t}\right)^a t^b \left(\frac{x}{t}\right)^b t \, d\left(\frac{x}{t}\right) = \boxed{\frac{x}{t} = u}$$

$$= t^{a+b+1} \int_0^1 (1-u)^a u^b \, du = t^{a+b+1} B(a+1, b+1)$$

Obliczając transformatę L „nowego splotu”

$$\mathcal{L}\left[\int_0^1 (1-u)^a u^b \, du\right] = \mathcal{L}\left[u^a\right] \mathcal{L}\left[u^b\right] = \frac{a!}{s^{a+1}} \frac{b!}{s^{b+1}} = \frac{a!b!}{s^{a+b+2}}.$$

$$\left[\int_0^1 (1-u)^a u^b \, du\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a!b!}{s^{a+b+2}}\right] = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} t^{a+b+1}$$

i podstawiając do pierwszego wzoru

$$B(a+1, b+1) = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}. \qquad c.b.d.o.$$

Transformata odwrotna

Można – w stosunkowo prosty sposób – wykazać, że wzór na transformatę odwrotną funkcji $f(s)$ ma postać

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[f(s)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{ts} f(s)\,ds. \tag{25}$$

Całkowanie odbywa się na płaszczyźnie zespolonej $\mathcal{C}_s$, wzdłuż pionowej prostej, równoległej do osi urojonej. Korzystając z *uogólnionego lematu Jordana* można też udowodnić, że jeżeli taką prostą uzupełnić o „lewy” półokrąg to całka po łuku będzie zmierzać do zera, o ile

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = 0; \qquad \Re(s) \leqslant 0.$$

Wówczas całka (25) jest równa $2\pi\times$suma residuów funkcji podcałkowej.

Przykłady niebanalnych rachunków transformaty odwrotnych można znaleźć **tutaj**. W praktyce odwołujemy się do tablic transformaty Laplace'a – ale korzystanie z nich wymaga *dobrej* znajomości wszelkich niuansów związanych tej (wspaniałej!) metody.