

Spis treści

1	Funkcje zmiennej zespolonej	3
1.1	Liczby zespolone	3
1.2	Algebra liczb zespolonych	5
1.2.1	Wzór de Moivre'a; liczby zespolone i wzory trygonometryczne	8
1.3	Funkcje zmiennej zespolonej	9
1.3.1	Pojęcia podstawowe	9
1.3.2	Funkcja zmiennej zespolonej – podstawowe definicje	11
1.4	Funkcja zmiennej zespolonej – proste przykłady	13
1.4.1	Funkcje wieloznaczne. Pierwiastek n -stopnia na płaszczyźnie zespolonej; logarytm zespolony	13
1.5	Różniczkowanie funkcji zmiennej zespolonej. Warunki Cauchy'ego-Riemanna	17
1.5.1	Konsekwencje warunków Cauchy'ego-Riemanna	19
1.6	Całka funkcji zmiennej zespolonej	23
1.7	Twierdzenie całkowe Cauchy'ego	26
1.7.1	Twierdzenie całkowe Cauchy'ego – konsekwencje	28
1.8	Wzór całkowy Cauchy'ego	30
1.8.1	Wzór całkowy Cauchy'ego – konsekwencje	32
1.8.2	Twierdzenie Morery	32
1.8.3	Zasada minimum i maksimum	33
1.8.4	Twierdzenie Liouville'a	34
1.9	Szeregi funkcji analitycznych	35
1.9.1	Szereg funkcyjny, zbieżność	35
1.9.2	Szereg Taylora	38
1.9.3	Szeregi Taylora funkcji elementarnych	41
1.9.4	Szereg Laurenta	42
1.9.5	Zera funkcji analitycznej	45
1.9.6	Odosobnione punkty osobliwe funkcji analitycznej	46
1.10	Residuum funkcji zmiennej zespolonej; twierdzenie o residuach	49
1.10.1	Obliczanie residuów w osobliwościach biegunowych	51

1.11	Rachunek residuów – zastosowania	53
1.11.1	Obliczanie całek	53
1.11.2	Wyznaczanie sum szeregów	62
1.11.3	Rozkład funkcji meromorficznej na ułamki proste	65
1.12	Odwzorowania konforemne i wektorowe pole płaskie	69
1.12.1	Odwzorowania konforemne	70
1.12.2	Homografia	72
1.12.3	Siatka konforemnie równoważna	76
1.12.4	Potencjał zespolony wektorowego pola płaskiego	79
1.12.5	Wektorowe pole płaskie i odwzorowania konforemne	83
1.12.6	Odwzorowania konforemne w hydrodynamice	87
1.13	Gamma Eulera	101
1.13.1	Podstawowe własności $\Gamma(z)$	103
1.13.2	Reprezentacja całkowa	105
1.13.3	Funkcje niekompletne — $\gamma(a, x)$ i $\Gamma(a, x)$	107
1.13.4	Funkcja beta Eulera	108
1.13.5	Trochę fizyki	109

Rozdział 1

Funkcje zmiennej zespolonej

1.1 Liczby zespolone

Pojawienie się liczb zespolonych w matematyce to typowy „wypadek przy pracy”. Mniej więcej w połowie 16. wieku włoscy matematycy dopracowali się (wreszcie!) algorytmu, który dostarczał rozwiązania równania trzeciego stopnia¹. Opracowana przez nich technika znalezienia pierwiastków równania

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

polegała na sprowadzeniu go do pozbawionego wyrazu z drugą potęgą równania

$$y^3 = py + q.$$

To właśnie Tartaglia pokazał, że ostatnie równanie ma rozwiązanie

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Jak nietrudno zauważyć, dla $(q/2)^2 < (p/3)^3$ wielkość występująca pod kwadratowym pierwiastkiem staje się ujemna. I tak na przykład „historyczne równanie”, opisywane przez Rafaela Bombelliego

$$x^3 = 15x + 4 \tag{1.1}$$

¹Można powiedzieć, że czas był to najwyższy! Równanie drugiego stopnia umieli już rozwiązywać . . . rachmistrze sumeryjscy, 2000 lat przed Chrystusem. Przez niewytłumaczalny kaprys historii rozwoju ludzkiego intelektu problem „o stopień wyższy” czekał na rozwiązanie następne trzy i pół tysiąca lat. Rozwiązanie równania trzeciego stopnia wiąże się zazwyczaj z nazwiskiem Girolamo Cardano (1501–1576), chociaż wydaje się, że ten niewątpliwie wszechstronny uczyony – prawdziwy „człowiek Renesansu” – wykorzystał w swoich dziełach *Practica Mathematicae* (1539) i *Ars Magna* (1545) wyniki uzyskane przez współczesnego mu (i z pewnością nie ustępującego rangą) Nicolò Tartaglię (1500–1557), który zresztą również „inspirował” się wynikami działającego o pół wieku wcześniej Bolończyka Scipione del Ferro (1465–1526).

miałoby mieć rozwiązanie

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \quad (1.2)$$

Występujące pod kwadratowym pierwiastkiem -121 przeczyło zdrowemu (szesnastowiecznemu) rozsądkowi. Ale Bombelli *wiedział*, że rozwiązaniem równania (1.1) są „prawdziwe” (rzeczywiste) liczby: 4 oraz $-2 \pm \sqrt{3}$. Jego rewolucyjny pomysł polegał na założeniu, że występujące w rozwiązaniu (1.2) pierwiastki trzeciego stopnia to *liczby zespolone*, będące sumą liczby „zwykłej” (rzeczywistej) i „urojonej”. Ta ostatnia powstaje z przemnożenia pewnej liczby rzeczywistej przez $\sqrt{-1}$. W dodatku oba pierwiastki trzeciego stopnia powinny się różnić między sobą pojawiającym się w sumie części rzeczywistej i urojonej znakiem, w sposób identyczny do tego w jaki różnią się wielkości występujące pod znakiem pierwiastka, to znaczy

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \equiv \alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{i} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \equiv \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

gdzie α i β należałoby wyznaczyć².

W ten sposób właśnie pojawiły się „liczby zespolone”, zawierające w sobie urojoną (a więc nieistniejącą) wielkość – kwadratowy pierwiastek z -1 . Przez przeszło dwieście lat pozostawały pełną abstrakcją matematyczną – abstrakcją, która odpowiednio manipulowana mogła jednak doprowadzić do realnych wyników.

Dopiero na początku dziewiętnastego wieku powstała nowa koncepcja – wykorzystania tych tworów matematycznych do opisu płaszczyzny. Tak jak zbiór liczb rzeczywistych można w sposób jedno-jednoznaczny przedstawić przy pomocy osi liczbowej x (każdy punkt osi odpowiada pewnej liczbie rzeczywistej od $-\infty$ do ∞ i odwrotnie), tak można wprowadzić jedno-jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy parami liczb i punktami płaszczyzny. Uporządkowaną parę liczb (a, b) traktować możemy jako współrzędne końca wektora, którego początek pokrywa się z początkiem układu współrzędnych. Osie tego układu to dwie „tradycyjne” osie liczbowe, $0x$ i $0y$, z tym, że jednostką osi $0x$ jest 1 , a osi $0y$ – urojona jednostka $i = \sqrt{-1}$. Te jednostki spełniają jednocześnie role wersorów osi, w tym sensie że dowolny punkt na *plaszczyźnie zespolonej* (zwanej też płaszczyzną Arganda lub płaszczyzną Gaussa) możemy przedstawić jako $z = 1 \cdot a + i \cdot b$. Współrzędna x -owa, a , to *część rzeczywista* liczby zespolonej, natomiast współrzędna y -owa, b , to jej *część urojona*. Analogicznie mówimy o rzeczywistej osi $0x$ i osi urojonej $0y$ płaszczyzny $0xy$.

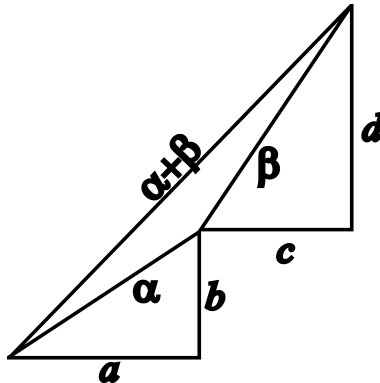
W dalszym jednak ciągu przydatność liczb zespolonych była mało widoczna. Można ich było użyć (zobaczymy to w tym rozdziale) do zgrabnego zapisu pewnych operacji na wektorach w przestrzeni dwuwymiarowej (na płaszczyźnie). Dopiero w drugiej połowie 19. wieku zaczęła się objawiać potęga nie tyle algebry liczb zespolonych co teorii funkcji *zmiennej zespolonej*. W fizyce wielkości zespolone mają często znakomitą interpretację formalną – np. *zespolony* współczynnik

²Obszerniejszy wywód: www.ftj.agh.edu.pl/~lenda/alg/screen.pdf.

załamania to wielkość fizyczna składająca się z dwóch części: rzeczywistej – odpowiedzialnej za zjawisko załamania fali padającej na granicę dwóch ośrodków i urojonej – która odpowiada za zjawisko absorpcji.

1.2 Algebra liczb zespolonych

Każdy punkt płaszczyzny zespolonej traktujemy jako wektor $\alpha = a + ib$. Dwóm punktom płaszczyzny α i β niech odpowiadają dwie pary liczb: (a, b) i (c, d) . Zwykle prawa algebry, przeniesione na liczby zespolone dają — przy zachowaniu umowy, że $i^2 = -1$:

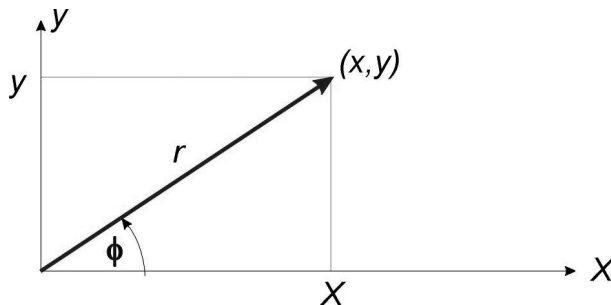


Rysunek 1.1: Dodawanie liczb zespolonych na płaszczyźnie Arganda.

$$\alpha + \beta = (a, b) + (c, d) \equiv (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \quad (1.3)$$

$$\alpha \cdot \beta = (a, b)(c, d) \equiv (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (1.4)$$

Dodawanie liczb zespolonych – wektorów na płaszczyźnie zespolonej ilustruje Rys.1.1. Mnożenie liczb zespolonych łatwiej jest zinterpretować, jeżeli zamiast



Rysunek 1.2: Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie zespolonej.

współrzędnych kartezjańskich (układ dwóch osi liczbowych $0x$ i $0y$) użyjemy do

opisu położenia końca wektora $z = x + iy$ współrzędnych biegunowych: odległości (od początku układu) r i kąta (wektora względem osi $0x$) ϕ (Rys.1.2). Mamy

$$z = x + iy = r \cos \phi + i r \sin \phi = r(\cos \phi + i \sin \phi). \quad (1.5)$$

W kontekście algebry liczb zespolonych, wielkość r to *moduł* albo *wartość bezwzględna* liczby z . Z prostej trygonometrii mamy

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.6)$$

Kąt ϕ to *argument liczby zespolonej*³. Tangens tego kąta jest równy y/x [por. wzór (1.5)] y/x , a więc zachodzi

$$\phi = \arg z = \arctg \left(\frac{y}{x} \right). \quad (1.7)$$

Wzór (1.5) możemy zapisać w szczególnie wygodnej postaci, jeżeli skorzystamy z tożsamości⁴

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}. \quad (1.8)$$

Wówczas

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \equiv r e^{i\phi}. \quad (1.9)$$

Powracając do mnożenia dwóch liczb zespolonych – iloczyn dwóch liczb zespolonych z_1 i z_2 to

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\phi_1} \cdot r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} = |z_1| \cdot |z_2| e^{[i(\arg(z_1) + \arg(z_2))]} \quad (1.10)$$

Warto w tym miejscu zauważyć, że przemnożenie danej liczby zespolonej przez $e^{i\Phi}$ – liczbę, której moduł jest równy jedności – to *czysty obrót* wektora (reprezentującego tę liczbę) o kąt Φ .

Aby zdefiniować dzielenie liczb zespolonych wprowadzamy pojęcie *liczby zespolonej sprzężonej* (do danej liczby zespolonej)⁵:

$$z^* \stackrel{\text{def}}{=} x - iy = r(\cos \phi - i \sin \phi) = r[\cos(-\phi) + i \sin(-\phi)] = r e^{-i\phi} \quad (1.11)$$

– wektora stanowiącego zwierciadlane odbicie wektora z w osi rzeczywistej (Rys.1.3). Formalnie, liczbę zespoloną uzyskujemy zamieniając i na $-i$ w (1.9). Zauważmy

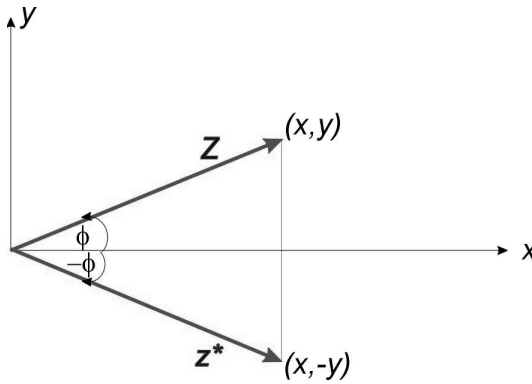
$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = r e^{i\phi} \cdot r e^{-i\phi} = r^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad (1.12)$$

³W żargonie fizyki i techniki używa się także terminu *faza*.

⁴Wyprowadzenie tej tożsamości opiera się na możliwości przedstawienia wszystkich występujących w niej funkcji w postaci *szeregów potęgowych* (szeregów Taylora, znanych nam z analizy matematycznej):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

⁵Oprócz oznaczenia z^* powszechnie stosowane jest oznaczenie \bar{z} .



Rysunek 1.3: Liczba zespolona sprzężona.

— iloczyn liczby zespolonej z i liczby do niej sprzężonej z^* jest równy kwadratowi modułu z . Teraz możemy już łatwo określić operację dzielenia dwóch liczb zespolonych $z_1 = a + ib$ i $z_2 = c + id$. Licznik i mianownik ułamka, przedstawiającego sobą iloraz tych liczb, mnożymy przez zespoloną sprzężoną mianownika

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}, \quad (1.13)$$

czyli część rzeczywistą i urojoną liczby uzyskanej w wyniku pomnożenia dzielnej przez zespoloną sprzężoną dzielnika dzielimy przez kwadrat modułu dzielnika.

Podsumujmy: opierając się na „pomyśle” Bombelliego $i = \sqrt{-1}$ i stosując prawa algebry odnoszące się do liczb rzeczywistych (takie m.in. jak prawo łączności dodawania, przemienności mnożenia i rozdzielności mnożenia względem dodawania) uzyskujemy logiczną strukturę algebry liczb o dwóch „stopniach swobody”, nazwanych przez nas częścią rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej. Z formalnego punktu widzenia należałoby dodać jeszcze dwa szczegóły. Określając takie operację jak dodawanie i mnożenie elementu zbioru liczb rzeczywistych, wprowadza się pojęcie takich elementów jak zero i jedność. Dodanie zera do danej liczby rzeczywistej pozostawia ją bez zmian, podobnie jak pomnożenie jej przez jedność. Mówimy wówczas o *elementach neutralnych* w odniesieniu do operacji dodawania i mnożenia. Zauważmy, że takie neutralne elementy istnieją także przypadku liczb zespolonych:

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b) \quad \text{dodawanie} \quad (1.14)$$

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \quad \text{mnożenie.} \quad (1.15)$$

Istnieją więc zespolone „zero” i „jedność”. Analogicznie, będą istniały też operacje odwrotne do dodawania liczb zespolonych (odejmowanie – dodawanie liczby zespolonej „ujemnej”, a więc ze zmienionymi na przeciwne znakami części rzeczywistej i urojonej) i mnożenia (dzielenie). W tym drugim przypadku operacja odwrotna do mnożenia będzie istniała dla wszystkich liczb zespolonych za wyjątkiem zera: $(0, 0)$.

O dwóch liczbach zespolonych możemy powiedzieć, że są równe – będzie to oznaczało, że równe są ich części rzeczywiste i urojone. Jeżeli $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$, to równość

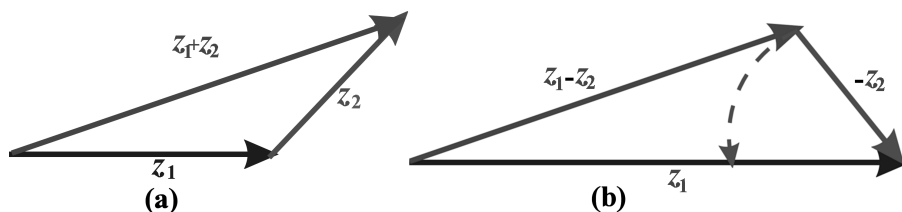
$$z_1 = z_2$$

jest równoważna układowi

$$x_1 = x_2 \quad \text{oraz} \quad y_1 = y_2.$$

Natomiast nie ma sensu mówienie, że jedna liczba zespolona jest większa (mniejsza) od drugiej. Relacje $>$ i $<$ mają sens tylko w przypadku liczb rzeczywistych, „uporządkowanych” na osi liczbowej. Możemy więc porównywać moduły i argumenty liczb zespolonych, ale nie same liczby.

Podkreślmy jeszcze, że pojęciowo bardzo wygodnym jest postrzeganie liczb zespolonych jako wektorów, a wartości modułów liczb zespolonych – jako długości tych wektorów. Czytelnik obyty choć trochę z rachunkiem wektorowym z łatwością zaakceptuje nierówności *nierówności trójkąta* $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ oraz $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$. Pierwsza z nich (por. rysunek 1.4a) to stwierdzenie, że w każdym trójkącie suma długości dwóch (dowolnych) boków nie może być mniejsza od długości pozostałego (trzeciego boku). Druga mówi nam, że minimalna wartość różnicy dwóch wektorów, a więc długości odcinka łączące końce dwóch wektorów, wychodzących z jednego punktu, odpowiada sytuacji, kiedy oba wektory są współliniowe. Tę drugą nierówność można wyprowadzić, zapisując $z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$ i wykorzystując pierwszą – bardziej oczywistą – nierówność trójkąta: $|z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$.



Rysunek 1.4: Nierówności trójkąta: (a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
(b) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

1.2.1 Wzór de Moivre'a; liczby zespolone i wzory trygonometryczne

Podnosząc wzór (1.9) stronami do potęgi stopnia n otrzymujemy:

$$z^n = [r(\cos \phi + i \sin \phi)]^n = r^n e^{in\phi} = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) \quad (1.16)$$

i w konsekwencji

$$e^{in\phi} = (\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos n\phi + i \sin n\phi. \quad (1.17)$$

Wzór ten nazywa się zwykle wzorem de Moivre'a lub wzorem Eulera⁶. Wynika z niego, jak i z wzoru (1.8), że dobrze nam znane funkcje sinus i kosinus – także i wielokrotności kątów – mogą być przedstawiane jako części, odpowiednio urojona i rzeczywista, funkcji wykładniczej o wykładniku urojonym. Stwarza to znakomite możliwości praktyczne. Być może pamiętasz Czytelniku, ile mozołu kosztowało Cię kiedyś wyprowadzenie wzorów na sinus i kosinus sumy (różnicy) kątów. Przy pomocy algebry liczb zespolonych można je uzyskać właściwie natychmiast:

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha \pm \beta)} &= \cos(\alpha \pm \beta) + i \sin(\alpha \pm \beta) \\ &= e^{i\alpha} \cdot e^{\pm i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta \pm i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta) + i (\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Wystarczy porównać części rzeczywiste i urojone w pierwszym i trzecim wierszu, aby otrzymać dobrze znane

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Tego typu wzorów można – w równie prosty sposób – wykazać wiele. Liczby zespolone są – między innymi – bardzo skutecznym narzędziem w rozwiązywaniu problemów trygonometrycznych. Ale nie tylko.

1.3 Funkcje zmiennej zespolonej

1.3.1 Pojęcia podstawowe

Wprowadzenie pojęcia *zmiennej zespolonej* – w ogólności zbioru punktów płaszczyzny zespolonej – nasuwa automatycznie pytanie o *funkcje zmiennej zespolonej*.

Wiele wiadomości z dziedziny rachunku różniczkowego i całkowego funkcji zmiennej rzeczywistej (także funkcji dwóch zmiennych) można przenieść w sposób bardziej lub mniej intuicyjny na zagadnienia analizy funkcji zmiennej zespolonej. W tym podrozdziale wprowadzimy, zdefiniujemy i zilustrujemy *nowe pojęcia*, stanowiące swoisty język, w którym będziemy opisywali obiekty na płaszczyźnie zespolonej i zachodzące pomiędzy nimi relacje. Zaczniemy od

Definicji funkcji zmiennej zespolonej: *Na zbiorze $\mathcal{D}_z \in \mathcal{C}_z$, gdzie symbolem \mathcal{C}_z oznaczamy płaszczyznę zespoloną otwartą (patrz niżej), jest określona funkcja $f(z)$ jeżeli podane jest prawo, które każdemu punktowi $z \in \mathcal{D}_z$ przyporządkowuje pewną liczbą zespoloną, zazwyczaj w sposób jednoznaczny. Zapisujemy*

$$f(z) = f(x + iy) \equiv f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

gdzie $u(x, y)$ i $v(x, y)$ to odpowiednio część rzeczywista i urojona funkcji f .

⁶Błądnie. Po raz pierwszy wzór ten pojawił się w literaturze gdy Leonhard Euler – niewątpliwie jeden z najwybitniejszych matematyków wszechczasów – miał ...roczek.

Punkt wewnętrzny zbioru S : mówimy, że z_0 jest punktem wewnętrznym zbioru S jeżeli istnieje ϵ -owe sąsiedztwo (otoczenie): $|z - z_0| < \epsilon$, którego wszystkie punkty $z \in S$. Możemy mieć do czynienia z otoczeniem „nakłutym”: $0 < |z - z_0| < \epsilon$. Na przykład w zbiorze $|z| \leq 1$ wszystkie punkty $|z| < 1$ są punktami wewnętrznymi, ale punkty $|z| = 1$ – nie.

Obszar \mathcal{D}_z : mówimy że zbiór \mathcal{D}_z jest obszarem jeżeli: (1) każdy punkt \mathcal{D}_z jest punktem wewnętrznym; (2) dowolne dwa punkty \mathcal{D}_z można połączyć linią łamaną, leżącą całkowicie wewnątrz \mathcal{D}_z . I tak zbiory $|z| < 1$, $|z - z_0| < \epsilon$, są obszarami ale $|z| \leq 1$ nie jest obszarem, ze względu na niespełnienie warunku (1); podobnie nie są obszarami zbiory $|z| \neq 1$ i $|z| < 1 \cup |z - 4| < 2$ [bo nie jest wypełniony warunek (2)].

Punkt zewnętrzny obszaru \mathcal{D}_z : mówimy, że z_0 jest punktem zewnętrznym obszaru \mathcal{D}_z jeżeli istnieje ϵ -owe sąsiedztwo $|z - z_0| < \epsilon$, którego wszystkie punkty $z \notin \mathcal{D}_z$. Takim punktem będzie na przykład punkt $z_0 = 2$ dla obszaru \mathcal{D}_z zdefiniowanego jako $|z| \leq 1$.

Punkt graniczny z_0 obszaru \mathcal{D}_z to punkt, dla którego istnieje ϵ -owe sąsiedztwo $|z - z_0| < \epsilon$, które zawiera zarówno punkty $z \in \mathcal{D}_z$ jak i punkty $z \notin \mathcal{D}_z$. Na przykład: punkty $z_0 = 1, -1, i, -i$, albo $z_0 = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ dla obszaru \mathcal{D}_z zdefiniowanego jako $|z| \leq 1$.

Kontur B (brzeg) obszaru \mathcal{D}_z jest zbiorem *wszystkich* punktów granicznych tego obszaru. Na przykład punkty $|z| = 1$ dla obszaru \mathcal{D}_z zdefiniowanego jako $|z| < 1$, albo $z = 0$ dla obszaru \mathcal{D}_z zdefiniowanego jako $|z| \neq 0$.

Obszar domknięty – jedno- i wielospójny. Konturowi przypisujemy *zwrot* – dodatni (przy obiegu obszaru *przeciwnym* do ruchu wskazówek zegara – punkty obszaru \mathcal{D}_z przy obiegu konturu pozostają po *lewej* stronie) i ujemny (... *zgodnym, prawej*). Obszar \mathcal{D}_z i jego kontur B (brzeg) to *obszar domknięty* $\overline{\mathcal{D}}$. Jeżeli konturem jest jedna krzywa to obszar nazywamy *jednospójnym* – w przeciwnym razie mamy do czynienia z obszarem *wielospójnym*. I tak obszar $|z - i| < 2$ to obszar jednospójny – jego kontur B to okrąg $|z - i| = 2$; obszar $1 < |z| < 2$ to obszar wielospójny, z konturem $B : |z| = 1 \cup |z| = 2$. Z konturem jednospójnym mamy do czynienia w przypadku, gdy „ściągać kontur do punktu” podczas takiej redukcji konturu cały czas wewnątrz niego będą się znajdowały tylko punkty należące do obszaru.

Izolowany (odosobniony) punkt (osobliwy) to punkt, dla którego istnieje ϵ -owe sąsiedztwo, niezawierające żadnego innego punktu osobliwego. Na przykład punkt $z = 1$ dla funkcji $f(z) = \frac{1}{1 - z}$. Z kolei punkt $z = 0$ *nie* będzie izolowanym punktem osobliwym funkcji $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$ (patrz niżej).

Punkt skupienia P zbioru punktów N to punkt, którego *każde* ϵ -owe otoczenie zawiera przynajmniej jeden, różny od P , punkt zbioru N . Takim punktem będzie właśnie punkt $z = 0$ dla funkcji $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$.

Punkt w nieskończoności Jeżeli rozważać ciąg *nieograniczenie rosnący*

$$\{z_n\}; \forall R > 0 \quad \exists N \quad |z_n| > R \quad \forall n \geq N,$$

to dla takiego ciągu nie istnieje granica w sensie „zwykłym” – ale możemy *formalnie* wprowadzić $z = \infty$ jako właśnie „granicę” każdego nieograniczonego ciągu. Możemy taki *punkt w nieskończoności* traktować jako granicę funkcji $f(z) = 1/z$ przy $z \rightarrow 0$. Ten punkt jest *brzegiem zespolonej płaszczyzny otwartej*. Mówimy bowiem o płaszczyźnie zespolonej otwartej \mathcal{C}_z i zamkniętej $\overline{\mathcal{C}_z} = \mathcal{C}_z + \infty$.

Rzut stereograficzny to inny sposób mówienia o punkcie w nieskończoności.

Wyobraźmy sobie mianowicie sferę, o promieniu jednostkowym, umieszczoną tak na płaszczyźnie zespolonej \mathcal{C}_z , że „biegun południowy” sfery znajduje się w początku układu osi kartezjańskich. Poprowadźmy teraz prostą przechodzącą przez biegun północny sfery, punkt \mathbf{N} i *dowolny punkt* sfery. Prosta taka przebija sferę w pewnym punkcie s i płaszczyznę \mathcal{C}_z w pewnym punkcie z_N , przy czym wszystkim istnieje jedno-jednoznaczne pomiędzy punktami płaszczyzny i wszystkimi punktami z półkuli południowej sfery. Dla półkuli północnej sfery takie przyporządkowanie mamy też dla wszystkich jej punktów, *za wyjątkiem* samego punktu \mathbf{N} — obraz tego ostatniego na \mathcal{C}_z to właśnie punkt w nieskończoności⁷.

O Punkcie rozgałęzienia powiemy przy okazji omawiania funkcji wieloznacznych.

1.3.2 Funkcja zmiennej zespolonej – podstawowe definicje

Zgodnie z podaną w poprzednim podpunkcie definicją, dla zmiennej $z = x + iy$ będziemy określać jej funkcję

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (1.18)$$

Analogicznie jak w przypadku analizy funkcji zmiennej rzeczywistej taką funkcję traktujemy jako przyporządkowanie pomiędzy pewnymi obszarami \mathcal{D}_z i \mathcal{D}_w płaszczyzn zespolonych \mathcal{C}_z i \mathcal{C}_w .

Możemy także wprowadzić pojęcie funkcji odwrotnej

$$z = \phi(w) = x(u, v) + iy(u, v); \phi = f^{-1}(w) \quad (1.19)$$

– będzie to przyporządkowanie odwrotne do przyporządkowania (1.18).

⁷Jeżeli można użyć zupełnie nie-matematycznego języka: punkt w nieskończoności to bezkresne „morze” oblewające ze wszystkich stron równie bezkresną „płytę” płaszczyzny \mathcal{C}_z .

Funkcje jedno- i wieloznaczne. Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest *jednoznaczna* jeżeli każdej wartości z odpowiada *jedna i tylko jedna* wartość $w = f(z)$. Natomiast funkcja $f(z)$ jest *wieloznaczna* jeżeli (choć jednej) danej wartości z_0 odpowiadają dwie (trzy, ..., nieskończenie wiele) wartości $w_1(z_0) \neq w_2(z_0) \neq \dots$. I tak $w = f(z) = az + b$ jest funkcją jednoznaczną; $w = f(z) = \sqrt[n]{z}$ jest funkcją wieloznaczną o krotności n ; a funkcja $w = f(z) = \ln z$ jest funkcją wieloznaczną o krotności ∞ (por. następny podrozdział).

Funkcje jedno- i wielowartościowe. Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest *jednowartościowa* jeżeli różnym wartościom $z_1 \neq z_2 \neq \dots$ odpowiadają *różne* wartości $w_1 = f(z_1) \neq w_2 = f(z_2) \neq \dots$. Funkcja $f(z)$ jest *wielowartościowa* jeżeli różnym wartościom $z_1 \neq z_2 \neq \dots$ odpowiadają *te same* wartości $w_1 = f(z_1) = w_2 = f(z_2) = \dots$. Na przykład $w = f(z) = z^n$ jest funkcją wielowartościową o krotności n ; istnieją $z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_n$ takie że $w(z_1) = w(z_2) = \dots = w(z_n)$; a $w = f(z) = e^z$ jest funkcją nieskończenie wielowartościową (por. następny podrozdział).

Funkcja odwrotna do funkcji jednoznacznej jest funkcją jednowartościową, a funkcja odwrotna do funkcji wieloznacznej jest funkcją wielowartościową.

Granica i ciągłość funkcji zmiennej zespolonej to pojęcia będące „kalką” analogicznych definicji z analizy funkcji zmiennej rzeczywistej. Definicja granicy $w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ to

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon.$$

Z kolei ciągłość funkcji to istnienie, w danym z_0 , jej granicy równej $f(z_0)$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Zauważmy, że ciągłość to: (1) istnienie $f(z_0)$; (2) istnienie granicy f przy $z \rightarrow z_0$; (3) równość tej granicy wartości $f(z_0)$.

Granice sum, iloczynów i ilorazów funkcji Tutaj odpowiednie wzory mogą być znowu przeniesione z analizy funkcji zmiennej rzeczywistej. W szczególności jeżeli dwie funkcje $f(z)$ i $F(z)$ mają – dla $z \rightarrow z_0$ – granice, odpowiednio równe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f_0$, oraz $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = F_0$, to zachodzi

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + F(z)] = f_0 + F_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot F(z)] = f_0 \cdot F_0$$

oraz – jeżeli $F_0 \neq 0$ –

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{f_0}{F_0}.$$

Nie wymagającym komentarzy jest wynikający stąd

Warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f_0 = u_0 + iv_0,$$

który sprowadza się do istnienia (niezależnie) granic części rzeczywistej i urojonej funkcji $f(z)$ przy $z \rightarrow z_0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) &= u_0, & \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) &= v_0. \end{aligned}$$

1.4 Funkcja zmiennej zespolonej – proste przykłady

Rozważmy funkcję $w = f(z) = az + b$ i funkcję do niej odwrotną. Sama $f(x)$ jest ciągła, jednoznaczna i określona dla wszystkich z , nie wyłączając punktu w nieskończoności: $f(\infty) = \infty$. Stałe a i b to liczby (w ogólności) zespolone, $a \neq 0$. Funkcja odwrotna

$$\phi(w) = z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a} \equiv a_1w + b_1$$

ma te same własności co $f(z)$, a z tego można wywnioskować, że $f(z)$ jest funkcją jednowartościową. Tak jak już omawialiśmy to w podrozdziale poświęconym algebrze liczb zespolonych przekształcenie realizowane przy pomocy funkcji $f(z)$ to: (1) wydłużenie (skrócenie) wektora z o czynnik $|a|$; (2) obrót o kąt $\theta_a = \arg a$; oraz (3) przesunięcie o wektor b .

Rozważmy teraz funkcję potęgową (kwadratową) $f(z) = z^2$. Jest ona ciągła, jednoznaczna i określona dla wszystkich z . Także i tutaj $f(\infty) = \infty$.

Jeżeli użyć reprezentacji biegunowej dla obu liczb to

$$w \equiv R = e^{i\psi} = z^2 \equiv (re^{i\phi})^2 \quad R = r^2, \quad \psi = 2\phi,$$

a stąd wniosek że obszary \mathcal{C}_z $0 \leq \phi < \pi$ oraz $\pi \leq \phi < 2\pi$ odwzorowują się (oba!) w ten sam obszar płaszczyzny \mathcal{C}_w — $0 \leq \psi < 2\pi$, a konkretnie – punkty z_0 i $-z_0$ w ten sam punkt w_0 . Funkcja jest zatem funkcją *dwuwartościową* – jej funkcja odwrotna (pierwiastek kwadratowy) jest więc funkcją *niejednoznaczna!* To zagadnienie omawiamy dokładnie w następnym podrozdziale.

1.4.1 Funkcje wieloznaczne.

**Pierwiastek n -stopnia na płaszczyźnie zespolonej;
logarytm zespolony**

Rozważmy na początek przypadek pierwiastka kwadratowego:

$$w(z) = \sqrt{z}.$$

Założmy, że taka liczba – \sqrt{z} – istnieje i jest równa $w = \sqrt{x + iy} \equiv u + i v$. Mamy więc

$$\sqrt{x + iy} = u + iv, \tag{1.20}$$

albo

$$(u + iv)^2 = x + iy, \quad (1.21)$$

z czego wynika

$$u^2 - v^2 = x, \quad \text{oraz} \quad 2uv = y. \quad (1.22)$$

Podnosząc do kwadratu oba równania układu (1.22) i dodając je stronami mamy

$$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = x^2 + y^2,$$

albo

$$u^2 + v^2 = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zauważmy, że przed pierwiastkiem mamy znak '+' – suma kwadratów dwóch liczb rzeczywistych musi być nieujemna. Ostatnie równanie, w połączeniu z pierwszym równaniem układu (1.22) daje w końcu

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= \frac{1}{2} \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right), \\ v^2 &= \frac{1}{2} \left(-x + \sqrt{x^2 + y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Pozostaje obliczyć pierwiastki, aby otrzymać po dwie – różniące się znakami – wartości u i v . Aby z tak otrzymanych części: rzeczywistej i urojonej zbudować pierwiastek musimy mieć jednak na uwadze drugie równanie (1.22): znak iloczynu uv musi być taki sam jak znak y . A więc nie cztery, ale dwie możliwe kombinacje u i v dają nam szukane w_1 i w_2 . Na przykład: dla $z = 21 - 20i$ mamy $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29$. Korzystając z (1.23) otrzymujemy $u = \pm 5, v = \pm 2$. Ponieważ $y < 0$ to , znaki u i v muszą być różne. Mamy

$$w_1 = 5 - 2i, \quad \text{oraz} \quad w_2 = -5 + 2i = -w_1.$$

Oba pierwiastki (liczby zespolone!) różnią się znakiem.

Obliczanie pierwiastków wyższego stopnia jest praktycznie możliwe tylko przy skorzystaniu z reprezentacji biegunowej liczby zespolonej $z = re^{i\theta}$. Jeżeli $w = \sqrt[n]{z} \equiv \rho e^{i\psi}$, to (wzór de Moivre'a) $\rho^n = r$, albo $\rho = \sqrt[n]{r}$. Jeżeli chodzi o związki pomiędzy argumentami to mamy analogicznie $n\psi = \theta$, ale – bardziej dokładnie – $n\psi = \theta + 2k\pi$, ponieważ różnica pomiędzy tymi dwoma kątami typu $2k\pi$ (k całkowite) jest nieistotna. Tak więc

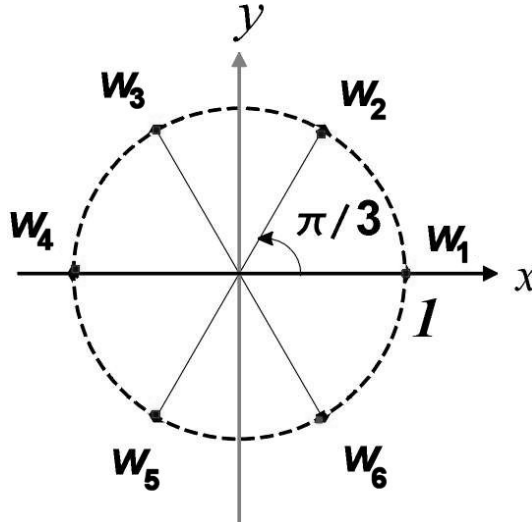
$$\psi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}. \quad (1.24)$$

Dla $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ powyższy wzór daje n różnych wartości argumentu: począwszy od n -tej frakcji argumentu θ aż do kąta $[\theta + 2(n - 1)\pi]/n$; kolejne wartości argumentu dzieli kąt $2\pi/n$.

Na przykład $w = \sqrt[3]{-8} \equiv \sqrt[3]{8e^{i\pi}}$. Tu: $n = 3, k = 0, 1, 2$; kolejne wartości w_k to:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{8}e^{i\pi/3} = 2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) = 1 + i\sqrt{3}, \\ w_1 &= \sqrt[3]{8}e^{i(\pi/3+2\pi/3)} = \dots = -2, \\ w_2 &= \sqrt[3]{8}e^{i(\pi/3+2\cdot 2\pi/3)} = \dots = 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

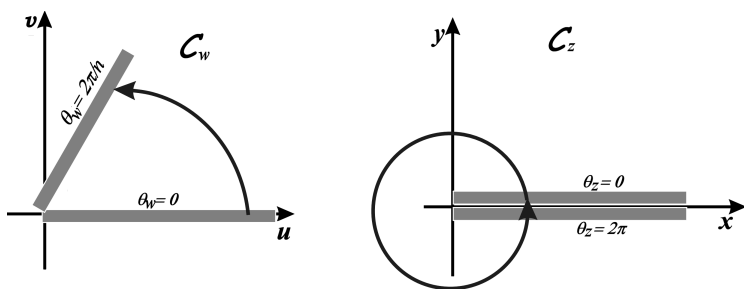
Wszystkie n pierwiastków liczby zespolonej $z = re^{i\theta}$ leży w n wierzchołkach wielokąta foremnego, wpisanego w okrąg o promieniu \sqrt{r} . Orientacja wielokąta jest taka, że argument „pierwszego” pierwiastka w_0 (zwanego także wartością główną pierwiastka) to n -ta frakcja kąta θ . W szczególności, gdy wyciągamy pierwiastek z dodatniej liczby rzeczywistej ($\theta = 0$), to pierwszy pierwiastek (wierzchołek wielokąta) też znajduje się na osi rzeczywistej – por. Rys. 1.5 dla przypadku $n = 6$.



Rysunek 1.5: Sześć gałęzi pierwiastka szóstego stopnia z jedności.

Te n różnych wartości pierwiastka stopnia n to *gałęzie pierwiastka*. Każda funkcja niejednoznaczna posiada liczbę gałęzi równą krotności niejednoznaczności. Umownie wyróżnia się wspomnianą już wartość główną. Zauważmy, że wzrost argumentu z o $2\pi/n$ w argumente pierwiastka – por. (1.24) – powoduje przejście z jednej gałęzi na gałąź „wyższą” (z najwyższej, n -ej gałęzi przechodzimy na gałąź główną o wskaźniku równym zero). Taki wzrost argumentu możemy kojarzyć z okrążeniem punktu $z = 0$ – argument liczby z wzrasta wówczas o 2π . Dla funkcji jednoznacznej taka zmiana nie będzie miała znaczenia, ale dla funkcji niejednoznacznej punkt $z = 0$ jest *punktem rozgałęzienia* – okrążenie takiego punktu powoduje przejście na kolejną gałąź niejednoznacznej funkcji.

Powracając do *funkcji odwrotnej* dla funkcji pierwiastka, jaką jest funkcją potęgowa: tak jak funkcja $z = w^2$ odwzorowuje górną i dolną półpłaszczyznę C_w w tę samą płaszczyznę C_z , tak funkcja $z = w^n$ odwzorowuje każdy klin płaszczyzny C_w o rozwartości kątowej $\alpha = 2\pi/n$ w całą płaszczyznę C_z – por. rysunek 1.6. Logicznym będzie uznanie *górnego krawędzi* dodatniej półosi rzeczywistej $0x$ (argument kątowy $\theta_z = 0$) płaszczyzny C_z za obraz „dolnej” krawędzi klina, której argument kątowy to $\theta_w = 0$, zaś *dolnej krawędzi* dodatniej półosi rzeczywistej $0x$ (argument kątowy $\theta_z = 2\pi$) płaszczyzny C_z za obraz „górnego” krawędzi klina, której argument kątowy to $\theta_w = 2\pi/n$. Po odwzorowaniu pierwszego klina D_w



Rysunek 1.6: Funkcja $z = w^n$ i jej odwzorowanie klina o rozwartości $2\pi/n$ płaszczyzny C_w .

w płaszczyznę C_z rozcinamy otrzymany płat wzdłuż osi rzeczywistej; następnie dokonujemy odwzorowania drugiego klina D_w w *kolejny* płat płaszczyzny C_z , ale o ile na pierwszym płacie argument kątowy zmiennej z należy do przedziału $0 \leq \theta_z < 2\pi$, to ten sam argument na płacie drugim należy do przedziału $2\pi \leq \theta_z < 4\pi$. Dwa płaty umieszczamy jeden (ten drugi) nad drugim (tym pierwszym) i dolną krawędź cięcia na płacie dolnym „sklejamy” z górną krawędzią płata górnego.

Dodajemy sukcesywnie płaty kolejne C_z , odpowiednio łącząc krawędzie cięć. Na ostatnim, n -tym z kolei płacie argument kątowy zmiennej z należy do przedziału $(n-1) \cdot 2\pi \leq \theta_z < n \cdot 2\pi$. Jedyny trudny (do wykonania, ale nie do wyobrażenia sobie) manewr to połączenie dolnej krawędzi cięcia z n -ego płata z górną krawędzią płata wyjściowego (pierwszego).

Na tak skonstruowanej powierzchni, zwanej powierzchnią Riemanna i składającej się z n płatów płaszczyzny zespolonej C_z , pierwiastek $w = \sqrt[n]{z}$ jest funkcją jednoznaczną. Każda gałąź pierwiastka odpowiada innemu płatowi, a przyrost argumentu zmiennej z o kąt 2π powoduje przeskok z danego płata na płat położony bezpośrednio nad nim.

Przykładem funkcji nieskończenie wieloznacznej jest funkcja $w = \ln z$. Rzeczywiście zapisując

$$w = \ln z = \ln(re^{i\phi}) = \ln r + i\phi \quad (1.25)$$

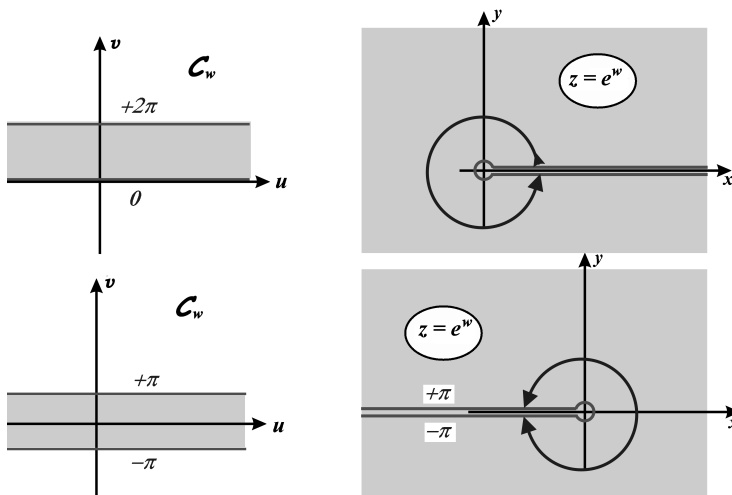
widzimy, że i w tym przypadku okrążenie zera w kierunku dodatnim (przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) powoduje zmianę kąta ϕ o $+2\pi$, a w kierunku ujemnym o -2π i zmiany te skutkują *różnymi* wartościami funkcji logarytmicznej, a konkretnie – jej części urojonej.

Znowu wygodnie jest analizować odwzorowania realizowane przez funkcję odwrotną. Zauważmy, że funkcja

$$z = e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u (\cos v + i \sin v) \equiv x + iy \quad (1.26)$$

przekształca nieskończenie szeroki ($-\infty < u < +\infty$) pas płaszczyzny C_w o wysokości 2π – na przykład $0 \leq v < 2\pi$ – w kompletną płaszczyznę zespoloną C_z (zmienne x i y przybierają *wszystkie* wartości z przedziału $-\infty < u < +\infty$ – por.

rysunek 1.7). Ponieważ takich pasów jest nieskończenie wiele, funkcja wykładnicza jest funkcją nieskończenie wielowartościową; skonstruowana powierzchnia Riemanna dla funkcji odwrotnej – logarytmu – składa się z nieskończonej liczby płatów, o odpowiednio połączonych krawędziach cięć wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej (dolna krawędź cięcia dolnego płata z górną krawędzią cięcia płata górnego; „w nieskończoności” następuje połączenie krawędzi dolnej krawędzi płata reprezentującego wierzchołek tej nieskończonej piramidy z górną krawędzią płata położonego u jej podstawy).



Rysunek 1.7: Funkcja $z = e^w$ i jej odwzorowanie pasa o wysokości 2π płaszczyzny C_w .

Powierzchnie Riemanna to sposób na uwolnienie się od niejednoznaczności (i wielowartościowości) funkcji zmiennej zespolonej. Dodajmy, że w przypadku logarytmu naturalnego $w = \ln z$ wprowadzamy też pojęcie *wartości głównej* logarytmu, oznaczanej zwykle jako $\text{Ln } z$. Tak jak poprzednio, część rzeczywista to $\ln |z|$, natomiast dla części urojonej istnieją dwie konwencje: pierwsza z nich, to przyjęcie za przedział zmienności kąta ϕ_z przedziału $[0, 2\pi)$ – logarytm $\text{Ln } z$ odwzorowuje wówczas całą płaszczyznę C_z w nieskończony pas poziomy płaszczyzny C_w ; w obrębie tego pasa część urojona zmiennej w zmienia się w granicach $0 \leq v < 2\pi$. Drugi sposób to przyjęcie za przedział zmienności kąta ϕ_z przedziału $[-\pi, \pi)$ – w obrębie tak uzyskanego pasa płaszczyzny C_w część urojona zmiennej w zmienia się w granicach $-\pi \leq v < \pi$. Te dwie konwencje zilustrowane są na rysunku 1.7.

1.5 Różniczkowanie funkcji zmiennej zespolonej. Warunki Cauchy'ego-Riemanna

Niech $f(z)$ będzie określona w pewnym obszarze \mathcal{D}_z . Jeżeli istnieje granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \equiv f'(z), \quad (1.27)$$

to granicę tą nazywamy pochodną $f'(z)$, a o funkcji mówimy, że jest różniczkowalna w punkcie z_0 .

Formalnie koniecznym jest aby z_0 był *wewnętrznym punktem* \mathcal{D}_z – bo musimy „mieć do dyspozycji” wszystkie możliwe drogi, zmierzające do z_0 . Wartość pochodnej w punkcie z_0 nie może bowiem zależeć od sposobu zmierzania do tego punktu⁸.

Samo obliczanie ilorazów różnicowych nie różni się niczym od obliczania analogicznych wyrażeń w analizie funkcji zmiennej rzeczywistej. I tak na przykład, dla $f(z) = z^2$ mamy

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0.$$

Zauważmy, że istnienie pochodnej $f'(z_0)$ implikuje

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z = 0$$

czyli

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z) = f(z_0)$$

a więc *funkcja różniczkowalna jest z konieczności ciągła!* (w danym punkcie).

Wnioskowanie „odwrotne” jest fałszywe – świadczy o tym ten prosty przykład. Przypuśćmy, że chcemy obliczyć pochodną funkcji $w = f(z) = |z|^2$ w punkcie $z_0 \neq 0$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} = \frac{(z_0 + \Delta z)(\overline{z_0 + \Delta z}) - z_0 \overline{z_0}}{\Delta z} \\ &= \overline{z_0} + \overline{\Delta z} + z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \end{aligned}$$

Jeżeli zmierzamy do z_0 po osi rzeczywistej, to zachodzi

$$\Delta z = \Delta x \rightarrow \Delta z = \overline{\Delta z} \rightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{z_0} + z_0;$$

natomiast przy zmierzaniu wzdłuż osi urojonej mamy

$$\Delta z = i\Delta y \rightarrow \Delta z = -\overline{\Delta z} \rightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{z_0} - z_0.$$

⁸W przypadku zmiennej rzeczywistej warunkiem istnienia w punkcie x_0 była równość lewo- i prawostronnej granicy ilorazu różnicowego. Tutaj mamy do dyspozycji *każdy* „azymut”.

Obie granice są różne i pochodna dla $z_0 \neq 0$ *nie istnieje*, chociaż istnieje pochodna w $z = 0$; $f'(0) = 0$.

Każdą „drogę” prowadzącą z dowolnego (znajdującego się w skończoności) punktu płaszczyzny \mathcal{C}_z do wybranego punktu z_0 możemy traktować jako sekwencje nieskończenie małych przesunięć, równoległych bądź do osi $0x$, bądź do osi $0y$. Dlatego niezależność wartości granicy ilorazu różnicowego od drogi wystarczy sformułować i zweryfikować dla przyrostu zmiennej z występującego w równaniu (1.26) równego $\Delta z = \Delta x$ bądź $\Delta z = i\Delta y$.

W pierwszym przypadku mamy

$$f'(z)|_{z=z_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.28)$$

W drugim

$$f'(z)|_{z=z_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (1.29)$$

Równość części rzeczywistej i urojonej w obu przypadkach prowadzi do tak zwanych *warunków Cauchy'ego-Riemanna* – warunków koniecznych (choć nie wystarczających⁹) dla istnienia pochodnej – albo różniczkowalności – funkcji w punkcie z_0 :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.} \quad (1.30)$$

Funkcję zmiennej zespolonej, określoną w pewnym obszarze \mathcal{D}_z i różniczkowalną w każdym punkcie tego obszaru, nazywamy *funkcją analityczną* w obszarze \mathcal{D}_z . Od tego momentu nasze zainteresowania w kontekście funkcji zmiennej zespolonej będą ograniczały się do funkcji, które są analityczne. Można bez wielkiej przesady powiedzieć, że naruszenie warunków analityczności czyni daną funkcję mocno nieatrakcyjną z punktu jej potencjalnych zastosowań w opisie sytuacji fizycznych.

1.5.1 Konsekwencje warunków Cauchy'ego-Riemanna

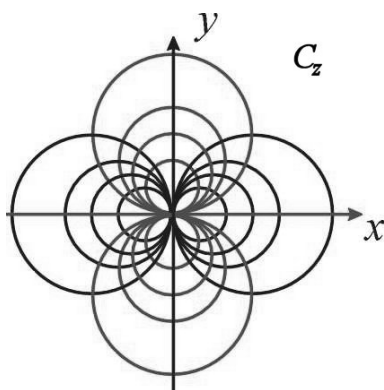
Rozważmy prostą funkcję zmiennej zespolonej

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \equiv u(x, y) + iv(x, y).$$

Jest to funkcja określona wszędzie (na całej płaszczyźnie $\overline{\mathcal{C}_z}$, a jej części: rzeczywista $u(x, y)$ i urojona $v(x, y)$ tworzą na \mathcal{C}_z rodziny krzywych o równaniach

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2C_1} \quad \text{albo} \\ (x - C_1)^2 + y^2 = C_1^2$$

⁹Dodatkowym warunkiem jest różniczkowalność funkcji $u(x, y)$ i $v(x, y)$ w otoczeniu punktu z_0 . Będziemy zakładali, że ten warunek jest spełniony.



Rysunek 1.8: Ortogonalne rodziny krzywych $u(x, y) = \text{const}$ i $v(x, y) = \text{const}$ dla $f(z) = 1/z$.

oraz

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2C_2} \quad \text{albo}$$

$$x^2 + (y + C_2)^2 = C_2^2.$$

Te dwie rodziny okręgów, stycznych odpowiednio do osi rzeczywistej $[u(x, y)]$ i urojonej $[v(x, y)]$ – por. rysunek 1.8 – przecinają się pod kątami prostymi, są wzajemnie *ortogonalne*. Ale tak będzie zawsze – dla każdej funkcji spełniającej warunki Cauchy’ego-Riemanna krzywe $u(x, y) = \text{const}$ i $v(x, y) = \text{const}$ są ortogonalne! Jeżeli bowiem w punkcie przecięcia się takich krzywych obliczyć $\text{grad} u(x, y) = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y}$ oraz $\text{grad} v(x, y) = \mathbf{e}_x \frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial v}{\partial y}$ to kąt pomiędzy stycznymi do przecinających się krzywych będzie równy kątowi pomiędzy prostopadłymi do nich wektorami gradientu. Ten ostatni zaś jest równy zeru, ponieważ

$$\text{grad} u \cdot \text{grad} v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{\text{C-R}}{=} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Powróćmy do postaci analitycznej warunków Cauchy’ego-Riemanna

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Różniczkując lewe równanie względem x , a prawe względem y , a następnie dodając oba równania stronami dostajemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Powtarzając analogiczne rachunki *mutatis mutandis* (różniczkując lewe równanie względem y , a prawe względem x i odejmując od lewego prawe), mamy

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Obie części funkcji analitycznej – rzeczywista i urojona – spełniają równanie Laplace'a — są *sprzężonymi funkcjami harmonicznymi*. Trudno w tym momencie nie pomyśleć, że z punktu widzenia fizyka, *różniczkowalne* funkcje zmiennej zespolonej stanowią „gotowe” rozwiązania tego – być może najbardziej powszechnego – równania fizyki o pochodnych cząstkowych. Konsekwencje tego faktu będziemy mieli okazję przedyskutować w podrozdziale poświęconym odwzorowaniom konformnym.

Ale to jeszcze nie wszystko. Przypuśćmy, że znamy część rzeczywistą $u(x, y) = y^3 - 3x^2y = \Re[f(x)]$ analitycznej funkcji $f(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy \stackrel{\text{C-R}}{=} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Możemy więc obliczyć

$$v(x, y) = \int^y (-6xy') dy' = -3xy^2 + \mathcal{C}(x),$$

gdzie – ze względu na to, że całkowaliśmy względem zmiennej y – stała całkowania może zależeć (i zależy!) od x . Tę zależność znajdziemy wykorzystując drugi z warunków Cauchy'ego-Riemanna

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \rightarrow \quad -3y^2 + \mathcal{C}'(x) = -3y^2 + 3x^2,$$

gdzie znak „'” oznacza różniczkowanie względem zmiennej x . Wykonując teraz odpowiednie całkowanie (względem zmiennej x) dostaniemy

$$\mathcal{C}'(x) = 3x^2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{C}(x) = x^3 + \mathcal{C}.$$

Część urojona $f(x, y)$ będzie więc równa

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + \mathcal{C},$$

a sama funkcja

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3) + i\mathcal{C} = \dots = i(z^3 + \mathcal{C}).$$

Pokazaliśmy więc, że znając jedną z części funkcji analitycznej znamy także i drugą, z dokładnością do stałej addytywnej \mathcal{C} , która jest liczbą.

Własności funkcji analitycznych możemy przedstawić w postaci krótkiego podsumowania:

1. Funkcja $w = f(z)$ jest różniczkowalna w punkcie $z = z_0$ jeżeli istnieje granica

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z}, \quad (1.31)$$

niezależna od sposobu zmierzania z Δz do zera, albo – kładąc $\Delta f = f(z) - f(z_0)$ i $\Delta z = z - z_0$ – ze zmienną z do z_0 .

2. Funkcja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ jest różniczkowalna w punkcie $z = x + iy$, wtedy i tylko wtedy jeżeli: (1) funkcje u i v i ich pochodne u_x, u_y, v_x, v_y są ciągłe w z ; (2) spełnione są warunki Cauchy'ego-Riemanna

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.}$$

3. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest różniczkowalna w otoczeniu punktu z_0 (także w samym z_0), to nazywamy ją *analityczną* (także *holomorficzną* lub *regularną*) w punkcie z_0 .

Na przykład funkcja $f(x) = |z|^2$ ma pochodną (tylko!) w punkcie $z = 0$ – a więc nie jest w tym punkcie analityczna.

4. Funkcję, która jest analityczna na całej płaszczyźnie zespolonej \mathcal{C}_z (za wyjątkiem punktu w nieskończoności) nazywamy funkcją całkowitą. Każdy wielomian

$$W_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

jest funkcją całkowitą.

5. Jeżeli $f(z)$ jest analityczna w każdym otoczeniu punktu z_0 , za wyjątkiem samego z_0 to punkt z_0 nazywamy *izolowanym (odosobnionym) punktem osobliwym* funkcji $f(z)$. Takim punktem będzie na przykład punkt $z = 0$ dla funkcji $f(z) = 1/z$.

Ale funkcja $f(x) = |z|^2$ nie ma odosobnionych punktów osobliwych (bo *niegdzie* nie jest analityczna!).

6. Jeżeli $f(z)$ jest analityczna w obszarze \mathcal{D}_z to jest tam ciągła.
7. Suma, iloczyn, a także iloraz funkcji analitycznych (jeżeli ta w mianowniku $\neq 0$) są analityczne.
8. Funkcja odwrotna do funkcji analitycznej jest analityczna. Przypuśćmy bowiem, że $w = f(z)$ jest analityczna w obszarze \mathcal{D}_z i pochodna $|f'(z_0)| \neq 0$ w otoczeniu $z_0 \in \mathcal{D}_z$. Wówczas w otoczeniu $w_0 = f(z_0)$, punktu należącego do obszaru \mathcal{D}_w – obrazu obszaru \mathcal{D}_z przy odwzorowaniu danym funkcją $f(z)$ – istnieje

$$z = \phi(w) = f^{-1}(w).$$

Funkcja ϕ jest analityczną (w punkcie w_0); zauważmy bowiem, że aby istniała funkcja odwrotna musimy „rozwickłać” $u(x, y)$ i $v(x, y)$ aby uzyskać $x(u, v)$ i $y(u, v)$. Wymaga to aby wyznacznik (Jacobian)

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y \neq 0$$

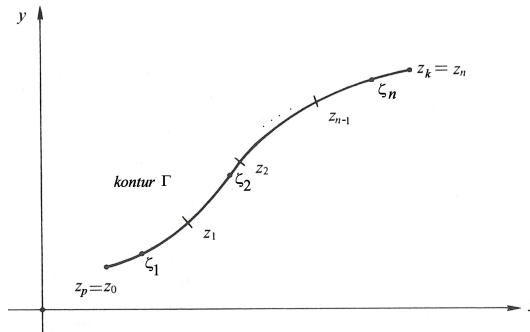
a z warunków Cauchy'ego-Riemanna mamy

$$u_x v_y - v_x u_y \stackrel{\text{C-R}}{=} u_x^2 + v_x^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

9. Jeżeli dana jest część rzeczywista (urojona) funkcji analitycznej, to jej część urojona (rzeczywista) jest znana z dokładnością do stałej addytywnej.
10. Część rzeczywista i urojona funkcji analitycznej są funkcjami harmonicznymi.
11. Izolinie $u(x, y) = \text{const}$ i $v(x, y) = \text{const}$ przecinają się pod kątami prostymi (są ortogonalne).
12. Funkcja analityczna ma rozwinięcie w postaci szeregu Taylora. O tej bardzo istotnej własności będziemy szerzej mówić w podrozdziale 1.9.2.

1.6 Całka funkcji zmiennej zespolonej

Całkowanie w dziedzinie zespolonej jest znowu operacją, która będzie odwoływała się do naszych wiadomości z całkowania funkcji zmiennej rzeczywistej, a także do techniki obliczania całek krzywoliniowych. Rozważmy krzywą regularną, *kontur* Γ , na płaszczyźnie \mathcal{C}_z , której początek wyznacza punkt $z_0 = z_p$ (p jak początek), a koniec – punkt $z_n = z_k$ (k jak koniec) – por. rysunek 1.9. Kontur podzielony



Rysunek 1.9: Do określenia całki konturowej z funkcji zmiennej zespolonej.

jest na n części; w każdej z nich znajduje się punkt płaszczyzny zespolonej ζ_i $i = 1, \dots, n$. Granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) (z_i - z_{i-1}),$$

przy długości największego spośród segmentów krzywej zmierzającej do zera, nazywamy całką z funkcji $f(z)$ wzdłuż konturu Γ i zapisujemy jako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) (z_i - z_{i-1}) \equiv \int_{z_p}^{z_k} f(z) dz. \quad (1.32)$$

Ogólnie, korzystając z oczywistych

$$z = x + iy; \quad f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

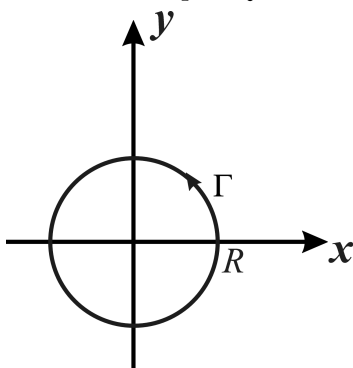
możemy taką całkę zapisać jako sumę dwóch całek

$$\begin{aligned} \int_{z_p}^{z_k} f(z) dz &= \int_{x_0, y_0}^{x_n, y_n} [u(x, y) + iv(x, y)] [dx + idy] \\ &= \int_{x_0, y_0}^{x_n, y_n} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{x_0, y_0}^{x_n, y_n} [v(x, y)dx + u(x, y)dy], \end{aligned}$$

gdzie obie całki, to całki krzywoliniowe z wektorów (liczb zespolonych) na płaszczyźnie C_z ; techniki ich obliczania są analogiczne jak w przypadku całek krzywoliniowych. W szczególności zmiana kierunku obiegu konturu będzie powodowała zmianę znaku całki.

Samo obliczanie jest proste – w przypadku gdy („dwuwymiarowa”) zmienna z znajduje się na konturze, traci ona jeden stopień swobody i jej część rzeczywistą x oraz część urojoną y – albo jej moduł r i argument θ_z – możemy poddać parametryzacji, to znaczy wyrazić je jako funkcje jednej zmiennej t .

Jako przykład rozpatrzmy całkowanie funkcji z^n po konturze Γ będącym okręgiem o środku w początku układu i promieniu R :



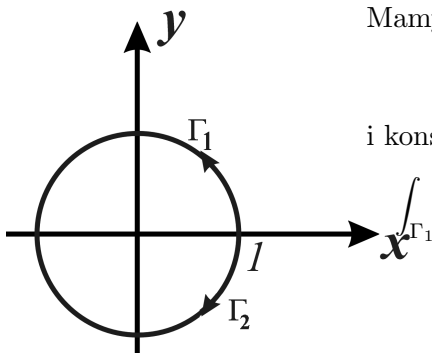
$$\text{Mamy: } z = Re^{i\theta}; \quad dz = iRe^{i\theta}d\theta; \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Parametrem t będzie kąt θ . Nasza całka to

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^n dz &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ &= \boxed{n \neq -1} = i \frac{R^{n+1}}{i(n+1)} e^{i(n+1)\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Ta sama całka dla $n = 0$ jest równa $R \cdot 2\pi i$.

Inny przykład – rozpatrzmy całkę po górnym półokręgu $|z| = 1$ z funkcji $f(z) = \bar{z}$. I tutaj dokonujemy parametryzacji; parametrem jest znowu kąt θ .



$$\text{Mamy } z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta; \quad \bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta;$$

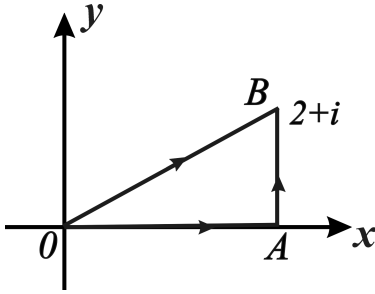
$$dz = -\sin \theta + i \cos \theta; \quad \theta \in [0, \pi]$$

i konsekwentnie

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \bar{z} dz &= \int_0^{\pi} (\cos \theta - i \sin \theta)(-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = \pi i. \end{aligned}$$

Czytelnik zechce sprawdzić, że całka wzdłuż *dolnego* półokręgu, a więc konturu Γ_2 ($\theta \in [0, -\pi]$) będzie równa $-\pi i$. Jeżeli uwzględnimy kierunki obiegu po obu półokręgach (dodatni dla konturu Γ_1 , ujemny dla Γ_2) to, zgodnie z wcześniejszymi definicjami, całka po zamkniętym okręgu jednostkowym z funkcji $f(z) = \bar{z}$ będzie równa $2\pi i$.

Jako kolejny przykład obliczmy całkę po trójkącie prostokątnym $0AB$ z funkcji $f(z) = z^2$. Całkując po przeciwprostokątnej $0B$ mamy



$$\mathcal{I}_1 = \int_0^B z^2 dz = \dots$$

Na odcinku $0B$ mamy $x = 2y$ stąd:

$$dz = (dx + idy) = (2 + i)dy; \text{ a także: } z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = 3y^2 + i4y^2.$$

Przycynek od tego odcinka będzie równy

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 (3y^2 + i4y^2)(2 + i)dy = \frac{2}{3} + i\frac{11}{3}.$$

Na odcinkach $0A$ i AB dostaniemy analogicznie

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^A z^2 dz + \int_A^B z^2 dz = \dots$$

$$0A : \boxed{z = x} \rightarrow dz = dx \quad z^2 = x^2$$

$$AB : \boxed{z = 2 + iy} \rightarrow dz = idy \quad z^2 = (2 + iy)^2$$

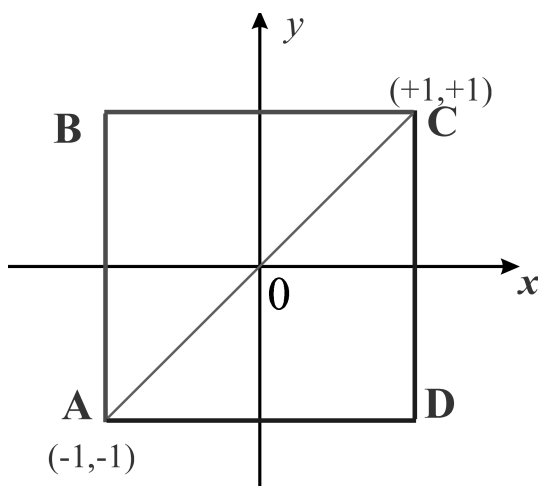
$$\mathcal{I}_2 = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 (2 + iy)^2 idy = \dots = \frac{2}{3} + i\frac{11}{3}.$$

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \rightarrow \mathcal{I}_3 = \oint_{0AB0} = 0.$$

Proponujemy teraz, aby Czytelnik zechciał sam obliczyć całkę $\int_{AC} \cos z dz$ pomiędzy dwoma narożami kwadratu, którego środek znajduje się w początku układu, a którego wierzchołki A, B, C i D mają współrzędne $\pm 1, \pm 1$ (por. rysunek 1.10) korzystając z różnych dróg pomiędzy punktami A i C : ABC , ADC i bezpośrednio po przekątnej kwadratu AOC . W pierwszym przypadku, na drodze AB mamy $dz = idy$, $\cos z = \cos(-1 + iy)$; na drodze BC — $dz = dx$, $\cos z = \cos(x + i)$. Całka jest równa $2 \sin(1 + i)$.

Analogicznie przeprowadzimy rachunki na drodze ADC . Na przekątnej AOC mamy zaś $x = y$. Okaże się, że otrzymujemy taki sam wynik we wszystkich trzech wariantach! Jeżeli tak, to łatwo wywnioskujemy, że całka po konturze całego kwadratu będzie równa zeru, podobnie jak całki po trójkątach prostokątnych ABC i ADC .

Zerowanie się całki po konturze zamkniętym oznacza, że wartość całki pomiędzy dwoma punktami, leżącymi na tym konturze, nie zależy od łączącej je drogi.



Rysunek 1.10: Kontur do obliczenia całki $\int_{AC} \cos z dz$.

Ale nie zawsze tak będzie. Sprawdźmy, co stanie się jeżeli po tych samych konturach ABC i ADC z rysunku 1.10 będziemy całkować funkcję $f(z) = \frac{1}{z}$. Aby obliczyć odpowiednie całki przekształcamy funkcję podcałkową

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad dz = dx + idy;$$

mamy też: AB i DC : $x = \pm 1 \rightarrow dx = 0$, BC i AD : $y = \pm 1 \rightarrow dy = 0$.

Dostajemy dwa *różne* wyniki:

$$\int_{ABC} \frac{1}{z} dz = -4i \operatorname{arctg} 1 = -i\pi; \quad \int_{ADC} \frac{1}{z} dz = 4i \operatorname{arctg} 1 = i\pi.$$

Wynik zależy od wybranej drogi! Jeśli tak, to całka po *pełnym* kwadracie nie będzie już równa zeru. Co więcej, droga $A0C$ będzie w tym przypadku wykluczona – całkowana funkcja jest osobliwa w punkcie $z = 0$.

Z przytoczonych przykładów widać jasno, że powinno istnieć jakieś kryterium, którego spełnienie powoduje, że wynik całkowania po konturze zamkniętym jest równy zeru. Kryterium takie istnieje, jest bardzo proste, ale na tyle ważne, że zasługuje na osobny (następny) podrozdział.

1.7 Twierdzenie całkowe Cauchy'ego

Z analizy pola wektorowego wiemy, że całka krzywoliniowa z wektora, wzdłuż zamkniętego konturu, równa jest całce powierzchniowej, po powierzchni zawartej wewnątrz konturu całkowania, ze składowej rotacji tegoż wektora – składowej prostopadłej do płaszczyzny, w której leży kontur całkowania. To twierdzenie nosi

nazwę twierdzenie Stokesa – skorzystamy z niego przy obliczaniu całek po konturach *zamkniętych* na płaszczyźnie zespolonej. Składową rotacji wektora będzie tu oczywiście składowa z -owa – wzór Stokesa przyjmie postać

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Gamma} a_x dx + a_y dy = \iint_{\Sigma} (\text{rot} \mathbf{a})_z d\sigma = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) d\sigma.$$

Przekształćmy według tego wzoru naszą całkę

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= \oint_{\Gamma} [u(x, y) + iv(x, y)] [dx + idy] \\ &= \oint_{\Gamma} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \oint_{\Gamma} [v(x, y)dx + u(x, y)dy]. \end{aligned}$$

Obie całki – w oparciu o wzór Stokesa – będą równe zeru! Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\sigma \stackrel{\text{C-R}}{=} 0 \\ \oint_{\Gamma} [v(x, y)dx + u(x, y)dy] &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\sigma \stackrel{\text{C-R}}{=} 0 \end{aligned}$$

Skorzystanie z warunków Cauchy'ego-Riemanna¹⁰ wynika z analityczności funkcji $f(z)$. Możemy zatem sformułować

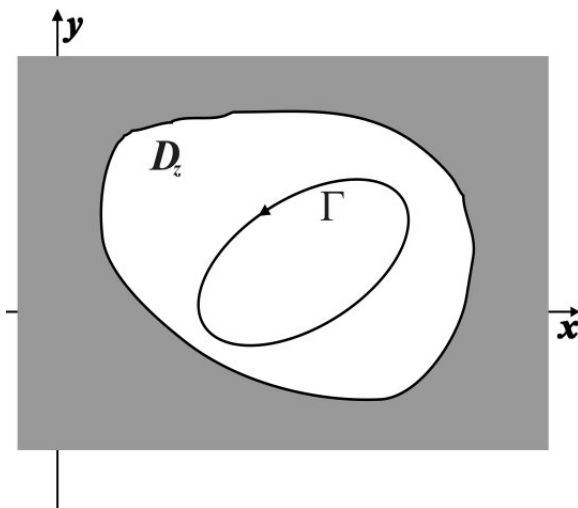
Twierdzenie całkowe Cauchy'ego: *Jeżeli $f(z)$ jest analityczna we wszystkich punktach wewnętrznych zamkniętego konturu Γ , a także we wszystkich punktach samego konturu, to całka*

$$\boxed{\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.} \tag{1.33}$$

Sformułowane powyżej twierdzenie odnosi się do obszarów *jednospójnych*, a więc takich których brzeg jest jedną krzywą, albo – mówiąc ściśle – takich, których brzeg można „ściągnąć” (skurczyć) do punktu, a w operacji „ściągnięcia” biorą udział wyłącznie punkty wewnętrzne danego obszaru. (Por. rysunek 1.11).

Dla obszarów wielospójnych – takich jak na rysunku 1.12(a)– uogólnienie twierdzenia Cauchy'ego ilustruje część (b) rysunku. Wynika z niego, że i w tym przypadku całka wokół konturu zamkniętego $\oint_{AB CDEFG} f(z) dz = 0$. Całki po „prostych” elementach konturu – łącznikach GA i DE są równe co do wartości bezwzględnej, lecz różnią się znakiem, a więc ich wspólny przyczynik do całki jest równy zeru. Analogiczną sytuację mamy też dla całek po konturze „zewnątrznym” $ABCD$ i „wewnętrzny” EFG .

¹⁰Ten – dla nas, fizyków – bardzo przekonujący wywód twierdzenia całkowego Cauchy'ego ma jedną wadę: oparcie się na wzorze Stokesa wymaga ciągłości pierwszych pochodnych u_x, u_y, v, v_y . Istnieje jednak (podany przez Goursata) dowód który *też jest bardzo fizyczny*, a który „rezygnuje” z tego wymogu. Zainteresowany Czytelnik znajdzie go np. w podręczniku Arfkena.



Rysunek 1.11: Kontur Γ w jednospójnym obszarze analityczności D_z .

1.7.1 Twierdzenie całkowe Cauchy'ego – konsekwencje

Rozważmy jednospójny obszar D_z , a w nim całkę

$$F(z) \equiv \int_{z_0}^z f(z') dz' \quad (1.34)$$

(por. rys. 1.13). Zakładamy, że funkcja $f(z)$ jest w obszarze D_z funkcją *analityczną*. Na mocy twierdzenia całkowego Cauchy całka (1.33) *nie zależy od wyboru* krzywej łączącej punkty z_0 i z i jest *jednoznaczną* funkcją z . W odległości Δz od punktu z wybierzmy punkt $z + \Delta z$ i utwórzmy różnicę

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(z') dz',$$

równą całce z funkcji $f(z)$ pomiędzy dwoma punktami z i $z + \Delta z$ (por. rysunek 1.14). Jeżeli zapiszemy funkcję $f(z)$ w postaci całki

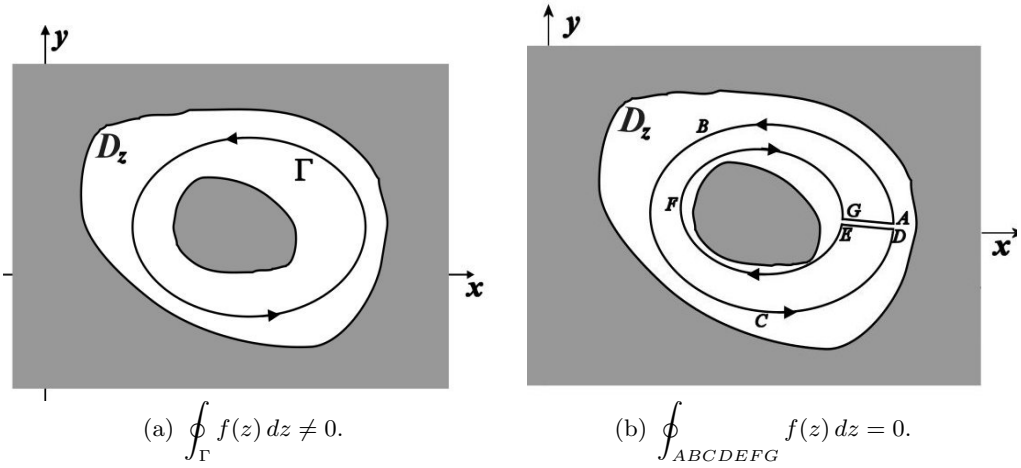
$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} dz' = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) dz', \quad (1.35)$$

to możemy skonstruować różnicę ilorazu różnicowego funkcji $F(z)$ i samej $f(z)$

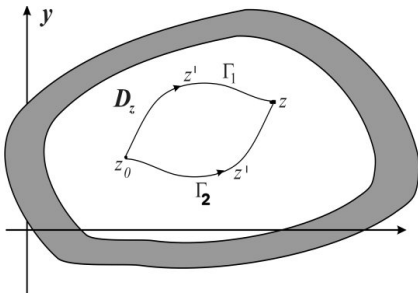
$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(z') - f(z)] dz'. \quad (1.36)$$

Funkcja $f(z)$ jest funkcją analityczną, a więc jest ciągła. Dla punktów z' dostatecznie bliskich punktu z , czyli dla $|z - z'| < \delta$ albo $|\Delta z| < \delta$ mamy więc $|f(z') - f(z)| < \epsilon$ i konsekwentnie

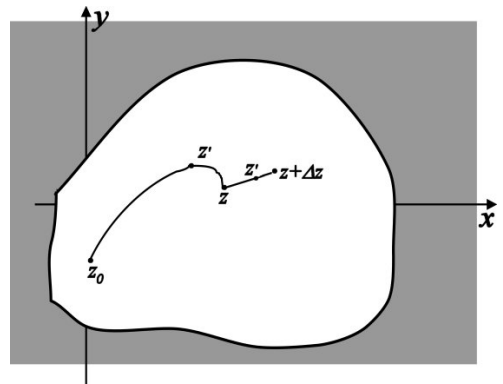
$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{1}{\Delta z} \cdot \epsilon \cdot \Delta z < \epsilon.$$



Rysunek 1.12: Twierdzenie całkowe dla obszaru dwuspójnego.
 Część szara płaszczyzny zespolonej to obszary, w których funkcja $f(z)$ nie jest (nie musi być) analityczna.



Rysunek 1.13: Dwa kontury dla
 $F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz'.$



Rysunek 1.14: $F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(z') dz'.$

Przechodząc do wielkości nieskończenie małych możemy zapisać

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z). \quad (1.37)$$

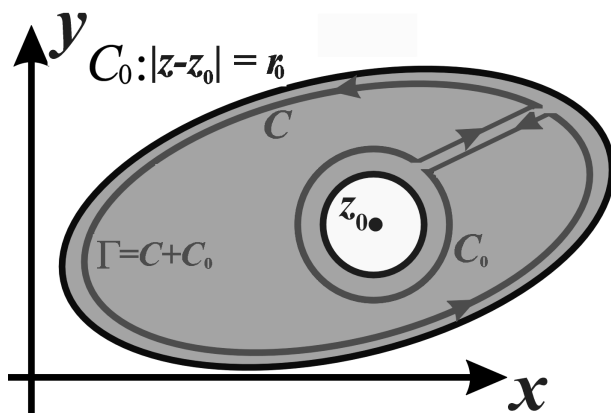
Ten iloraz różnicowy, równanie (1.36), to oczywiście nic innego jak *pochodna* funkcji $F(z)$, określonej wzorem (1.33). Pokazaliśmy zatem, że całka z funkcji analitycznej

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z') dz'$$

jest *analityczną funkcją* górnej granicy całkowania. Jej pochodna to

$$F'(z) = f(z). \quad (1.38)$$

1.8 Wzór całkowy Cauchy'ego



Rysunek 1.15: Rysunek do wykazania wzoru całkowego Cauchy'ego.

Rozpatrujemy funkcję $f(z)$, analityczną w obszarze ograniczonym \mathcal{D}_z . Wewnątrz obszaru wybieramy pewien punkt z_0 i tworzymy kontur Γ , składający się z konturu C , okręgu $C_0(z_0, r_0)$ oraz dwóch równoległych „łączników” (rys. 1.15). Jeżeli wprowadzimy teraz funkcję

$$\frac{f(z)}{z - z_0} \quad (1.39)$$

to funkcja ta jest analityczna we wszystkich punktach naszego obszaru \mathcal{D}_z , za wyjątkiem punktu z_0 . Na mocy twierdzenia całkowego Cauchy'ego całka z niej po konturze Γ – nie zawierającego w swoim wnętrzu punktu z_0 ! – jest równa zero, a ponieważ przyczynki po dwóch łącznikach dają w sumie zero, mamy

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0. \quad (1.40)$$

Znak minus pojawiający się w (1.39) wynika z faktu, że kontur C jest obiegany w kierunku dodatnim (przeciwным do ruchu wskazówek zegara; obiegany obszar pozostaje po lewej stronie); natomiast kontur C_0 — w kierunku ujemnym (zgodnym z ruchem wskazówek zegara; obszar pozostaje po prawej stronie).

Przekształćmy teraz wzór (1.39), dodając i odejmując w liczniku drugiej całki $f(z_0)$

$$\oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0) \oint_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} + \oint_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (1.41)$$

Na okręgu C_0 mamy $z - z_0 = r_0 e^{i\theta}$; $dz = ir_0 e^{i\theta} d\theta$, stąd

$$\oint_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Druga całka może być uczyniona dowolnie małą¹¹, tak więc

$$2\pi i f(z_0) = \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0},$$

albo

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (1.42)$$

Otrzymany wynik jest co najmniej zaskakujący. Okazuje się bowiem, że zadając na jakimś konturze wartości funkcji $f(z)$, analitycznej wewnątrz tego konturu i na nim samym, możemy określić wartości tej funkcji w dowolnym punkcie, znajdującym się wewnątrz konturu! Dodajmy, że rozumowanie można bez trudności uogólnić na przypadek, kiedy konturem jest brzeg obszaru \mathcal{D}_z (przy spełnieniu warunku ciągłości funkcji $f(z)$ na tym brzegu¹². Wówczas nasze wnioski z wzoru Cauchy'ego są jeszcze bardziej radykalne – zadanie wartości funkcji na brzegu obszaru jej analityczności specyfikuje jej wartości *w każdym punkcie wewnętrznym tego obszaru*.

Być może wzór całkowy Cauchy'ego wyda nam się mniej zaskakujący, jeżeli uzmysłowimy sobie, że „od początku” mamy do czynienia z niezwykle funkcjami. Warunki Cauchy'ego-Riemanna nakazują bowiem tym funkcjom automatyczne spełnianie równania Laplace'a, a z teorii równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych wiemy, że tak zwane *warunki brzegowe* mają zasadniczy wpływ na postać rozwiązania problemu opisanego danym układem: równanie różniczkowe plus warunki, jakie spełnia rozwiązanie na krańcach obszaru. Wzór całkowy Cauchy'ego pozwoli nam wyprowadzić także pewne ilościowe argumenty, rozszerzające naszą wiedzę o zachowaniu się tych niezwykle funkcji, jakimi są funkcje zmiennej zespolonej.

¹¹Wart to przemyśleć „do końca”. Przy $z \rightarrow z_0$ funkcja podcałkowa to nic innego jak pochodna $f'(z_0)$, której wartość jest ograniczona (funkcja $f(z)$ jest funkcją analityczną). Tę ograniczoną wartość całkujemy po konturze, którego długość zmierza do zera. Wartość całki jest ograniczona iloczynem maksymalnej wartości funkcji podcałkowej i długości konturu – przy $z \rightarrow z_0$ długość konturu, a więc i sama całka dążą do zera.

¹²Zauważmy bowiem, że na samym brzegu nie możemy wymagać analityczności funkcji f – punkty brzegu *nie* są punktami wewnętrznymi obszaru i nie będzie istniało *otoczenie* takiego punktu brzegowego, w którym nasza funkcja jest różniczkowalna.

1.8.1 Wzór całkowy Cauchy'ego – konsekwencje

Przepiszmy raz jeszcze nasz wzór (1.41), opuszczając wskaźnik 0 przy punkcie, w którym określamy wartość funkcji (jest to *dowolny* punkt wewnętrzny obszaru analityczności funkcji), a także wprowadzając nowe oznaczenie zmiennej całkowania po konturze, które będziemy od tej chwili stosować – literę z zastępujemy (to ogólnie przyjmowana konwencja) literą grecką ζ . Nowa postać wzoru to

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.43)$$

Co teraz stanie się, spróbujemy obliczyć pochodną naszej $f(z)$, różniczkując względem z *pod znakiem całki*? Otrzymamy

$$\frac{d}{dz} f(z) = f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \quad (1.44)$$

Różniczkowanie pod znakiem całki wymagałoby weryfikacji jej bezwzględnej zbieżności. Ale możemy przeprowadzić weryfikację inaczej, posługując się definicją pochodnej. Konkretnie

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \oint_C \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \oint_C \frac{f(\zeta) \Delta z}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} d\zeta \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

W analogiczny sposób możemy zweryfikować „poprawność” różniczkowania pod znakiem całki formuły Cauchy'ego w celu obliczenia drugiej, trzeciej, ..., n -tej pochodnej. Bez szczegółowych weryfikacji, przyjmujemy wynik

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (1.45)$$

Już sama „technika” obliczania pochodnej zapewnia jej analityczność (por. podrozdział 1.7.1). A więc wykazaliśmy ważne

Twierdzenie: *Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w danym punkcie, to wszystkie jej pochodne są funkcjami analitycznymi w tym punkcie.*

Mówiąc językiem potocznym – funkcja analityczna w pewnym obszarze ma w tym obszarze pochodne *wszystkich* rzędów i wszystkie te pochodne są – w danym obszarze – funkcjami analitycznymi. Znowu objawia się „niezwykłość” funkcji analitycznych – funkcje zmiennej rzeczywistej takiej własności nie mają. Funkcja zmiennej rzeczywistej może mieć pierwszą pochodną i nie mieć drugiej pochodnej.

1.8.2 Twierdzenie Morery

Implikacja zawarta w twierdzeniu całkowym Cauchy'ego: analityczność funkcji \implies znikanie całki po konturze zamkniętym z funkcji $f(z)$ skłania nas do zastanowienia się czy istnieje implikacja odwrotna – czy z faktu znikania całki po

konturze zamkniętym z pewnej funkcji $f(z)$ możemy wnioskować o jej analityczności. Sprawę tę reguluje właśnie

Twierdzenie Morery: *Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła wewnątrz obszaru \mathcal{D}_z i jeżeli dla każdego zamkniętego konturu Γ wewnątrz $\overline{\mathcal{D}_z}$*

$$\oint_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

to $f(z)$ jest analityczna we wszystkich punktach \mathcal{D}_z . Zamiast dowodu przypomnijmy tylko, że dyskutując wzór $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ korzystaliśmy tylko z:

(1) ciągłości $f(z)$ i (2) znikania całki z $f(z)$ po konturze zamkniętym.

Wystarczyło to do wykazania analityczności $F(z)$.

Mieliśmy też $f(z) = F'(z)$, a wiemy już, że pochodna funkcji analitycznej jest funkcją analityczną.

1.8.3 Zasada minimum i maksimum

To kolejna własność funkcji analitycznych, której uzasadnienie może być oparte na wzorze całkowym Cauchy'ego. Zachodzi bowiem

Twierdzenie: *jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna – a więc i ciągła – wewnątrz obszaru \mathcal{D}_z i ciągła na brzegu obszaru B_D (a więc ciągła w $\overline{\mathcal{D}_z}$) to jej moduł albo jest stały w $\overline{\mathcal{D}_z}$, albo osiąga swoje maksimum (minimum) w punkcie należącym do brzegu obszaru.*

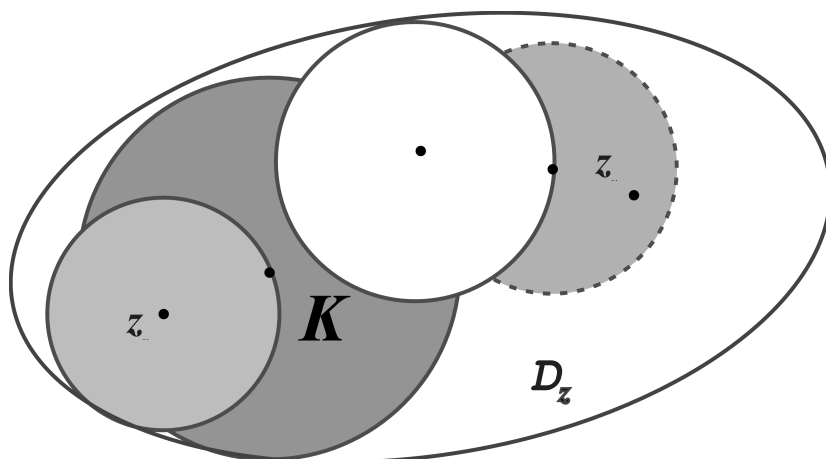
Wykazanie tego, przynajmniej, nieco zaskakującego faktu można łatwo przeprowadzić posługując się metodą dowodu niewprost (*reductio ad absurdum*). Zakładamy, że (niech to będzie na przykład) maksimum jest osiąganego w punkcie wewnętrznym \mathcal{D}_z , dla $z = z_w$. Mamy więc: $|f(z_w)| = MX \geq |f(z)|$, dla wszystkich $z \in \overline{\mathcal{D}_z}$.

Ze wzoru całkowego Cauchy'ego – kontur $K(z_w, R)$ $\zeta = z_w + Re^{i\theta}$

$$2\pi MX = \left| \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_w} d\zeta \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(\zeta)| d\theta \leq MX \cdot 2\pi. \quad (1.46)$$

Stąd wniosek $|f(\zeta)| = MX$ dla każdego punktu okręgu K a ponieważ R możemy brać dowolnie małe – dla każdego punktu koła K .

Rysunek 1.16 ilustruje sposób w jaki możemy „przenieść” konieczność $|f(\zeta)| = MX$ dla dowolnego punktu wewnętrznego \mathcal{D}_z . Po argumentacji, z której wynika stałość funkcji $f(z)$ wewnątrz koła K , obieramy na jego obwodzie punkt, który staje się środkiem nowego koła i w analogiczny sposób wykazujemy w jego wnętrzu $|f(z)| = MX$. Operację powtarzamy, aż do „wypełnienia” całego \mathcal{D}_z układem takich kół, w których $|f(z)| = MX$. Wartość MX albo nie może być więc maksimum, albo funkcja $|f(z)| \equiv MX$ wewnątrz całego \mathcal{D}_z .



Rysunek 1.16: Rysunek do wykazania zasady minimum (maksimum).

1.8.4 Twierdzenie Liouville'a

Przypomnijmy całkę Cauchy'ego, która określa pochodną n -tego rzędu funkcji analitycznej $f(z)$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (1.45)$$

Jako kontur całkowania przyjmijmy okrąg $K(z; R)$, i załóżmy, że *wewnątrz tego konturu i na samym konturze* nasza funkcja jest ograniczona: $|f(z)| \leq M$. Przeprowadzając standardowe oszacowanie całki uzyskujemy

$$\zeta = z + Re^{i\theta}; \quad \zeta - z = Re^{i\theta}; \quad d\zeta = iRe^{i\theta} d\theta$$

a stąd

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{R^n}. \quad (1.47)$$

W szczególności dla $n = 1$ mamy $|f'(z)| < M/R$. A jeżeli tak, to mamy kolejne

Twierdzenie: *Funkcja całkowita i ograniczona na całej płaszczyźnie zespolonej musi być stałą.*

Dowód jest natychmiastowy. Całkowitość funkcji to analityczność wszędzie na płaszczyźnie C_z . Dla takiej funkcji z promieniem koła R możemy przejść do nieskończoności i wartość pierwszej pochodnej dla dowolnego punktu z będzie równa zero – a to implikuje oczywiście stałość funkcji.

Z zasady maksimum i minimum i z ostatniego twierdzenia Liouville'a wynika jasno, że aby funkcja zmiennej zespolonej nie była banalną stałą, to musi być ona choć w jednym punkcie osobliwa. Czasami takim punktem będzie punkt w nieskończoności – przykładem funkcji, które są analityczne na całej płaszczyźnie

zespolonej *za wyjątkiem* punktu w nieskończoności są sinus i kosinus zmiennej zespolonej. Czytelnik sam przeprowadzi analizę tego faktu; przypomnijmy że

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \\ \sin z &= \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.\end{aligned}$$

Twierdzenie Liouville'a pozwala w natychmiastowy sposób udowodnić

Podstawowe twierdzenie algebry: *Każdy wielomian*

$$W_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

ma przynajmniej jeden pierwiastek,

które Czytelnik poznał zapewne jeszcze w szkole średniej, lub na pierwszym roku studiów. I w tym wypadku korzystamy z argumentacji typu *reductio ad absurdum*, rozważając funkcję

$$f(z) = \frac{1}{W_n(z)}.$$

Gdyby wielomian W_n nigdzie nie był równy zeru, to $f(z)$ byłaby *wszędzie* analityczna; co więcej, przy $z \rightarrow \infty$ moduł $|f(z)| = 1/|W_n(z)|$ dąży o zera; funkcja jest ograniczona – na mocy twierdzenia Liouville'a byłaby więc stałą.

1.9 Szeregi funkcji analitycznych

Zacniemy od krótkiego przeglądu własności *szeregów funkcji zmiennej zespolonej*. Będzie nam zależało tutaj na sformułowaniu pewnych twierdzeń, analogicznych do twierdzeń z analizy funkcji zmiennej rzeczywistej. W szczególności istotnym będzie samo pojęcie szeregu, zbieżności – a zwłaszcza zbieżności jednostajnej. Są to jednak pojęcia, które nie powinny stanowić większych problemów dla Czytelnika, mającego za sobą kurs analizy matematycznej.

1.9.1 Szereg funkcyjny, zbieżność

Rozważamy obszar D_z płaszczyzny zespolonej. Wyrażenie (sumę nieskończoną)

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z),$$

gdzie $u_k(z)$ to jednoznaczna funkcja zmiennej zespolonej, nazywamy *szeregiem funkcyjnym*. Dla $z = z_0$, gdzie z_0 jest określoną *liczbą zespoloną* szereg funkcyjny staje się zwykłym szeregiem liczbowym.

Mówimy – zupełnie tak samo jak w przypadku szeregów i ciągów funkcji zmiennej rzeczywistej – że ciąg funkcyjny funkcji zmiennej zespolonej jest zbieżny jeżeli

odpowiadający mu ciąg liczbowy, a więc dla określonego z , jest zbieżny. Taką zbieżność ciągu zapisujemy w języku formalnym w następujący sposób

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \quad \left| f(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z) \right| < \epsilon; \quad \forall n \geq N; \quad \boxed{N = N(\epsilon, z)}. \quad (1.48)$$

Zauważmy, że wartość graniczna wskaźnika N , dla którego skończona suma zbliża się do $f(z)$ na odległość mniejszą niż pewne (zadane z góry) ϵ , zależy od wartości ϵ , a także od wartości zmiennej z .

Jeżeli teraz rozważamy obszar \mathcal{D}_z płaszczyzny zespolonej i punkty $z \in \mathcal{D}_z$, to możemy wprowadzić pojęcie zbieżności jednostajnej. Formalnie zapiszemy

$$\forall \epsilon > 0, \quad \boxed{\exists N = N(\epsilon)}, \quad \left| f(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z) \right| < \epsilon; \quad \forall n \geq N. \quad (1.49)$$

Wartość graniczna wskaźnika N zależy już tylko od ϵ – szereg będzie zbieżny dla każdego $z \in \mathcal{D}_z$. Zbieżność jednostajną szeregów będziemy oznaczali symbolem \Rightarrow .

Kryterium Weierstrassa (warunek wystarczający zbieżności jednostajnej): Jeżeli $\forall z$ i $\forall n$ $|u_n(z)| < |a_n|$ i szereg liczbowy $\sum_1^\infty |a_n|$ jest (bezwzględnie) zbieżny, to szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

jest jednostajnie zbieżny.

Innym kryterium jest

Kryterium Cauchy’ego (warunek konieczny i wystarczający):

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \quad \left| \sum_{k=1}^{n+m} u_k(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z) \right| < \epsilon; \quad \forall n \geq N, \forall m. \quad (1.50)$$

W pierwszym rzędzie będą nas interesowały właśnie szeregi jednostajnie zbieżne. Podstawowe (także z punktu „praktycznego”) własności takich szeregów jednostajnie zbieżnych możemy wymienić w punktach.

1. Jeżeli: (1) funkcje $u_n(z)$ są ciągłe $\forall z \in \mathcal{D}$ oraz
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$
to $f(z)$ jest funkcją ciągłą $\forall z \in \mathcal{D}$.
2. Jeżeli: (1) funkcje $u_n(z)$ są ciągłe $\forall z \in \mathcal{D}$ oraz
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$
to (bardzo ważne!)

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Gamma} u_k(z) dz; \quad \forall z \in \mathcal{D},$$

a więc szereg jednostajnie zbieżny możemy „całkować wyraz po wyrazie”.

3. **Pierwsze twierdzenie Weierstrassa.** Niech:(1) funkcje $u_n(z)$ będą ciągłe $\forall z \in \mathcal{D}$ oraz(2) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$ w $\overline{\mathcal{D}}' \in \mathcal{D}$. Wówczas

- funkcja $f(z)$ jest analityczna w \mathcal{D} ;

•

$$f^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)}(z);$$

•

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)}(z) \Rightarrow f^{(n)} \quad \text{w } \overline{\mathcal{D}}' \in \mathcal{D}.$$

Ostatnia własność oznacza, że szereg jednostajnie zbieżny możemy różniczkować wyraz po wyrazie. Zauważmy jednak, jak istotne jest operowanie (nie)domkniętymi obszarami. Sam szereg funkcji $u_k(z)$ może być jednostajnie zbieżny w *domkniętym obszarze* $\overline{\mathcal{D}}$ – ale wnioski o jednostajnej zbieżności szeregów pochodnych funkcji $u_k^{(n)}(z)$ możemy formułować dla obszaru domkniętego $\overline{\mathcal{D}}' \in \overline{\mathcal{D}}$ – a więc podobszaru, którego wszystkie punkty, łącznie z brzegowymi, są punktami wewnętrznymi obszaru \mathcal{D} .

Na przykład szereg $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ jest jednostajnie zbieżny w kole $|z| \leq 1$, ale jego pochodna – szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k}$$

będzie jednostajnie zbieżny *wewnątrz* tego koła, dla punktów $|z| < 1$. Warto pamiętać, że w „praktycznych zagadnieniach” różniczkowanie szeregu *na ogół źle wpływa na jego zbieżność*.

4. **Drugie twierdzenie Weierstrassa.** Niech:(1) funkcje $u_n(z)$ będą analityczne $\forall z \in \mathcal{D}$ i ciągłe dla $\forall z \in \overline{\mathcal{D}}$ oraz(2) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$ na brzegu obszaru B .

Wówczas szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \Rightarrow f(z)$$

w *domkniętym obszarze* $\overline{\mathcal{D}}$.

5. Dla funkcji $u_n(z) = c_n(z - z_0)^n$, gdzie c_n są dowolnymi liczbami zespolonymi mamy do czynienia z *szeregiami potęgowymi*. Oczywistym jest, że takie funkcje są *analityczne dla dowolnej, skończonej wartości zmiennej z* . Zachodzi

Twierdzenie Abela: Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n$ jest zbieżny dla pewnego $z_1 \neq z_0$ to

- Ten szereg jest bezwzględnie zbieżny dla każdego z , spełniającego $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, a w dodatku
- W kole $K(z_0; \rho)$, gdzie $\rho < |z_1 - z_0|$ zbieżność szeregu jest jednostajna.

Z ostatniego twierdzenia (w połączeniu z poprzednimi) można wyciągnąć szereg wniosków.

1. Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n$ jest rozbieżny dla pewnego $z_1 \neq z_0$ to jest rozbieżny dla wszystkich z , dla których $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.
2. Dla każdego szeregu potęgowego istnieje R , takie że *wewnątrz* $K(z_0, R)$ dany szereg jest zbieżny, *na zewnątrz* – rozbieżny, a wewnątrz i na brzegu koła $K_1(z_0, \rho)$; $\rho < R$ taki szereg jest *jednostajnie zbieżny*. Zauważmy, że może zachodzić $R = \infty$.
3. Wewnątrz koła zbieżności szereg jest zbieżny do funkcji *analitycznej*; (por. I twierdzenie Weierstrassa).
4. Wewnątrz koła zbieżności szereg potęgowy można różniczkować i całkować wyraz po wyrazie.

Na zakończenie podajmy jeszcze

Twierdzenie Cauchy’ego-Hadamarda, które określa promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Jest to liczba

$$R = \frac{1}{l}, \quad \text{gdzie} \quad l = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Oznacza to, że dla punktów $z_{1,2}$ spełniających

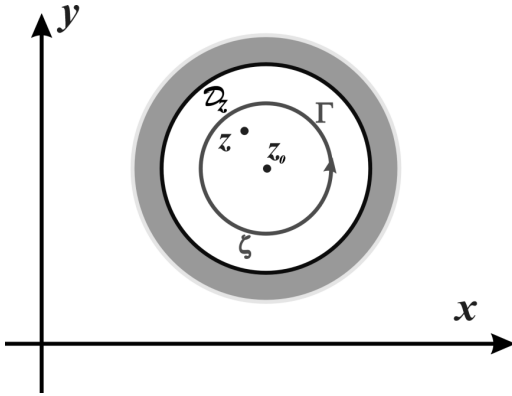
$$|z_1 - z_0| < \frac{1}{l} \quad \text{szereg jest zbieżny,}$$

$$|z_2 - z_0| > \frac{1}{l} \quad \text{szereg jest rozbieżny.}$$

1.9.2 Szereg Taylora

Z ostatniego podrozdziału wynika, że szereg potęgowy wewnątrz koła zbieżności określa pewną funkcję analityczną. Spróbujemy teraz odpowiedzieć na pytanie czy odwrotne stwierdzenie będzie słuszne.

Rozważmy funkcję $f(z)$, analityczną wszędzie wewnątrz pewnego obszaru \mathcal{D}_z . Dla każdego punktu wewnętrznego \mathcal{D}_z



$$\begin{aligned}
 f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) \\
 &\quad + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \dots \\
 &\quad + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots
 \end{aligned}$$

– funkcję $f(z)$ możemy przedstawić w postaci szeregu Taylora, wokół punktu z_0 . Taki szereg jest bezwzględnie zbieżny!

Twierdzenie to jest tak istotne, że nie możemy pominąć szczegółowego – zresztą prostego – dowodu. Wybierzmy *wewnątrz obszaru* \mathcal{D}_z kontur $\Gamma = K(z_0; \rho)$ (por. rysunek). Z wzoru Cauchy’ego

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \dots \quad (1.51)$$

Czynnik $1/(\zeta - z)$ funkcji podcałkowej przedstawimy w postaci

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \\
 &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n.
 \end{aligned}$$

Ostatnie przejście jest możliwe, ponieważ

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leq 1 \quad (\text{z konstrukcji})$$

i możemy zastosować wzór na sumę szeregu geometrycznego. Tak więc wzór (1.50) zapiszemy w postaci

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n, \quad (1.52)$$

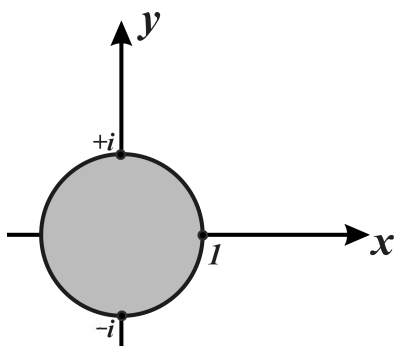
albo (całkujemy wyraz po wyrazie – szereg *jest* jednostajnie zbieżny)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right\} (z - z_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1.53)$$

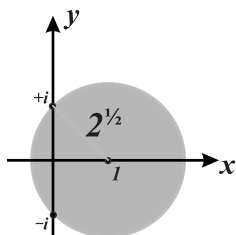
gdzie

$$c_n \equiv a_n = \frac{1}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \quad (1.54)$$

Stosunkowo prosto można wykazać jednoznaczność takiego rozwinięcia. Zamiast jednak to robić (pozostawiamy to Czytelnikowi) rozpatrzmy prosty przykład.



Do konstrukcji szeregu Taylora dla $f(z) = 1/(1+z^2)$ i $z_0 = 0$.



Do konstrukcji szeregu Taylora dla $f(z) = 1/(1+z^2)$ $z_0 = 1$.

Rozważmy funkcję $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Jest ona analityczna dla $z \neq \pm i$. Jej rozwinięcie wokół punktu $z_0 = 0$ jest proste – promieniem zbieżności szeregu jest $|i| = 1$ i wewnątrz koła jednostkowego, dla $|z| < 1$, mamy (znowu wzór na sumę szeregu geometrycznego)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}. \quad (1.55)$$

Gdyby za punkt, wokół którego rozwijamy funkcję, wybrać $z_0 = 1$ będziemy mieć to

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n \quad |z-1| < \sqrt{2}. \quad (1.56)$$

Promień zbieżności szeregu zwiększył się. Współczynniki c_n to – zgodnie z (1.53) – $c_n = 1/n! f^{(n)}(1)$, ale zamiast liczyć pochodną, łatwiej będzie ... konsekwentnie eksploatować wzór na sumę szeregu geometrycznego.

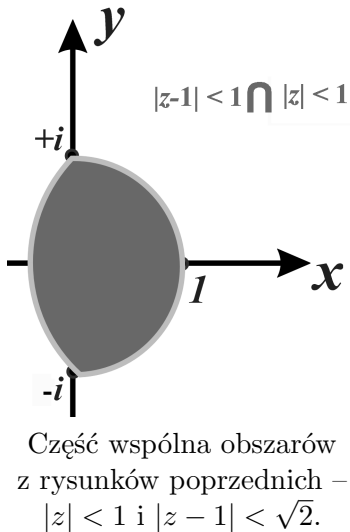
Rozkładając naszą funkcję na sumę dwóch (prostszych) ułamków

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right]$$

i powtarzając schemat obliczeniowy, który doprowadził nas do równania (1.51) dostaniemy (Czytelnika zachęcamy do sprawdzenia!)

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right] = \dots = (-1)^n \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4}}{2^{(n+1)/2}} (-1)^n.$$

Takich rozwinięć (dla różnych z_0) można konstruować nieskończenie wiele. Promień zbieżności uzyskiwanych szeregów będzie – zgodnie z twierdzeniem Abela – zawsze równy $\min(|z_0 \pm i|)$.



Zauważmy, że w obszarze będącym iloczynem (częścią wspólną) obszarów $|z| < 1$ i $|z - 1| < \sqrt{2}$, a więc dla $z \in \{|z - 1| < \sqrt{2} \cap |z| < 1\}$ (por. rysunek) *oba rozwinięcia* – (1.54) i (1.55) mogą być użyte i dają oczywiście ten sam wynik. Mamy tu do czynienia z tak zwanym *przedłużeniem analitycznym* – funkcja $f(z) = 1/(1 + z^2)$, określona dla $|z| < 1$ wzorem (1.54) zostaje „rozszerzona” na obszar $|z - 1| < \sqrt{2}$, przy pomocy wzoru (1.55).

Tego typu rozszerzenie – przedłużenie analityczne – jest zawsze możliwe, o ile „po drodze” nie napotykamy na punkt osobliwy danej funkcji (taki punkt osobliwy może znajdować się – tak jak w omawianym przykładzie – na granicy obszarów).

Fundamentalne znaczenie ma fakt, że funkcja przedłużana analitycznie *zachowuje wszystkie własności funkcji przedłużanej*. Właśnie dzięki temu własności funkcji trygonometrycznych *zmiennej rzeczywistej* $\sin x$ i $\cos x$ pozostają bez zmian przy wyjściu z osi rzeczywistej na dowolny obszar – ale skończony! – płaszczyzny zespolonej (w podrozdziale o zasadzie minimum i maksimum powiedzieliśmy, że funkcje $\sin z$ i $\cos z$ stają się osobliwe przy $z \rightarrow \infty$.) I dzięki temu faktowi możemy bez żadnych wątpliwości twierdzić, że $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$!

Powracając do sformułowanego na początku tego podrozdziału pytania – tak, każda funkcja analityczna w danym obszarze może być, wewnątrz tego obszaru przedstawiona – i to w jednoznaczny sposób – postaci szeregu. „Cegiełki”, z których skonstruowany jest szereg – pochodne funkcji analitycznej (istniejące właśnie jako konsekwencja analityczności) i wyrażenia typu $(z - z_0)^n$ są analityczne; ich nieskończona suma także. Mówienie, że dana funkcja jest przedstawialna w postaci szeregu Taylora jest równoznaczne z powiedzeniem, że jest ona analityczna.

1.9.3 Szeregi Taylora funkcji elementarnych

Jeżeli oprzeć się na fundamentalnej cesze przedłużenia analitycznego – zachowaniu własności funkcji przedłużanej, pod warunkiem pozostawania w „odpowiedniej odległości” od punktu rozwinięcia, to znane nam z analizy zmiennej rzeczywistej szeregi potęgowe pewnych funkcji można „przepisać” bez zmian w języku zmiennej zespolonej z . Poniżej podajemy kilka tych najbardziej podstawowych i *bezwzględ-*

nie przydatnych.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad |z| < \infty; \quad (1.57)$$

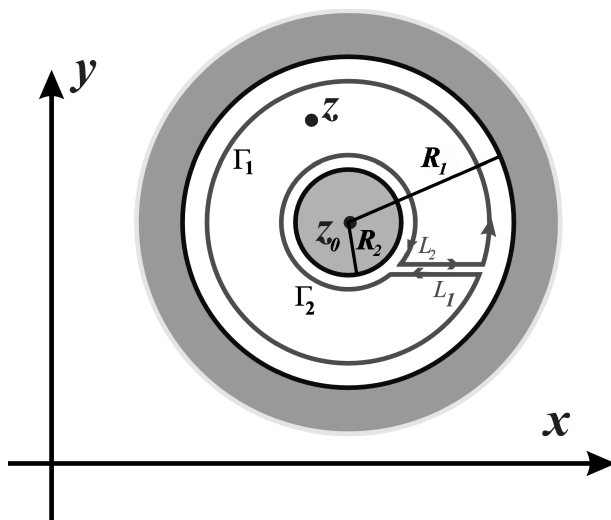
$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad |z| < \infty; \quad (1.58)$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad |z| < \infty; \quad (1.59)$$

$$\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad |z| < \infty; \quad (1.60)$$

$$\cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad |z| < \infty. \quad (1.61)$$

1.9.4 Szereg Laurenta



Rysunek 1.17: Zamknięty kontur $\Gamma = \Gamma_1 + L_1 + \Gamma_2 + L_2$ w obszarze dwuspójnym.

Przedstawienie funkcji w postaci szeregu jest – jak się okazuje – możliwe także, dla funkcji, dla których obszar ich analityczności ma nieco specyficzną postać – funkcja jest analityczna w pewnym obszarze (skończonym lub nie), który znajduje się „na zewnątrz” odosobnionego punktu osobliwego. W takich sytuacjach, mówimy, że funkcja $f(z)$ jest analityczna w pierścieniu $R_2 < |z - z_0| < R_1$ (por. rysunek 1.17). Promień R_2 może być, „w praktyce”, bardzo mały – chodzi tutaj jedynie o „wyłączenie” punktu osobliwego z_0 , wraz z jego bezpośrednim otoczeniem.

Rozważmy teraz obszar zawarty wewnątrz takiego pierścienia, ograniczony konturami Γ_1 i Γ_2 , gdzie $\Gamma_1 = K(z_0; R'_1)$, $R'_1 < R_1$ oraz $\Gamma_2 = K(z_0; R'_2)$, $R'_2 >$

R_2 . Jest to obszar dwuspójny, który możemy – stosując standardowy zabieg, dodanie łączników L_1 i L_2 – przekształcić w obszar jednospójny, zawarty wewnątrz konturu $\Gamma = \Gamma_1 + L_1 + \Gamma_2 + L_2$.

Wewnątrz obszaru analityczności obliczamy całkę Cauchy'ego dla funkcji $f(z)$, rozbijając ją na cztery przyczynki. Dwa z nich, po łącznikach L_1 i L_2 znoszą się wzajemnie, pozostaje

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \oint_{\Gamma_1^{(+)}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \oint_{\Gamma_2^{(-)}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1^{(+)}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2^{(+)}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv f_1(z) + f_2(z), \end{aligned} \quad (1.62)$$

gdzie górne wskaźniki $(+)$ i $(-)$ określają odpowiednio dodatni i ujemny kierunek obiegu konturów Γ_1 i Γ_2 . Rozpatrzmy po kolei pierwszą i drugą całkę we wzorze (1.61).

Na konturze Γ_1 mamy $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$. Jeżeli tak, to możemy powtórzyć schemat, który zastosowaliśmy w wyprowadzaniu wzoru na szereg Taylora. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

i konsekwentnie

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1.63)$$

$$\text{gdzie} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n \geq 0. \quad (1.64)$$

Wprawdzie otrzymaliśmy wzór taki sam jak w podrozdziale poświęconym szeregowi Taylora, ale ta funkcja c_n nie ma nic wspólnego z pochodną $f(z)$ w punkcie z_0 ! Ta ostatnia oczywiście *nie istnieje* – przecież z_0 jest punktem osobliwym funkcji $f(z)$.

Na konturze Γ_2 mamy $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| > 1$ albo $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$.

Dlatego funkcję podcałkową przedstawimy jako

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \\ &= -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \end{aligned}$$

i dostajemy

$$f_2 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n} f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}, \quad (1.65)$$

$$\text{gdzie} \quad c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}, \quad n \geq 1.$$

W ostatnim wzorze kontur Γ_2 obiegany jest w kierunku *dodatnim* – dwa ujemne znaki unicestwiają się wzajemnie!

Wykazaliśmy więc

Twierdzenie: Funkcja $f(z)$, analityczna w pierścieniu pomiędzy konturami (okręgami) Γ_1 i Γ_2 , a także na samych konturach, może być przedstawiona jako suma dwóch szeregów, z dodatnimi i ujemnymi potęgami $(z - z_0)^n$.

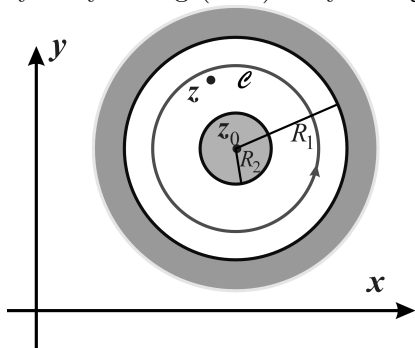
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (1.66)$$

gdzie

$$c_n \equiv a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n \geq 0. \quad (1.67)$$

$$c_{-n} \equiv b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}, \quad n \geq 1. \quad (1.68)$$

Otrzymany szereg (1.65) nazywa się *szeregiem Laurenta* funkcji $f(z)$.



Zauważmy, że obie funkcje podcałkowe, występujące w określeniach współczynników c_n i c_{-n} są funkcjami analitycznymi zmiennej ζ w pierścieniu $R_2 < |\zeta - z_0| < R_1$. Jeżeli tak, to kontury całkowania Γ_1 i Γ_2 mogą być wybrane dowolnie – w szczególności może to być *jeden wspólny kontur \mathcal{C}* wewnątrz pierścienia (por. rysunek). Szereg Laurenta można wówczas zapisać w postaci

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n; \quad R_2 < |z - z_0| < R_1, \quad (1.69)$$

gdzie

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.70)$$

Część zawierająca nieujemne potęgi to tzw. *część regularna*; potęgi ujemne składają się na *część główną*. Te właśnie ujemne potęgi decydują o charakterze osobliwości punktu z_0 . O tych osobliwościach będziemy dyskutować w następnym

podrozdiale – tutaj prześledźmy prosty przykład konstrukcji szeregów Taylora i Laurenta dla funkcji

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

Funkcja $f(z)$ jest analityczna wszędzie poza punktami $z = 1$ i $z = 2$.

Wybieramy $z_0 = 0$. Szereg Taylora (Maclaurina) będzie zbieżny dla $|z| < 1$ (bo $z = 1$ to punkt osobliwy). Jego postać to

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^n - z^n \right],$$

$$\text{albo} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right) z^n; \Rightarrow f^{(n)}(0) = n! \cdot \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right).$$

Rozpatrzmy teraz pierścień $1 \leq |z| < 2$. W tym obszarze mamy $|1/z| < 1$ oraz $|z| < 2$. Szereg Laurenta będzie zbieżny wewnątrz tego pierścienia. Jego postać to

$$f(z) = \frac{1/z}{1-1/z} + \frac{1/2}{1-z/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Mamy więc $b_n \equiv 1$, $a_n = 1/2^{n+1}$.

Pozostał jeszcze obszar $|z| > 2$. Szereg Laurenta będzie zbieżny wewnątrz pierścienia $2 < |z| < \infty$. W tym obszarze $|1/z| < 1$ a także $|2/z| < 1$. Dlatego

$$f(z) = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{1-2/z} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{z^{n+1}}.$$

Mamy więc $b_n \equiv 0$, $a_n = 1 - 2^{n-1}$.

1.9.5 Zera funkcji analitycznej

Definicje krotności (lub rzędu) zera w przypadku funkcji zmiennej zespolonej są analogiczne do odpowiednich definicji z dziedziny zmiennej rzeczywistej. I tak wiemy, że z analityczności funkcji w punkcie z wynika możliwość jej reprezentacji w postaci szeregu Taylora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n; \quad |z - z_0| < r_0.$$

Jeżeli z_0 jest zerem funkcji analitycznej to $a_0 = f(z_0) = 0$.

Dodatkowo, jeżeli

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad \text{ale} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0, 4$$

to z_0 nazywamy *zerem rzędu m* , albo zerem m -krotnym; zachodzi wówczas

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n; \quad |z - z_0| < r_0,$$

gdzie $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ są współczynnikami szeregu Taylora; „pierwszy” współczynnik w szeregu, $a_m \neq 0$. Mamy

Twierdzenie: *Zera funkcji analitycznej są punktami odosobnionymi; to znaczy wokół każdego punktu zerowego istnieje jego epsilonowe otoczenie, w którym $f(z) \neq 0$ – chyba że funkcja jest tożsamościowo równa zeru dla wszystkich z .*

Dla wykazania tego twierdzenia wystarczy rozważyć zero rzędu m i funkcję

$$g_m \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n; \quad a_m = g_m(z_0) \neq 0; \quad |z - z_0| < r_0.$$

Funkcja g jest ciągła (bo analityczna) w z_0 , a więc

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta \quad |g(z) - a_m| < \epsilon, \quad \forall |z - z_0| < \delta.$$

Położmy na przykład $\epsilon = |a_m|/2$; $\delta \equiv \delta_\epsilon$; mamy

$$|g(z) - a_m| < |a_m|/2 \quad \text{dla} \quad |z - z_0| < \delta_\epsilon \rightarrow g(z) \neq 0 \quad \text{dla} \quad |z - z_0| < \delta_\epsilon.$$

1.9.6 Odosobnione punkty osobliwe funkcji analitycznej

Szereg Laurenta – wzory (1.68) i (1.69) – pozwala określić *charakter osobliwości* w punkcie z_0 .

Możliwe są trzy – wykluczające się wzajemnie – przypadki:

1. W rozwinięciu (1.68) nie występują wyrazy z wykładnikami ujemnymi.

Taki punkt nazywamy *punktem pozornie osobliwym*; po określeniu wartości funkcji w tym punkcie, na przykład $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, funkcja w tym punkcie będzie analityczna, a więc ograniczona. Prawdziwe jest też wnioskowanie odwrotne: jeżeli funkcja jest ograniczona w otoczeniu pewnego odosobnionego punktu osobliwego, to znaczy jeżeli $f(z) \leq M$ dla $|z - z_0| < \delta$ to punkt z_0 *musi być* punktem pozornie osobliwym. Wynika to z postaci całek, określających współczynniki szeregu Laurenta – wzór (1.69):

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.69)$$

Jeżeli na konturze całkowania, okręgu $K(z_0, R)$, funkcja $f(z)$ jest ograniczona, to jej moduł $|f(z)| \leq M$; wartości ujemnych współczynników C_{-n} podlegają ograniczeniu

$$|C_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^{-n+1}} \cdot 2\pi R = MR^n \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0$$

– szereg Laurenta nie będzie zawierał wyrazów o potęgach ujemnych.

Przykładem takiego punktu pozornie osobliwego może być punkt $z = 0$ dla funkcji $f(z) = \operatorname{ctg} z - 1/z$. Wartość $f(0) = 0$.

2. W rozwinięciu (1.68) występuje skończona liczba (m) wyrazów o wykładnikach ujemnych. Taki punkt nazywamy *biegunem m -ego rzędu* (osobliwością biegunową) funkcji $f(z)$. Rozwinięcie (1.68) ma postać

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n(z - z_0)^n, \quad \text{albo} \quad (1.71)$$

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (1.72)$$

gdzie funkcja

$$\phi(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \dots + C_0(z - z_0)^m$$

jest funkcją analityczną w otoczeniu punktu z_0 ; $f(z_0) = C_{-m} \neq 0$.

Biegun m -ego rzędu funkcji $f(z)$ jest więc *zerem m -ego rzędu* funkcji

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\phi(z)} \cdot (z - z_0)^m.$$

Jeżeli *wszystkie* punkty osobliwe w danym obszarze \mathcal{D} danej funkcji są osobliwościami biegunowymi, to funkcję nazywamy *funkcją meromorficzną w obszarze \mathcal{D}* . O osobliwościach biegunowych będziemy szerzej mówić już w następnym podrozdziale.

3. W rozwinięciu (1.68) występuje nieskończenie wiele wyrazów o wykładnikach ujemnych. Taki punkt nazywamy *punktem istotnie osobliwym*, a zachowanie funkcji określa

Twierdzenie (Casoratiego-Weierstrassa): *W dowolnie małym otoczeniu punktu istotnie osobliwego wartości funkcji $f(z)$ zbliżają się dowolnie blisko do każdej (dowolnej) liczby zespolonej.*

Dowód tego twierdzenie łatwo przeprowadzić metodą niewprost: gdyby w otoczeniu z_0 zachodziła nierówność

$$|f(z) - A| > \epsilon,$$

gdzie A to pewna liczba zespolona, to funkcja $1/(f(z) - A)$ byłaby ograniczona w otoczeniu z_0 ; punkt z_0 byłby punktem pozornie osobliwym tej funkcji i zachodziłoby

$$\frac{1}{f(z) - A} = h(z),$$

gdzie $h(z)$ byłaby funkcją analityczną w otoczeniu punktu z_0 . Tak więc, dla $|z - z_0| < \delta$ mielibyśmy

$$f(z) = A + \frac{1}{h(z)}.$$

Z ostatniego równania wynikałoby, że $z = z_0$ jest albo pozorną osobliwością (dla $h(z_0) \neq 0$) albo biegunem m -rzędu (dla $h(z_0) = 0$, zero m -ego rzędu) – a więc uzyskujemy sprzeczność z założeniem o charakterze osobliwości.

Głębsza analiza zachowania się funkcji w otoczeniu punktu osobliwego pozwala sformułować

Twierdzenie (Picarda): *W dowolnie małym otoczeniu punktu istotnie osobliwego funkcja $f(z)$ przybiera wszystkie wartości zespolone, za wyjątkiem co najwyżej jednej.*

Przykładem istotnej osobliwości będzie punkt $z = 0$ dla funkcji

$$\cosh \frac{1}{z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}}.$$

Na zakończenie tego podrozdziału zastanówmy się jak wygląda kwestia osobliwości – pozornej, biegunowej czy też istotnej, jeżeli punktem osobliwym będzie punkt w nieskończoności. Formalnie sprawa jest dość prosta – jeżeli chcemy poznać zachowanie się funkcji dla $z \rightarrow \infty$ można dokonać zamiany zmiennej $1/z = w$ i analizować funkcję $f(1/z) \equiv \phi(w)$ dla $w \rightarrow 0$.

I tak *otoczeniem punktu w nieskończoności* nazywamy obszar płaszczyzny \mathcal{C}_z , który znajduje się *na zewnątrz dowolnego koła o środku w punkcie 0*. Jeżeli w takim otoczeniu – kole $K(0, R)$ – funkcja $f(z)$ jest rozwijalna w szereg Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n; \quad |z| > R, \quad (1.73)$$

to dyskutowane powyżej trzy przypadki będą odpowiadały następującym scenariuszom:

1. w rozwinięciu (1.72) nie ma wyrazów o wykładnikach dodatnich. Punkt w nieskończoności jest osobliwością pozorną; wartości funkcji dążą, przy $z \rightarrow \infty$, do wartości skończonej. Jeżeli wartość tą określimy, to funkcja $f(z)$ będzie w nieskończoności funkcja analityczną;
2. w rozwinięciu (1.72) mamy skończoną liczbę wyrazów o wykładnikach dodatnich. Punkt w nieskończoności jest osobliwością biegunową, a najwyższy wykładnik określa rząd biegunu;
3. w rozwinięciu (1.72) mamy nieskończenie wiele wyrazów o wykładnikach dodatnich. Punkt w nieskończoności jest osobliwością istotną.

Dodajmy, że w przypadku kiedy w rozwinięciu (1.72) „brakuje” nie tylko potęg nieujemnych, ale pierwszych $m - 1$ potęg o wykładnikach ujemnych, to znaczy kiedy szereg Laurenta ma postać

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-m} C_n(z - z_0)^n = \dots + \dots + \frac{C_{-m}}{z^m} + \frac{C_{-m-1}}{z^{m+1}}; \quad |z| > R,$$

to nieskończoność będzie stanowił dla funkcji $f(z)$ zero m -ego rzędu (albo zero m -krotne).

1.10 Residuum funkcji zmiennej zespolonej; twierdzenie o residuach

Rozważmy sytuację, kiedy w okolicy izolowanego punktu osobliwego nasza funkcja ma rozwinięcie w szereg Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \dots; \quad 0 < |z-z_0| < r_1.$$

Współczynniki ujemnych potęg $C_{-n} \equiv b_n$ określone są poprzez całki Cauchy'ego

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(z-\zeta)^{-n+1}}.$$

W szczególności

$$b_1 = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta. \quad (1.74)$$

Definicja: Współczynnik $b_1 \equiv c_{-1}$ nazywamy residuum funkcji f w izolowanym punkcie osobliwym z_0 .

Rachunek residuów to bardzo skuteczna metoda liczenia całek po konturach zamkniętych. Z wzoru (1.73) wynika bowiem, że jeżeli potrafimy obliczyć residuum danej funkcji $f(z)$, to całka z niej równa jest temu residuum $\times 2\pi i$

$$\oint_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i b_1.$$

Zilustrujmy powyższe wywody przykładem. Przypuśćmy, że chcemy obliczyć całkę

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz.$$

Jedyny punkt osobliwy $z = 1$ znajduje się wewnątrz konturu całkowania. Szereg Laurenta dla f uzyskamy rozwijając eksponentę w szereg Taylora wokół $z = 1$

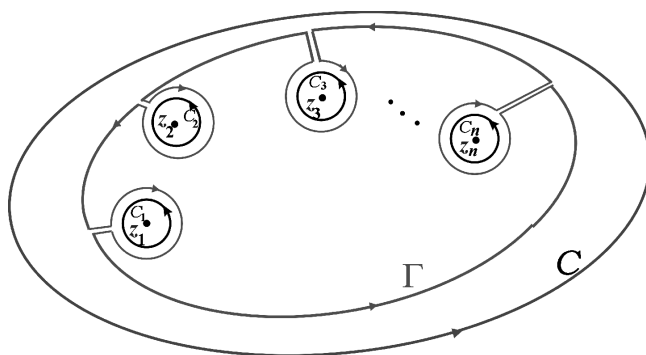
$$e^{-z} = e^{-1} - e^{-1}(z-1) + e^{-1}(z-1)^2/2! - \dots$$

a więc

$$\frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-1}}{(z-1)^2} \boxed{-\frac{e^{-1}}{(z-1)}} + \dots$$

Współczynnik przy *pierwszej ujemnej* potędze $(z-1)$ to $\text{Res}[f(z); z=1] = -1/e$.

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz = -2\pi i/e.$$



Rysunek 1.18: Twierdzenie o residuach – $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Oczywiście, wewnątrz konturu całkowania może znajdować się nie jeden, ale kilka punktów osobliwych¹³. Sytuację taką „reguluje”

Twierdzenie (o residuach): Niech \mathcal{C} oznacza zamknięty (i dodatnio skierowany) kontur, na którym i wewnątrz którego funkcja $f(z)$ jest analityczna, za wyjątkiem skończonej liczby izolowanych punktów osobliwych z_1, z_2, \dots, z_n . Wówczas

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n [\text{Res} f(z); z = z_k]. \quad (1.75)$$

Dowód tego twierdzenia sprowadza się do analizy rysunku 1.18, na którym oprócz konturu \mathcal{C} wprowadziliśmy kontur Γ , składający się z owalnej krzywej „wewnętrznej” w stosunku do konturu \mathcal{C} i zawierającej dodatkowe koliste „wypustki”, w których tkwią wszystkie odosobnione punkty osobliwe. Z zerowania się całki po konturze Γ (wewnątrz tego konturu *nie ma* żadnych punktów osobliwych, funkcja $f(z)$ jest analityczna) wynika

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \oint_{C_2} f(z) dz - \dots - \oint_{C_n} f(z) dz = 0.$$

Każda kolista wypustka (uwaga na odpowiednie znaki, związane z kierunkiem obiegu konturu!) to $\oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z); z = z_k]$. \square

Zilustrujmy wykazane twierdzenie przykładem obliczając całkę

$$\mathcal{I} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz, \quad \mathcal{C} = K(0, 2).$$

Wewnątrz konturu całkowania funkcja podcałkowa ma dwa punkty osobliwe: $z = 0$ i $z = 1$. Obliczamy residua funkcji podcałkowej w tych punktach:

¹³liczba punktów osobliwych wewnątrz konturu całkowania może być nawet nieskończona. Będziemy omawiać taką sytuację w podrozdziale poświęconym obliczaniu szeregów – sum nieskończonych.

Dla punktu $z = 0$ funkcję podcałkową rozwijamy w pierścieniu $0 < |z| < 1$ w szereg Laurenta

$$\begin{aligned} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} &= \left(5 - \frac{2}{z}\right) \left(\frac{-1}{1 - z}\right) = \left(-5 + \frac{2}{z}\right) [1 + z + z^2 + \dots] \\ &= \frac{2}{z} - 3 - 3z - 3z^2 + \dots \quad \rightarrow \text{Res}(0) = 2. \end{aligned}$$

Dla punktu $z = 1$ rozwijamy w kole $K(1, 1)$ (a więc dla $|z - 1| < 1$) funkcję $1/z$ w szereg Taylora o środku $z_0 = 1$. Mamy

$$1/z = \frac{1}{1 + (z - 1)} = 1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - \dots$$

Funkcję podcałkową zapisujemy jako

$$\begin{aligned} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} &= \left(5 + \frac{3}{z - 1}\right) \frac{1}{z} \\ &= \left(5 - \frac{3}{z - 1}\right) [1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - \dots] \end{aligned}$$

Tak więc $\text{Res}(1) = 3$ i w konsekwencji $\mathcal{I} = 10\pi i$.

1.10.1 Obliczanie residuów w osobliwościach biegunowych

Rachunek residuów dostarcza znakomitego narzędzia do obliczania całek konturowych (i nie tylko! – patrz podrozdział poświęcony zastosowaniom rachunku residuów), ale aby móc to znakomite narzędzie skutecznie używać, musimy poznać jakiś sposób obliczania residuum w osobliwości biegunowej rzędu m , zgrabniejszy niż rozwijanie funkcji w szereg Laurenta. Załóżmy więc, że mamy do czynienia z biegunem m -ego rzędu; współczynnik szeregu Laurenta funkcji $f(z)$ $b_m \neq 0$, natomiast wszystkie współczynniki potęg ujemnych o większych (co do wartości bezwzględnej) wykładnikach są równe zero. W otoczeniu (promień r_1) punktu z_0 rozważmy funkcję

$$\varphi(z) = (z - z_0)^m f(z), \quad 0 < |z - z_0| < r_1. \quad (1.76)$$

Dla tej funkcji punkt z_0 może być co najwyżej usuwalną osobliwością – kładziemy $\varphi(z_0) = b_m$. Funkcja $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = b_1(z - z_0)^{m-1} + b_2(z - z_0)^{m-2} + \dots + b_m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{m+n} \quad (1.77)$$

jest analityczna w otoczeniu z_0 – wzór (1.76) przedstawia jej szereg Taylora. Jeżeli tak, to współczynnik przy wyrazie $(z - z_0)^{m-1}$

$$b_1 = C_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{(m-1)} \varphi(z)}{dz^{m-1}} \right|_{z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{(m-1)} [f(z)(z - z_0)^m]}{dz^{m-1}} \right|_{z_0}. \quad (1.78)$$

W szczególności, dla $m = 1$

$$b_1 = C_{-1} = (z - z_0)f(z)|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (1.79)$$

Ten ostatni wzór, szczególny przypadek formuły (1.77), można jednak zastąpić wzorem, który w wielu sytuacjach okazuje się bardziej praktyczny. Jeżeli mamy do czynienia – w punkcie $z = z_0$ – z biegunem pierwszego rzędu to nasza funkcja musi dać się przedstawić w postaci ilorazu

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

gdzie dla funkcji $q(z)$ punkt z_0 jest *zerem pierwszego rzędu*, a więc rozwinięcie tej funkcji w szereg Taylora ma postać

$$q(z) = (z - z_0)q'(z_0) + \frac{1}{2!}(z - z_0)^2q''(z_0) + \dots,$$

a jeżeli tak, to

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \text{Res}[f(z); z = z_0]$$

To naprawdę bardzo praktyczny wzór! Możemy to docenić rozważając funkcję

$$f(z) = \frac{z}{z^n - 1},$$

która ma osobliwości biegunowe – pierwszego rzędu – w punktach będących pierwiastkami równania $z^n = 1$:

$$z \equiv z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, (n - 1).$$

W każdym z tych n punktów

$$\text{Res}[f(z); z = z_k] = \frac{z_k}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k^2}{nz_k^n} = \frac{1}{n}e^{i\frac{4\pi k}{n}}.$$

Ponieważ mówiliśmy o charakterze potencjalnej osobliwości w nieskończoności powiedzmy także o *residuum w nieskończoności*. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna na zewnątrz zamkniętego konturu \mathcal{C} , za wyjątkiem punktu w nieskończoności $z = \infty$, który jest izolowanym punktem osobliwym, to całkę

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}^+} f(z) dz = -\text{Res}[f(z); z = \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}^-} f(z) dz \equiv -b_1^{(\infty)} \quad (1.80)$$

nazywamy residuum funkcji $f(z)$ w nieskończoności.

Na przykład dla funkcji

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots$$

nieskończoność jest osobliwością usuwalną: $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} e^{1/z} = 1$, a jej residuum to $\text{Res}[f(z); z = \infty] = -b_1 = -1$.

Koncepcja „residuum w nieskończoności” pozwala na modyfikację twierdzenia o residuach. Wersja zmodyfikowana będzie miała postać

Niech \mathcal{C} oznacza zamknięty (i dodatnio skierowany) kontur, na którym i wewnątrz którego funkcja $f(z)$ jest analityczna, za wyjątkiem skończonej liczby izolowanych punktów osobliwych z_1, z_2, \dots, z_N , gdzie $z_N = \infty$. Wówczas

$$\sum_{k=1}^{N-1} \text{Res}[f(z); z = z_k] + \text{Res}[f(z); z = \infty] = 0. \quad (1.81)$$

– oba składniki po lewej stronie równania są równe całce po konturze \mathcal{C} , ale wziętej z przeciwnym znakiem!

Wzór (1.80) jest wygodny, jeżeli mamy do obliczenia dużo residuów wewnątrz konturu – liczymy te usytuowane „na zewnątrz”, a uzyskana suma, po zmianie znaku, jest równa sumie wszystkich residuów, dla punktów pozostałych wewnątrz konturu.

1.11 Rachunek residuów – zastosowania

1.11.1 Obliczanie całek

Całki typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Jeśli $f(z)$ jest funkcją regularną na osi rzeczywistej i w górnej półpłaszczyźnie, za wyjątkiem skończonej liczby izolowanych punktów osobliwych z_k , $k = 1, \dots, n$ ($\Im(z_k) > 0$), to na mocy twierdzenia o residuach mamy

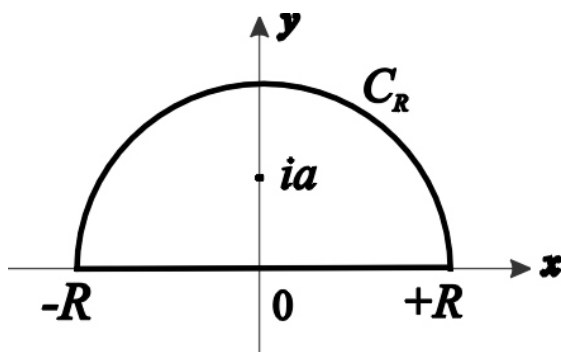
$$\int_{-R}^{+R} f(x) dx + \int_{C_R} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z); z = z_k], \quad (1.82)$$

przy czym $R > \max(|z_1|, \dots, |z_n|)$. Jeżeli $\int_{C_R} \rightarrow 0$ przy $R \rightarrow +\infty$, to w granicy mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z); z = z_k]. \quad (1.83)$$

Innymi słowy, kontur całkowania – por. rys.1.19 – składa się z podstawy (osi rzeczywistej) i „górnego półkola”, przy czym zachowanie się funkcji $f(z)$, przedłużenia analitycznego $f(x)$ na górną półpłaszczyznę, musi być takie, aby przycynek do całki od górnego półkola zmierzał do zera, przy półkolu rozszerzającym się do nieskończoności. Oczywiście jest, że tak będzie dla funkcji typu

$$f(z) \propto \frac{1}{z^{1+\delta}}; \quad \delta > 0.$$



Rysunek 1.19: Kontur całkowania: symetryczny segment osi rzeczywistej i „górne półkole” o promieniu R

Prostym przykładem będzie obliczenie całki

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}; \quad a > 0.$$

Przedłużenie analityczne funkcji podcałkowej na górną półpłaszczyznę to funkcja

$$\frac{1}{(z^2 + a^2)^3};$$

całkujemy ją po konturze przedstawionym na rysunku 1.19. Punkt $z = ai$ jest biegunem trzeciego rzędu, z residuum

$$c_{-1} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{(z - ai)^3}{(z^2 + a^2)^3} \right] = \dots = \frac{3}{16a^5 i}.$$

Czytelnik sam przeprowadzi szacowanie całki po górnym półokręgu; nietrudno wykazać, że

$$\left| \int_{C_R} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{M}{R^5}.$$

Podstawiając do (1.82) otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{3\pi}{8a^5}.$$

Całki typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \sin x \\ \cos x \end{array} \right\} dx$.

Całkami, w których funkcja podcałkowa ma ogólną postać

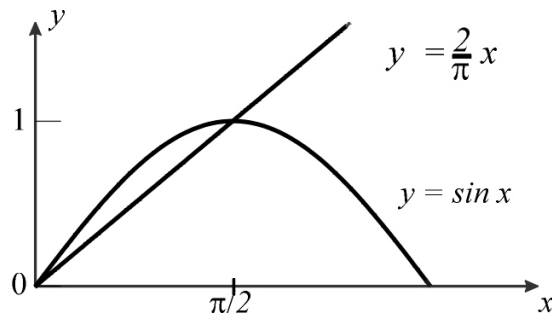
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}; \quad \alpha > 0 \quad (1.84)$$

rządzi **lemat Jordana**. Jego sformułowanie to:

Niech $f(z)$ będzie funkcją regularną w górnej półpłaszczyźnie zespolonej, z wyjątkiem skończonej liczby izolowanych osobliwości biegunowych, i niech $f(z) \Rightarrow 0$ dla wszystkich $0 \leq \arg z \leq \pi$, przy $|z| \rightarrow \infty$. Wówczas, dla $\alpha > 0$ zachodzi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(\zeta)e^{i\alpha\zeta} d\zeta = 0 \quad (1.85)$$

(Całka po górnym półokręgu znika, przy promieniu półokręgu zmierzającym do nieskończoności).



Rysunek 1.20: Pomocniczy rysunek dla dowodu lematu Jordana

Dowód lematu jest prosty i pouczający. Jeżeli $f(z) \Rightarrow 0$, to dla $|z| = R$ funkcja jest ograniczona i $|f(z)| < \mu_R$, dla $|z| = R$. Kładąc $\zeta = Re^{i\phi}$ i zauważając, że w pierwszej ćwiartce zachodzi (por. rys.1.20), dla każdego $0 \leq \phi \leq \pi/2$,

$$\sin \phi \geq \frac{2}{\pi} \phi,$$

otrzymujemy oszacowanie – przy $R \rightarrow \infty$ –

$$\begin{aligned} & \left| \int_{C_R} f(\zeta)e^{i\alpha\zeta} d\zeta \right| \\ & \leq \mu_R \cdot R \int_0^{\pi} |e^{i\alpha\zeta}| d\phi = \mu_R \cdot R \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin \phi} d\phi \\ & = 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \phi} d\phi < 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\alpha R}{\pi} \phi} d\phi = \frac{\pi}{\alpha} \mu_R (1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

W tym kontekście oczywisty staje się wniosek:
dla funkcji spełniającej warunki lematu Jordana mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} \left[e^{i\alpha z} f(z); z = z_k \right], \quad (1.86)$$

przy czym sumujemy po wszystkich osobliwościach $f(z)$, leżących w górnej półpłaszczyźnie¹⁴.

Przykład:

Całka

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + a^2} dx = \Re\{\mathcal{I}_1\} = \Re \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + a^2} dx \right\}.$$

Po rozszerzeniu analitycznym otrzymujemy funkcję

$$\frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + a^2},$$

spełniającą warunki lematu Jordana. Jedyne biegun to $z = ai$, z residuum $e^{-\alpha a}/2ia$, tak, że mamy

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I} = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}.$$

W podobny sposób można obliczyć niezliczone ilości całek. Podajmy kilka z nich – w obliczeniach wykorzystujemy także parzystość funkcji podcałkowej:

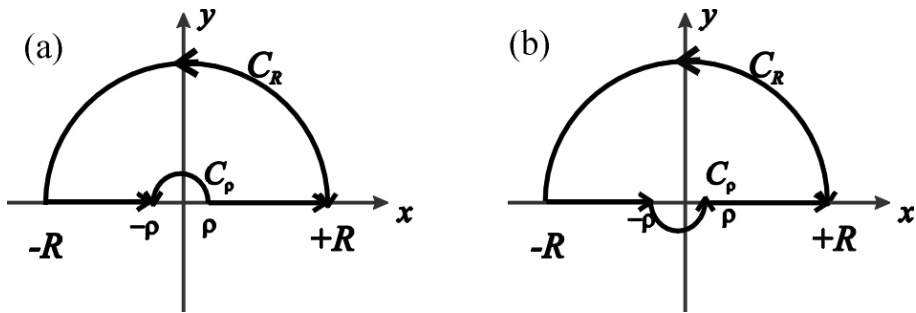
$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{\pi}{4a} e^{-a}; \quad a > 0, \\ \int_0^{\infty} \frac{\cos mx dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{\pi}{4a^3} (1 + am) e^{-am}; \quad m, a > 0, \\ \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(1 + x^2)^3} &= \frac{7}{16} \frac{\pi}{e}. \end{aligned}$$

W powyższych przykładach zastrzegaliśmy się, aby osobliwości biegunowe leżały w górnej półpłaszczyźnie. Nie jest to bezwzględnie konieczne. Rozważmy całkę

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{1}{2} \Im \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx \right\} \equiv \frac{1}{2} \Im\{\mathcal{I}_1\}. \quad (1.87)$$

Rozszerzona analitycznie funkcja podcałkowa w \mathcal{I}_1 nie ma osobliwości w obszarze ograniczonym przez kontur całkowania z rys.1.19, ale ma biegun pierwszego rzędu na konturze, w punkcie $z = 0$. Jedyna rada, to modyfikacja konturu, tak jak pokazane jest to na rysunku 1.21. W przypadku konturu 1.21(a) mamy

¹⁴Gdyby występująca w wykładniku funkcji eksponencjalnej stała α była ujemna, to analityczny lemat możemy sformułować, ale dla konturu, którego półkole znajduje się w dolnej półpłaszczyźnie; dla czysto urojonego α , tzn. $\alpha = \pm i\beta$, $\beta > 0$, możliwe są sytuacje, w których półkole konturu całkowania leży bądź w prawej (+), bądź lewej półpłaszczyźnie (-), a „główne” całkowanie odbywa się wzdłuż osi urojonej.



Rysunek 1.21: Zmodyfikowany kontur całkowania: symetryczny segment osi rzeczywistej i „duże półkole” o promieniu R zostały uzupełnione o małe półkole, po którym obchodzimy punkt $z = 0$

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{+\rho}^{+R} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{C_{\rho}} \frac{e^{i\alpha\zeta}}{\zeta} d\zeta + \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha\zeta}}{\zeta} d\zeta = 0 \quad (1.88)$$

(brak przyczynków od jakichkolwiek biegunów).

Przy $R \rightarrow \infty$ i $\rho \rightarrow 0$ dwie pierwsze całki „składają się” na całkę \mathcal{I}_1 ; ostatnia całka dąży do zera (lemat Jordana), natomiast przedostatnia to

$$\begin{aligned} & \int_{C_{\rho}} \frac{e^{i\alpha\zeta}}{\zeta} d\zeta \\ &= \dots \zeta = \rho e^{i\theta}; \quad d\zeta = i\rho e^{i\theta} d\theta \dots \\ &= i \int_{\pi}^0 e^{i\alpha\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta = \dots \rho \rightarrow 0 \dots = i \int_{\pi}^0 d\theta = -i\pi. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\mathcal{I}_1 = i\pi; \quad \mathcal{I} = \frac{\pi}{2}.$$

Dla konturu 1.21(b) zmienia się kierunek obchodzenia punktu zero – kąt θ zmienia się od π do 2π , tak że całkowanie po małym półkolu daje przyczynkę równy $+i\pi$. Z kolei, po prawej stronie (1.87) pojawia się $2\pi i \operatorname{Res}[e^{i\alpha z}/z; z=0] = 2\pi i$. Daje to oczywiście ten sam wynik.

$$\text{Całki typu } \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

Przyjmijmy, że $R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ jest wymierną funkcją sinusa i kosinusa kąta θ . Stosujemy podstawienie

$$z = e^{i\theta}; \quad dz = ie^{i\theta} d\theta \quad (1.89)$$

i konsekwentnie

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right); \quad \sin\theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Przy takich podstawieniach

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \Rightarrow \mathcal{I} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R\left(z + \frac{1}{z}, z - \frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (1.90)$$

Konturem całkowania jest koło jednostkowe $|z| = 1$. Funkcja podcałkowa pozostaje w dalszym ciągu funkcją wymierną, ale już zmiennej z i zgodnie z definicją funkcji wymiernej

$$\tilde{R}(z) = R\left(z + \frac{1}{z}, z - \frac{1}{z}\right) \frac{1}{z} = \frac{a_0 + a_1 z + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + a_m z^m},$$

gdzie n i m to pewne (skończone) liczby całkowite. Taka funkcja podcałkowa jest wewnątrz koła jednostkowego analityczna wszędzie, poza skończoną liczbą N punktów, będących zerami mianownika ($N \leq m$).

Zgodnie z twierdzeniem o residuach

$$\mathcal{I} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz = 2\pi \sum_{k=1}^N \text{Res}[\tilde{R}(z); z = z_k], \quad (1.91)$$

gdzie z_k to bieguny funkcji podcałkowej.

Przykład:

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}, \quad |a| < 1.$$

Korzystamy z podstawienia (1.88). Całka przyjmuje postać

$$\mathcal{I} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a} = \dots$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$az^2 + 2z + a = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}.$$

Z postaci równania kwadratowego wynika, że $z_1 \cdot z_2 = 1$, a więc tylko jeden z biegunów leży wewnątrz koła. Bliższa analiza (warto ją samemu przeprowadzić) wykazuje, że jest to z_1 i ostatecznie

$$\mathcal{I} = 4\pi \text{Res} \left[\frac{1}{a(z - z_1)(z - z_2)}; z = z_1 \right] = 4\pi \frac{1}{a(z_1 - z_2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

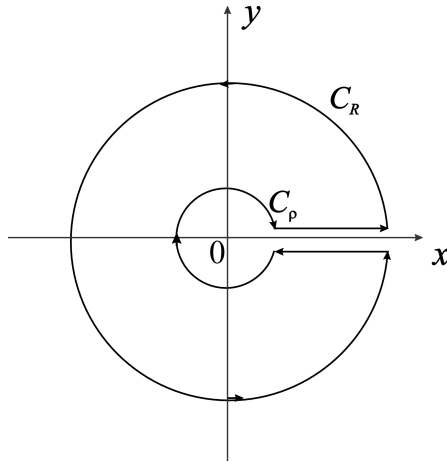
Całki z funkcji wieloznacznych

W powyższych przykładach obliczania całek korzystaliśmy z twierdzenia o residuach, które stosuje się do funkcji analitycznych jednoznacznych (funkcji regularnych). Jeżeli przedłużenie analityczne całkowanej (po osi $0x$) funkcji $f(x)$ na płaszczyznę zespoloną jest funkcją wieloznaczną, to musimy poddać kontur całkowania odpowiedniej modyfikacji – tak, aby nie zawierał on punktów rozgałęzienia takiej funkcji i rozważać jedną gałąź funkcji $f(z)$. Oprócz wyników całkowania takie procedury pozwalają nam lepiej zrozumieć pojęcia wieloznaczności funkcji i jej gałęzi.

Jako przykład obliczmy całkę

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.92)$$

O funkcji $f(z)$, stanowiącej analityczne przedłużenie $f(x)$ na całą płaszczyznę \mathcal{C}_z , zakładamy, że jest ona analityczna wszędzie, z wyjątkiem skończonej liczby izolowanych punktów osobliwych – biegunów: $z = z_k$; $k = 1, \dots, n$, z których żaden nie jest dodatnią liczbą rzeczywistą (a więc nie leży na dodatniej półosi $0x$). Zakładamy też, że punkt w nieskończoności jest dla $f(z)$ zerem przynajmniej pierwszego rzędu, natomiast punkt $z = 0$ jest usuwalną osobliwością.



Rysunek 1.22: Kontur całkowania: „duże” koło C_R i „małe” – C_ρ , połączone dwoma segmentami cięcia wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej

Aby obliczyć całkę korzystamy z konturu (rys.1.22), na który składają się „duże” koło C_R i „małe” – C_ρ , połączone dwoma segmentami cięcia wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej. Na takim konturze całkujemy funkcję

$$\Phi(z) \equiv z^{\alpha-1} f(z), \quad (1.93)$$

która na górnym brzegu cięcia jest naszą funkcją podcałkową ze wzoru (1.91).

Z twierdzenia o residuach wynika

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} \Phi(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\rho}^R x^{\alpha-1} f(x) dx + \int_{C_{R^+}} \zeta^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta + \int_R^{\rho} \zeta^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta + \int_{C_{\rho^-}} \zeta^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [\Phi(z); z = z_k]. \end{aligned} \quad (1.94)$$

(Znaki „+” i „-” przy „kolistych” częściach konturu odnoszą się do dodatniego i ujemnego kierunku obiegu obszaru zawartego wewnątrz konturu.) Dla drugiej całki mamy oszacowanie

$$\left| \int_{C_{R^+}} \zeta^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{MR^{\alpha-1} 2\pi R}{R} = 2\pi R^{\alpha-1} \rightarrow 0 \quad \text{przy } R \rightarrow \infty,$$

bowiem zgodnie z założeniem o zachowaniu się $f(z)$ w nieskończoności mamy, na dużym kole o promieniu R ,

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|}; \quad M - \text{ pewna stała.}$$

Podobnie na małym kole, o promieniu ρ ,

$$\left| \int_{C_{\rho^-}} \zeta^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta \right| \leq M_1 \rho^{\alpha-1} 2\pi \rho \rightarrow 0 \quad \text{przy } \rho \rightarrow 0,$$

co z kolei wynika z charakteru zera (usuwalna osobliwość) – funkcja $f(z)$ ma w jego okolicy ograniczenie M_1 .

Pozostaje całka

$$\int_R^{\rho} \zeta^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta$$

liczona wzdłuż *dolnej* krawędzi cięcia. Na tej krawędzi $\arg \zeta = 2\pi$ i dlatego mamy

$$\zeta = xe^{i2\pi} = x; \quad d\zeta = dx e^{i2\pi} = dx; \quad \zeta^{\alpha-1} = x^{\alpha-1} e^{i2\pi(\alpha-1)} = x^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha}.$$

Przy uwzględnieniu zmiany kierunku całkowania, powyższa całka przyjmuje postać

$$\int_R^{\rho} \zeta^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta = -e^{i2\pi\alpha} \int_{\rho}^R x^{\alpha-1} f(x) dx.$$

i wzór (1.93) daje nam ($R \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$)

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [\Phi(z); z = z_k]. \quad (1.95)$$

Przykładem zastosowania takiej metody może być obliczenie całki

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Jedyny biegun funkcji podcałkowej to $z = -1$, z residuum równym $e^{i\pi(\alpha-1)}$. Mamy

$$\mathcal{I} = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} e^{i\pi(\alpha-1)} = 2\pi i \frac{e^{i\pi\alpha}(-1)}{1 - e^{i2\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

Całki typu $\mathcal{I} = \int_0^{\infty} f(x) \ln x dx$.

Zakładamy, że mamy do czynienia z funkcjami parzystymi: $f(-x) = f(x)$, których zachowanie się w nieskończoności to

$$f(z) \propto \frac{1}{z^{1+\delta}}; \quad \delta > 0.$$

Funkcję $f(x)$ przedłużamy analitycznie na obszar górnej półpłaszczyzny: $f(x) \ln x \rightarrow \Phi(z)$. Na osi rzeczywistej mamy, korzystając z parzystości f ,

$$\begin{aligned} x > 0; \quad \Phi(z) &= f(x) \ln x; \\ x < 0; \quad \Phi(z) &= f(-x) \ln(xe^{i\pi}) = f(x)[\ln x + i\pi]. \end{aligned}$$

Całkujemy po konturze Γ , jak na rys.1.21(a). Analogicznie jak w (1.87)

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \Phi(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{-R}^{-\rho} f(x)[\ln x + i\pi] dx + \int_{+\rho}^{+R} f(x) \ln x dx + \int_{C_{\rho}} f(\zeta) \ln \zeta d\zeta + \int_{C_R} f(\zeta) \ln \zeta d\zeta \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[\Phi(z); z = z_k], \end{aligned} \quad (1.96)$$

gdzie z_k ; $k = 1, \dots, n$ to osobliwości $\Phi(z)$ w górnej półpłaszczyźnie.

Przy $R \rightarrow \infty$ i $\rho \rightarrow 0$ obie całki po półkółkach znikają, mamy bowiem

$$\left| \int_{C_R} f(\zeta) \ln \zeta d\zeta \right| \leq \frac{M}{R^{1+\delta}} \int_0^{\pi} |\ln \zeta| R d\theta \leq \frac{M\pi}{R^{\delta}} \sqrt{\ln^2 R + \pi^2} \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad R \rightarrow \infty$$

i podobnie dla małego półkola.

Wzór (1.95) przybiera postać

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\ln x + \frac{i\pi}{2} \right] dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} [\Phi(z); z = z_k], \quad (1.97)$$

albo

$$\int_0^{\infty} f(x) \ln x dx = \pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \{ [f(z)(\ln z - i\pi/2)]; z = z_k \}. \quad (1.98)$$

Opisany powyżej schemat daje na przykład

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx = \pi i \operatorname{Res} \left\{ \left[\frac{1}{(1+z^2)^2} (\ln z - i\pi/2) \right]; z = i \right\} = \dots = -\frac{\pi}{4}.$$

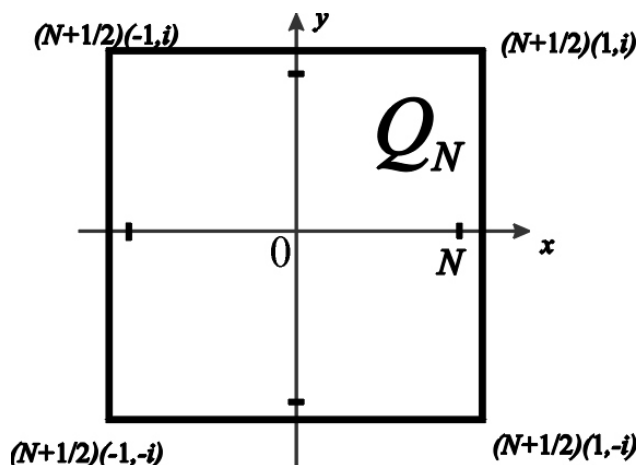
1.11.2 Wyznaczanie sum szeregów

Założmy, że mamy funkcję $f(z)$, taką że

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0 \quad (1.99)$$

i że funkcja ta ma, na płaszczyźnie zespolonej \mathcal{C}_z , skończoną liczbę izolowanych punktów osobliwych – biegunów: z_1, z_2, \dots, z_m . Dla (chwilowego) ułatwienia przyjmijmy, że żadna z tych osobliwości nie jest rzeczywistą liczbą całkowitą: $z \neq \pm N$.

Na płaszczyźnie zespolonej konstruujemy kwadrat Q_N , położony symetrycznie względem obu osi $0x$ i $0y$, tak że współrzędna x -owa jego „prawego” boku znajduje się „w środku” pomiędzy $x = N$ a $x = N + 1$ (por. rys.1.23, na którym określone są współrzędne czterech wierzchołków kwadratu.)



Rysunek 1.23: Kontur całkowania Q_N na płaszczyźnie \mathcal{C}_z

Wprowadzamy teraz funkcję

$$\pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z = \pi f(z) \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \quad (1.100)$$

– iloczyn wprowadzonej wcześniej funkcji $f(z)$ i kotangensa. Na bokach kwadratu funkcja $\operatorname{ctg} \pi z$ albo – dla prostoty – $\operatorname{ctg} z$ pozostaje ograniczona, bez względu na wartość N . Mamy bowiem

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{\cos z}{\sin z} \right| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| \leq \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{|e^{iz}| - |e^{-iz}|} \dots$$

(moduł z sumy nie jest większy od sumy modułów; moduł z różnicy nie jest mniejszy od różnicy modułów)

$$\dots = \frac{e^{-y} + e^y}{e^{-y} - e^y} \rightarrow 1 \quad \text{przy } y \rightarrow \pm\infty.$$

Jeżeli tak to całka konturowa

$$\oint_{Q_N} \pi \operatorname{ctg} \pi z f(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{przy } N \rightarrow \infty,$$

bowiem dla dostatecznie dużych N

$$\left| \oint_{Q_N} \operatorname{ctg} \pi z f(z) dz \right| \leq \left| \oint_{Q_N} f(z) dz \right| \rightarrow 0,$$

ze względu na warunek (1.98). Z drugiej strony ta całka równa jest – z dokładnością do (mało istotnego w tym przypadku) czynnika $2\pi i$ – sumie *wszystkich* residuów funkcji podcałkowej, a więc tych liczonych w punktach osobliwych $f(z)$, jak i osobliwościach kotangensa – biegunach pierwszego rzędu: $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \dots$. Te ostatnie to

$$\operatorname{Res} \{ \pi \operatorname{ctg} \pi z f(z); z = \pm N \} = f(\pm N).$$

Mamy więc

$$0 = 2\pi i \left\{ \sum_{N=-\infty}^{N=+\infty} \operatorname{Res} \left[\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} f(z); z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \dots \right] \right\} \\ + 2\pi i \left\{ \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} \left[\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} f(z); z = z_1, \dots, z_k, \dots, z_m \right] \right\}$$

albo

$$\sum_{N=-\infty}^{N=+\infty} f(N) = -\pi \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} \left[\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} f(z); z = z_1, \dots, z_k, \dots, z_m \right]. \quad (1.101)$$

(Jeżeli zaglądałeś kiedykolwiek Czytelniku do tablic sum szeregów, to z pewnością zauważyłeś, jak wiele podanych tam wzorów zawiera w sobie liczbę π – teraz rozumiemy już dlaczego.)

Jako przykład rozważmy sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + a^4}; \quad a^4 \neq 0, -1^4, -2^4, \dots \quad (1.102)$$

Sumę tę możemy obliczyć według zaprezentowanego wyżej schematu, jeżeli zauważymy, że

$$S \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + a_0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{a^4};$$

stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{S}{2} - \frac{1}{2a^4}$$

(przez a_n oznaczyliśmy n -ty wyraz szeregu). Bieguny (pierwszego rzędu) funkcji (spełniającej warunek (1.98)!)

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + a^4},$$

to punkty spełniające równanie $z_r^4 = -a^4$:

$$z_r = \pm\sqrt{\pm ia} = a \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}; \quad r = 1, 2, 3, 4,$$

a residua w nich to

$$\text{res}[f(z), z = z_r] = \frac{1}{4z_r^3} = \frac{z_r}{4z_r^4} = -\frac{z_r}{4a^4}.$$

Zgodnie z (1.100)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4 + a^4} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{a^4} \sum_{r=1}^4 z_r \text{ctg } \pi z_r. \quad (1.103)$$

Reszta to już algebra; podstawiamy za z_r i po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + a^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a^3 \sqrt{2}} \frac{\sin \pi a \sqrt{2} + \sinh \pi a \sqrt{2}}{\cosh \pi a \sqrt{2} - \cos \pi a \sqrt{2}} - \frac{1}{a^4} \right). \quad (1.104)$$

Rozumiemy teraz, dlaczego zastrzegaliśmy się że bieguny „roboczej” funkcji $f(z)$ nie mogą być liczbami całkowitymi – chodziło o uniknięcie kolizji osobliwości obu funkcji: kotangensa πz i samej f . Ale nie jest to problem nie do ominięcia. Na przykład obliczenie szalenie często spotykanej sumy¹⁵

$$S \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (1.105)$$

po podstawieniu

$$f(z) = \frac{1}{z^2}$$

nie sprawia większych trudności. Jedyne bieguny $f(z)$, punkt $z = 0$, koincyduje wprawdzie z biegunem kotangensa, ale nie przeszkadza to faktowi, że

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2S = -\pi \text{Res} \left[\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \frac{1}{z^2}; z = 0 \right]. \quad (1.106)$$

¹⁵Przez około sto lat, na przełomie 17. i 18. wieku, wielcy matematycy – Jan i Daniel Bernoulli, Stirling, Leibnitz – próbowali obliczyć tę sumę. Udało się dopiero Eulerowi, w 1735 r. Chcesz wiedzieć jak? Zglądaj na stronę: <http://www.ftj.agh.edu.pl/~lenda/cicer/cyklop.htm>.

Dostajemy do policzenia residuum w biegunie 3. rzędu. Osobiście, zamiast liczyć drugą pochodną funkcji, wolę liczyć residuum z jego podstawowej definicji – jako współczynnik przy $1/z$. Wystarczy wykonać parę pierwszych kroków dzielenia

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \frac{1}{z^2} \\ &= \frac{1 - \frac{(\pi z)^2}{2!} + \frac{(\pi z)^4}{4!} - \dots}{\frac{\pi z^3}{1!} - \frac{\pi^3 z^5}{3!} + \dots} \\ &= \frac{1}{\pi z^3} - \frac{1}{3} \pi \frac{1}{z} + \dots \end{aligned}$$

Dalsze rachunki nie są już potrzebne; residuum wynosi $-1/3\pi$, czyli – zgodnie z 1.105)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.107}$$

Zaprezentowana, prosta w gruncie rzeczy, technika liczenia sum nieskończonych opiera się fakcie, że residuum funkcji $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ dla z całkowitego równe jest jedności. Nietrudno zauważyć, że residuum funkcji

$$\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

dla $z = \pm n$, to $(-1)^n$, a jeżeli tak, to funkcja ta będzie znakomitą narzędziem do sumowania szeregów przestępnych. Analogicznie do wzoru (1.100) będziemy mieć

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{k=1}^m \operatorname{Res} \left[\frac{1}{\sin \pi z} f(z); z = z_1, \dots, z_k, \dots, z_m \right], \tag{1.108}$$

przy czym $f(z)$ i tym razem musi spełniać warunek (1.98), a bieguny $f(z)$ nie powinny koincydować z biegunami $\sin \pi z$ ($\pm N$). Analizę zachowania się funkcji $1/\sin \pi z$ na brzegu kwadratu pozostawiam Czytelnikowi; bardzo łatwo można wykazać, że na bokach kwadratu Q_N $|\sin \pi z| \geq 1$.

1.11.3 Rozkład funkcji meromorficznej na ułamki proste; iloczyny nieskończone

Załóżmy, że mamy funkcję $f(z)$, która jest regularna w całej płaszczyźnie otwartej, z wyjątkiem izolowanych punktów osobliwych: $z = z_1, z_2, \dots, z_m \dots$; $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = \infty$ – biegunów pierwszego rzędu¹⁶. Dla ułatwienia przyjmijmy, że bieguny $f(z)$ są uszeregowane według rosnących modułów: $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots |z_k| \dots \leq |z_m| \leq \dots$. Rozważmy całkę

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_m} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_m} \Phi(z) dz. \tag{1.109}$$

¹⁶Poniższy wywód może zostać rozszerzony na przypadek, kiedy osobliwości funkcji biegunowej są biegunami n -tego rzędu.

Całkujemy po kole o środku w $z = 0$ i promieniu K_m na tyle dużym, że mieści się w nim pierwsze m biegunów oraz punkt z_0 . Zgodnie z twierdzeniem o residuach, wartość tej całki to suma residuów funkcji podcałkowej $\Phi(z)$, na którą składają się resida w z_0 i $z = z_k, k = 1, \dots, m$. Pierwsze z nich to po prostu $f(z_0)$, pozostałe to

$$C_{-1}(\Phi(z), z = z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{(z - z_k)f(z)}{z - z_0} = \frac{c_{-1}(z = z_k)}{z_k - z_0}, \quad (1.110)$$

gdzie $c_{-1}(z = z_k)$ to residuum $f(z)$ w jej k -tym biegunie. Tak więc całka (1.108) jest równa

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_m} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) + \sum_{k=1}^m \frac{c_{-1}(z = z_k)}{z_k - z_0} \quad (1.111)$$

albo

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_m} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \sum_{k=1}^m \frac{c_{-1}(z = z_k)}{z_0 - z_k}. \quad (1.112)$$

Zauważmy, że dla $z_0 = 0$ równanie(1.110) to

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_m} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) + \sum_{k=1}^m \frac{c_{-1}(z = z_k)}{z_k}. \quad (1.113)$$

Lewą stronę równania (1.110) możemy przetransformować do postaci

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_m} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_m} \frac{f(z)}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_m} \frac{f(z)z_0}{z(z - z_0)} dz. \quad (1.114)$$

Za pierwszą z całek występujących po prawej stronie podstawiamy z równania (1.112). Wówczas równania (1.111), (1.113) i (1.112) dają

$$f(z_0) = f(0) + \sum_{k=1}^m \frac{c_{-1}(z = z_k)}{z_0 - z_k} + \sum_{k=1}^m \frac{c_{-1}(z = z_k)}{z_k} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_m} \frac{f(z)z_0}{z(z - z_0)} dz. \quad (1.115)$$

Jeżeli mamy do czynienia z funkcją $f(z)$, która przy $z \rightarrow \infty$ pozostaje ograniczona, albo rośnie, ale tak, że

$$\frac{f(z)}{z^2} \propto \frac{1}{z^{1+\delta}}; \quad \delta > 0, \quad (1.116)$$

to całka występująca w (1.114) przy $z \rightarrow \infty$ znika i otrzymujemy zgrabne wyrażenie funkcji $f(z)$ (dla wybranego punktu $z = z_0$) w postaci nieskończonej sumy ułamków prostych

$$f(z_0) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-1} \left(\frac{1}{z_0 - z_k} + \frac{1}{z_k} \right). \quad (1.117)$$

Tak jak wspomnieliśmy na wstępie, bieguny nie muszą być biegunami pierwszego rzędu. Dla biegunów n -tego rzędu wzór ulega pewnej komplikacji, niemniej jednak podstawowy wniosek wywód pozostaje ten sam – funkcja jest określona

poprzez swoje osobliwości biegunowe (z_k) i wartości residuów w tych punktach. W przypadku kiedy bieguny są biegunami 1. rzędu, to wzór (1.116) nazywa się rozwinięciem Cauchy'ego; dla biegunów n -tego rzędu mówi się o rozwinięciu (postać nieco bardziej skomplikowana) Mittag-Leffler'a.

Sympatycznym przykładem będzie dobrze nam znana funkcja $\text{ctg } z$. Ponieważ jednak $\text{ctg } 0$ jest nieokreślony, będziemy rozważać funkcję

$$f(z) = \text{ctg } z - \frac{1}{z}. \tag{1.118}$$

W zerze $f(0) = 0$; a (pozostałe) bieguny kotangensa to $z_k = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Zgodnie z (1.116)

$$\text{ctg } z - \frac{1}{z} = \sum_{k \neq 0} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right). \tag{1.119}$$

(Sumujemy po wszystkich wartościach – dodatnich i ujemnych – wskaźnika k , z wyjątkiem $k = 0$.) Ogólny wyraz szeregu (1.118), w kole o skończonym (dowolnie dużym) promieniu R , dla $|z| \leq R$ spełnia

$$\left| \frac{z}{(z - k\pi)k\pi} \right| = \frac{1}{k^2} \frac{|z|}{\left| \pi - \frac{z}{k} \right|} \leq \frac{1}{k^2} \frac{R}{\pi \left(\pi - \frac{R}{k} \right)}, \tag{1.120}$$

czyli dla odpowiednio dużego k majorantą dla szeregu (1.118) jest (zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w dowolnym kole $|z| \leq R$) szereg $\sum_{-\infty}^{+\infty} 1/k^2$. Dlatego też, dla dowolnej, skończonej wartości z możemy w (1.118) zmienić porządek wyrazów; łącząc parami wyrazy o przeciwnych znakach wskaźnika k , otrzymujemy

$$\text{ctg } z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} \tag{1.121}$$

albo dla funkcji $\text{ctg } \pi z$

$$\pi \text{ctg } \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}. \tag{1.122}$$

Tego typu rozwinięć można utworzyć wiele. Poniżej podajemy kilka z nich – weryfikacja tych wzorów odbywa się dokładnie według zaprezentowanego wcześniej schematu. Jedyna (niewielka) trudność to poprawne zlokalizowanie biegunów i obliczenie w nich residuów funkcji.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi z} &= \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - z^2}, \quad z \neq 0, \mp 1, \mp 2, \dots, \\ \frac{\pi}{\cos \pi z} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + \frac{1}{2})}{(n + \frac{1}{2})^2 - z^2}, \quad z \neq \frac{1}{2}, \mp \frac{3}{2}, \mp \frac{5}{2}, \dots, \\ \pi \text{tg } \pi z &= 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2 - z^2}, \quad z \neq \frac{1}{2}, \mp \frac{3}{2}, \mp \frac{5}{2}, \dots, \\ \frac{1}{\sin z \sinh z} &= \frac{1}{z^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 4m\pi z^2}{\sinh m\pi (z^4 - m^4\pi^4)}, \quad z \neq ? \end{aligned}$$

Spróbuj Czytelniku wyprowadzić sam rozwinięcia – analogiczne do pierwszych trzech – dla funkcji hiperbolicznych: $1/\sinh \pi z$, $1/\cosh \pi z$, $\pi \operatorname{tgh} \pi z$.

Iloczyn nieskończony

Dyskutowana powyżej funkcja $\operatorname{ctg} z$ ma tę „sympatyczną” własność, że residua liczone w osobliwościach biegunowych $z_k = \pm k\pi$, $k \neq 0$ są równe 1, co wynika oczywiście z faktu, że kotangens to stosunek dwóch funkcji (kosinusa i sinusa), z których pierwsza jest pochodną drugiej. Zobaczmy, jakie treści kryje w sobie wzór (1.116), jeżeli funkcję $f(z)$ możemy zapisać w postaci

$$f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad (1.123)$$

gdzie funkcja $g(z)$ ma w punktach z_k , $k = 1, \dots, \infty$ zera pierwszego rzędu (tzn. $g'(z_k) \neq 0$). Mamy (w zgodzie z 1.116)

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{g'(0)}{g(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} \right). \quad (1.124)$$

Całkując powyższą równość po dz od $z = 0$ do z , otrzymujemy

$$\ln g(z) - \ln g(0) = \frac{g'(0)}{g(0)} z + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln \frac{z - z_k}{0 - z_k} + \frac{z}{z_k} \right). \quad (1.125)$$

(Sumujemy po wszystkich osobliwościach biegunowych.) Pozbywamy się logarytmów i otrzymujemy reprezentację funkcji $g(z)$, w której główną rolę odgrywa nieskończony iloczyn

$$g(z) = g(0) \exp \left[\frac{g'(0)}{g(0)} z \right] \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{z/z_k} \right], \quad (1.126)$$

tzw. iloczyn Weierstrassa.

Znowu warto przeliczyć prosty przykład. Niech $g(z) = \frac{\sin z}{z}$. Zera (pierwszego rzędu) $g(z)$ to $z = \pm k\pi$, $k \neq 0$, $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$. Zgodnie z (1.125) mamy

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi} \right) e^{z/k\pi} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k\pi} \right) e^{-z/k\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right). \quad (1.127)$$

Wzór (1.123) możemy napisać w nieco prostszej formie, jeżeli nasza funkcja $g(z)$ jest parzysta (tak jak jest to w przypadku funkcji $\sin z/z$). Wydzielając osobno przyczynki od „lustrzanych” – dodatnich i ujemnych – osobliwości biegunowych, mamy

$$\begin{aligned} \frac{g'(z)}{g(z)} &= \frac{g'(0)}{g(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z + z_k} - \frac{1}{z_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - z_k^2}. \end{aligned} \quad (1.128)$$

(pochodna funkcji parzystej w zerze jest równa zero, przyczynki od obu sum częściowo się redukują.) Tak więc

$$g'(z) = g(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - z_k^2}. \quad (1.129)$$

Jeżeli zrózniczkować ten wzór trzykrotnie i obliczyć wartości parzystych pochodnych w zerze, to otrzymamy¹⁷:

$$g''(0) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^2}, \quad \text{oraz} \quad (1.130)$$

$$g^{IV}(0) = 3[g''(0)]^2 - 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^4}. \quad (1.131)$$

Wstawiając do ostatnich wzorów raz jeszcze funkcję $\sin z/z$ i obliczając jej pochodne – drugą i czwartą – w zerze, otrzymujemy kolejny sposób na zweryfikowanie wartości sum

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (1.132)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (1.133)$$

1.12 Odwzorowania konforemne i wektorowe pole płaskie

Płaszczyzna zespolona – zbiór liczb zespolonych – może być traktowana jako dwuwymiarowa przestrzeń wektorowa. Część rzeczywista liczby zespolonej to współrzędna wektora na osi $0x$; część urojona – jego współrzędna na osi $0y$. Zapis

$$z = x + iy \quad (1.134)$$

może być traktowany jako przedstawienie wektora \mathbf{V}

$$\mathbf{V} = V_x + iV_y. \quad (1.135)$$

W fizyce, która rozgrywa się w „normalnej” trójwymiarowej przestrzeni, mamy często przypadki, kiedy rozpatrywane pola wektorowe są „praktycznie” dwu-, a nie trójwymiarowe. Pole elektryczne wytwarzane przez ładunek „rozciągnięty” wzdłuż jednego z trzech wymiarów, rozpatrywane niezbyt blisko końców tego „liniowego” ładunku, jest do niego (praktycznie) prostopadłe, a więc do jego opisu wystarczą

¹⁷Różniczkowanie jest nieco żmudne; alternatywny sposób podejścia to obliczenie drugiej i czwartej pochodnej jako odpowiednich całek konturowych, traktując drugą pochodną jako pierwszą, a czwartą – jako trzecią pochodną funkcji $g'(z)$, określonej jak w (1.128).

dwie (a nie trzy) współrzędne. Podobnie rzecz się ma w zjawiskach transportu – masy (cieczy) lub ciepła — kiedy pole prędkości, z jaką przemieszcza się medium jest znowu – w wyniku istnienia pewnych symetrii – pozbawione zależności od jednej z trzech współrzędnych.

To, że sięgamy po przykłady zjawisk fizycznych, opisywanych równaniem Laplace’a, nie jest przypadkowe. Przypomnijmy, że fundament analizy funkcji zmiennej zespolonej – warunki Cauchy’ego-Riemanna – implikują konieczność spełniania tego właśnie równania przez część rzeczywistą i urojoną funkcji $f(z)$. Harmoniczność – spełnianie przez funkcję równania Laplace’a – jest inherentnym atrybutem funkcji zmiennej zespolonej. Właśnie ten fakt, w połączeniu z traktowaniem płaszczyzny zespolonej jako zbioru dwuwymiarowych wektorów, stwarza bardzo skuteczne narzędzie rozwiązywania problemów fizycznych opisanych równaniem Laplace’a i pewnymi dodatkowymi *warunkami brzegowymi*. Narzędzie to formalnie oparte jest na *odwzorowaniach konforemnych*, to jest odwzorowaniach, jakie realizuje funkcja analityczna

$$w(z) = f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (1.136)$$

Funkcja ta odwzorowuje pewien obszar płaszczyzny zespolonej \mathcal{C}_z na pewien obszar płaszczyzny zespolonej \mathcal{C}_w . Zauważmy, że sytuacja jest znacznie bardziej skomplikowana niż w przypadku funkcji zmiennej rzeczywistej. Wtedy funkcja $y = f(x)$ mówi nam o przyporządkowaniu wartościom dziedziny – punktom osi $0x$ — wartości zbioru przeciwdziedziny – punktów osi $0y$. Wizualizacja takiego przyporządkowania to wykres funkcji – pewna krzywa na płaszczyźnie $0xy$. Aby zilustrować odwzorowania realizowane przez funkcje zmiennej zespolonej, musimy użyć dwóch, dość złożonych, elementów: płaszczyzny \mathcal{C}_z (bądź jej wybranego obszaru) i płaszczyzny zespolonej \mathcal{C}_w , na której powstaje obraz odwzorowania. Sytuacja ulega dalszej komplikacji, jeżeli odwzorowanie nie jest jedno-jednoznaczne, to znaczy kiedy np. dwa (lub więcej) różne zbiory punktów płaszczyzny \mathcal{C}_z odwzorowują się w ten sam obszar \mathcal{C}_w .

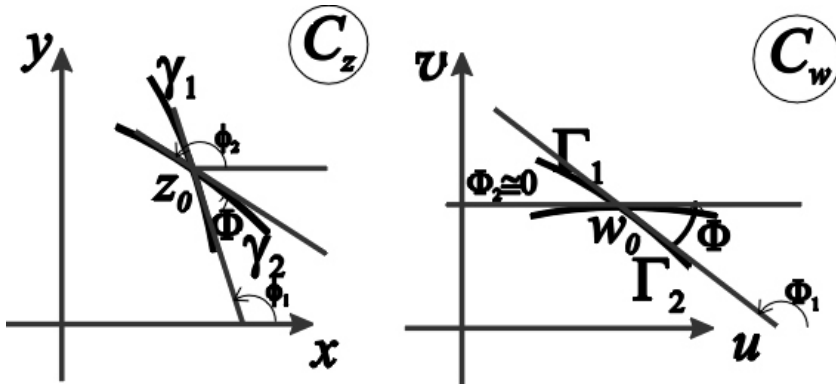
Przykłady takich odwzorowań były już omawiane w podrozdziale 1.4.1. Tutaj zajmijmy się w pierwszym rzędzie pewną specjalną klasą odwzorowań – *odwzorowaniami konforemnymi*.

1.12.1 Odwzorowania konforemne

Przypuśćmy, że rozważamy odwzorowanie pewnego obszaru \mathcal{D}_z płaszczyzny \mathcal{C}_z , realizowane przez *analityczną* i *jednoznaczną* funkcję $f(z)$. Obszar \mathcal{D}_z ulega przeobrażeniu w obszar \mathcal{D}_w . Analityczność $f(z)$ oznacza, że dla dowolnego $z_0 \in \mathcal{D}_z$ istnieje pochodna — granica ilorazu różnicowego

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \equiv Ke^{i\alpha}, \quad (1.137)$$

gdzie K to moduł, a α – argument liczby zespolonej $f'(z_0)$. Dodatkowo założymy, że pochodna $f'(z_0) \neq 0$. Odwzorowanie, realizowane przez taką funkcję $f(z)$,



Rysunek 1.24: Obliczanie pochodnej $f(z)$ w punkcie z_0

nazywać będziemy *odwzorowaniem konforemnym*. Znaczenie tego terminu jest następujące:

Granice występującą w (1.136) możemy obliczać wzdłuż *dowolnej* krzywej przechodzącej przez z_0 , np. wzdłuż dwóch krzywych γ_1 i γ_2 w \mathcal{D}_z , których obrazami na płaszczyźnie \mathcal{C}_w (w obszarze \mathcal{D}_w) są Γ_1 i Γ_2 (rys.1.24). Występujące w liczniku i mianowniku ilorazu różnicowego (1.136) przyrosty zmiennej (Δz) i funkcji (Δw) to wektory, stanowiące segmenty siecznych przecinających krzywe γ_1 bądź γ_2 (Δz) i Γ_1 bądź Γ_2 (Δw). Sieczne te stają się w granicy $\Delta z \rightarrow 0$ stycznymi do krzywych i tworzą z osiami rzeczywistymi odpowiednie kąty; kąty, które tworzą styczne do krzywych γ_1 i γ_2 oznaczymy odpowiednio przez ϕ_1 i ϕ_2 , a styczne do ich obrazów – krzywych Γ_1 i Γ_2 – przez Φ_1 i Φ_2 . Wprowadzony w (1.136) α – argument liczby zespolonej $w'(z_0)$ – to

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [\arg \Delta w - \arg \Delta z] = \Phi_1 - \phi_1 = \Phi_2 - \phi_2, \quad (1.138)$$

w zależności, czy wędrówka do punktu z_0 odbywa się wzdłuż γ_1 czy γ_2 .

Mamy więc

$$\Phi_1 - \phi_1 = \Phi_2 - \phi_2$$

albo

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \phi_1 - \phi_2 = \Phi,$$

gdzie Φ to kąt, jaki tworzą zarówno styczne do krzywych γ_1 i γ_2 , jak i styczne do ich obrazów – krzywych Γ_1 i Γ_2 . W przypadku odwzorowania konforemnego, kąt między krzywymi zostaje zachowany. Zachowana jest nie tylko bezwzględna wartość kąta, ale i jego zwrot (znak).

Jeżeli przeprowadzimy analogiczne rozumowanie dotyczące nie argumentu, lecz modułu liczby zespolonej, będącej wartością pochodnej $f(z_0)$, to wyniknie z niego, że wszystkie „małe” wektory – te wokół punktu z_0 , δz , jak i te wokół punktu w_0 , δw powiązane są zależnością

$$|\delta w| = K|\delta z|,$$

gdzie przez K oznaczyliśmy moduł liczby zespolonej $w'(z_0)$.

Wszystkie nieskończenie małe wektory płaszczyzny \mathcal{C}_z , z okolicy punktu z_0 , w trakcie konforemnego odwzorowania w wektory płaszczyzny \mathcal{C}_w doznają identycznego rozciągnięcia bądź kontrakcji.

Podkreślmy raz jeszcze – właściwości (zachowanie wartości i znaku kąta, ten sam współczynnik skalowania długości) wynikają z analityczności funkcji, czyli istnienia jej pochodnej, a także *różnej od zera wartości tej pochodnej* (dla wartości zerowej, współczynnik skalowania byłby równy zeru!). Odwzorowanie, któremu odpowiada funkcja $f(z)$, nie będzie konforemne w punkcie będącym bądź punktem osobliwym f , bądź jej punktem zerowym.

1.12.2 Homografia

Przykładem odwzorowania konforemnego jest *odwzorowanie homograficzne*:

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.139)$$

gdzie: a, b, c, d to zespolone liczby, parametry homografii, spełniające oczywisty warunek

$$ac - bd \neq 0. \quad (1.140)$$

Stała c też będzie różna od zera (w przeciwnym wypadku mielibyśmy do czynienia ze zwykłą funkcją liniową) i dlatego wzór (1.138) można przekształcić do postaci

$$w = f(z) = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c} \left(z + \frac{b}{a} \right)}{z + \frac{d}{c}} \equiv p \frac{z + q}{z + r}, \quad (1.141)$$

Trzy parametry: $p = a/c, q = b/a, r = d/c$ określają w pełni odwzorowanie homograficzne; funkcja (1.138), (1.140) jest jednoznaczna, analityczną funkcją na całej płaszczyźnie \mathcal{C}_z , z wyjątkiem jednego punktu osobliwego, bieguna pierwszego rzędu: $z_0 = -d/c = -r$. Funkcja odwrotna

$$z = \frac{pq - rw}{-p + w} \quad (1.142)$$

jest także homografią, określoną na całej płaszczyźnie \mathcal{C}_w , z wyjątkiem bieguna $w_0 = p = a/c$. Zauważmy, punkt $z_0 = -d/c = -r$ odwzorowuje się w punkt $w = \infty$, a $z = \infty$ w $w_0 = p$.

Pochodna funkcji (1.140) to

$$f'(z) = p \frac{r - q}{(z + r)^2} \neq 0, \quad (1.143)$$

(ze względu na warunek (1.139)).

Homografia jest więc odwzorowaniem konforemnym płaszczyzny \mathcal{C}_z na płaszczyznę \mathcal{C}_w .

Ponieważ homografię określają trzy parametry, to zadanie trzech odwzorowań – trzech warunków

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2, \quad f(z_3) = w_3, \quad (1.144)$$

określa jednoznacznie odwzorowanie homograficzne. Obliczmy

$$\begin{aligned} w_1 - w_3 &= p \frac{(z_1 - z_3)(r - q)}{(r + z_1)(r + z_3)}, \\ w_2 - w_3 &= p \frac{(z_2 - z_3)(r - q)}{(r + z_2)(r + z_3)}. \end{aligned}$$

Dzieląc powyższe równania stronami, otrzymujemy

$$\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{r + z_2}{r + z_1}. \quad (1.145)$$

Powyższy związek można zapisać dla dowolnego punktu $w = w(z)$

$$\frac{w_1 - w}{w_2 - w} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \cdot \frac{r + z_2}{r + z_1}. \quad (1.146)$$

Dzieląc stronami (1.144) i (1.145), otrzymujemy

$$\frac{w_1 - w}{w_2 - w} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_1 - w_3} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \quad (1.147)$$

– uwikłaną postać odwzorowania homograficznego, w której występują *explicite* warunki (1.143). Wybór trzech punktów jest oczywiście dowolny, chociaż istnieje wyróżniona triada: $z = 0$, $z = 1$ i $z = \infty$ – zero (wybór początku układu i – jednocześnie – punktu w nieskończoności) oraz jednostka.

Aby określić podstawowe własności odwzorowania homograficznego przekształćmy raz jeszcze (1.140) do postaci

$$w = f(z) = p \left(\frac{q - r}{r + z} + 1 \right). \quad (1.148)$$

Homografię możemy traktować jako złożenie trzech odwzorowań

$$z_1 = r + z, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad z_3 = p(q - r)z_2 + p.$$

Pierwsze i trzecie to odwzorowania realizowane przez funkcję liniową

$$w = az + b = (Ae^{i\alpha})(re^{i\phi}) + b. \quad (1.149)$$

W wyniku takiego odwzorowania liczby-wektory z zostają obrócone (rotacja) o kąt α (argument liczby zespolonej a) i wydłużone (lub skrócone – dylatacja bądź

kontrakcja) o czynnik A (moduł liczby zespolonej a), a następnie przesunięte (translacja) o (stały) wektor-liczbę b ¹⁸.

Z kolei odwzorowanie $w = 1/z$ to

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\phi}} = \frac{1}{r}e^{-i\phi} \equiv Re^{i\psi} \quad (1.150)$$

– obraz punktu $z = re^{i\phi}$ płaszczyzny \mathcal{C}_z to punkt płaszczyzny \mathcal{C}_w , którego moduł $R = 1/r$, a argument $\psi = -\phi$. Geometrycznie przedstawia to złożenie dwóch operacji:

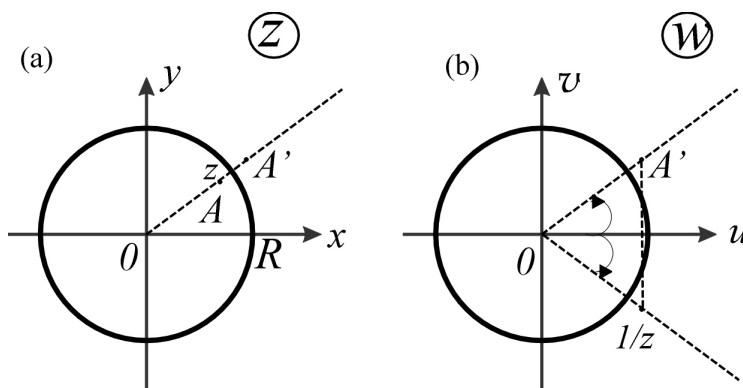
(a) Inwersji względem okręgu jednostkowego; punkty A i A' (końce odcinków OA i OA') spełniają zależność (por. rys.1.25(a))

$$OA \cdot OA' = \text{promień okręgu}^2 = 1^2 = 1.$$

Parę punktów A i A' nazywamy *parą symetryczną względem okręgu*. Jeżeli promień okręgu nie jest jednostkowy, lecz jest równy R_0 , to oczywiście

$$OA \cdot OA' = \text{promień okręgu}^2 = R_0^2.$$

(b) Operacji sprzężenia zespolonego – odbicia zwierciadlanego w osi rzeczywistej (por. rys.1.25(b)).



Rysunek 1.25: Odwzorowanie $f = 1/z$ jako złożenie inwersji względem okręgu jednostkowego (a) i odbicia w osi rzeczywistej (b)

Odwzorowania realizowane przez funkcje liniowe (rotacja + dylatacja/kontrakcja + translacja) są trywialne; inwersja + odbicie w osi już wprowadza coś ciekawszego. Ważną cechą homografii, wynikającą z własności przekształcenia realizowanego przez funkcję $1/z$, jest niezmienniczość równania okręgu i (dowolnych) par punktów symetrycznych względem niego.

¹⁸Wprowadzenie do algebry liczb zespolonych można znaleźć na stronie: <http://www.ftj.agh.edu.pl/~lenda/alg/pdfsc.pdf>.

Homografia przekształca okręgi na płaszczyźnie \mathcal{C}_z w okręgi płaszczyzny \mathcal{C}_w ; para punktów symetrycznych względem okręgu na płaszczyźnie \mathcal{C}_z przechodzi w parę symetryczną względem obrazu okręgu na płaszczyźnie \mathcal{C}_w .

Łatwo jest wykazać pierwszą część tej własności. Równanie okręgu na płaszczyźnie \mathcal{C}_z to

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (1.151)$$

gdzie: A, B, C, D – liczby rzeczywiste, przy czym $A \geq 0, B^2 + C^2 > 4AD$. Przy $A = 0$ okrąg redukuje się do prostej (specjalny przypadek okręgu!); przy $D = 0$ okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych (punkt $z = 0$). Wystarczy rozpatrzyć, jak transformuje się równanie (1.150) przy transformacji $w \equiv u + iv = 1/z$. Mamy – por. wzory w podpunkcie 1.5.1 –

$$z(x, y) \equiv x + iy = \frac{1}{w(x, y)} = \frac{1}{u(x, y) + iv(x, y)} = \frac{u}{u^2 + v^2} + i \frac{-v}{u^2 + v^2} \quad (1.152)$$

albo

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Podstawiając z powyższych równań za x i y do (1.150) otrzymamy – w języku zmiennych u i v płaszczyzny \mathcal{C}_w – równanie

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0, \quad (1.153)$$

a więc równanie analogiczne do (1.150)! Zauważmy, że dla $D = 0$ okrąg (przechodzący przez początek układu) przeobraża się w prostą. Nie jest to zaskoczeniem. Obrazem punktu $z = 0$ w odwzorowaniu $w = 1/z$ jest $w = \infty$ i *vice versa*: $w(\infty) = 0$. Okrąg przechodzący przez $z = 0$ odwzorowuje się w okrąg przechodzący przez obraz tego punktu – punkt $w = \infty$. Zapamiętajmy też – para „zero-nieskończoność” jest parą punktów symetrycznych względem okręgu o środku w $z = 0$.

Dodajmy jeszcze, że homografia – ta „uproszczona”, realizowana przez funkcję $1/z$ – jest na pewno odwzorowaniem konforemnym we wszystkich punktach \mathcal{C}_z , z wyjątkiem $z = 0$ i $z = \infty$ (w tych punktach nie jest określona pochodna funkcji $f(z)$ – funkcja $f'(z) = -1/z^2$). Bliższa analiza odwzorowania pozwala jednak stwierdzić, że podstawowe atrybuty odwzorowania konforemnego (zachowanie kątów i stały współczynnik wydłużenia) są spełnione także dla tych dwóch szczególnych punktów. Dlatego, w pełni poprawna charakterystyka homografii jako odwzorowania będzie miała postać:

Każda funkcja homograficzna

$$w = f(z) = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (1.154)$$

przy czym $w = \infty$ dla $z = -d/c$; $w = a/c$ dla $z = \infty$, określa wzajemnie jednoznaczne (jedno-jednoznaczne) odwzorowanie konforemne płaszczyzny domkniętej $\overline{\mathcal{C}}_z$ na płaszczyznę domkniętą $\overline{\mathcal{C}}_w$.

Przykład:

Górną półpłaszczyznę $\Im(z) \geq 0$ chcemy przekształcić w koło promieniu jednostkowym, tak aby określony punkt półpłaszczyzny z_0 był środkiem koła $w = 0$. Krzywa ograniczająca półpłaszczyznę (brzeg obszaru \mathcal{C}_z – oś rzeczywista) przechodzi przy tym w okrąg, a w takim razie punkt \bar{z}_0 , symetryczny do punktu z_0 względem osi rzeczywistej, powinien przejść w punkt $w = \infty$ (symetryczny do punktu $w = 0$ względem okręgu $|w| = 1$.) Z tego wynika, że szukane odwzorowanie ma postać

$$w = p \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}. \quad (1.155)$$

Stała (zespolona) p jest jeszcze nieokreślona. Chcemy jednak, aby punkty osi rzeczywistej $z = x$ przechodziły w punkty okręgu $|w| = 1$. Podstawiając $z = x$ do (1.154) i biorąc moduł obu stron równania, mamy

$$|w| = |p| \left| \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \right| = |p| = 1; \quad (1.156)$$

($|x - z_0|$ i $|x - \bar{z}_0|$ to odległości punktu $z = x$ od punktu z_0 i jego zwierciadlanego odbicia w osi rzeczywistej). Tak więc $|p| = 1$, czyli $p = e^{i\theta}$ – możemy nasze koło obrócić o dowolny kąt θ , nie zmieniając warunku zadania. Gdyby zamiast koła jednostkowego chcielibyśmy uzyskać koło $|w| = R$, to mielibyśmy $p = Re^{i\theta}$.

1.12.3 Siatka konforemnie równoważna

W podpunkcie 1.5.1 wykazaliśmy, odwołując się do warunków Cauchy'ego-Riemanna dla *każdej* funkcji analitycznej $f(z)$, rodziny krzywych $u(x, y) \equiv \Re[f(z)] = \text{constans}$ i $v(x, y) \equiv \Im[f(z)] = \text{constans}$ są wzajemnie prostopadłe. Te dwie rodziny krzywych tworzą na płaszczyźnie \mathcal{C}_w siatkę kartezjańską, zbudowaną z prostych o równaniach

$$u(x, y) = C_1; \quad v(x, y) = C_2. \quad (1.157)$$

Dla ułatwienia, możemy przyjąć, że odstęp między prostymi są stałe i takie same dla obu rodzin prostych (Δc). Siatka ta dzieli obszar \mathcal{D}_w na zbiór elementarnych kwadratów o boku δc , tak jak pokazano na rysunku 1.26.

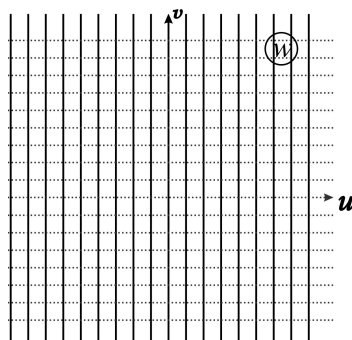
Definicja: *Przeciwobraz takiej siatki na płaszczyźnie \mathcal{C}_z , na który składają się krzywe o równaniach (1.156), to siatka konforemnie równoważna kartezjańskiej siatce współrzędnych (z płaszczyzny \mathcal{C}_w).*

Na przykład, dla funkcji $f(z) = z^2$ mamy

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy; \quad u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy; \quad (1.158)$$

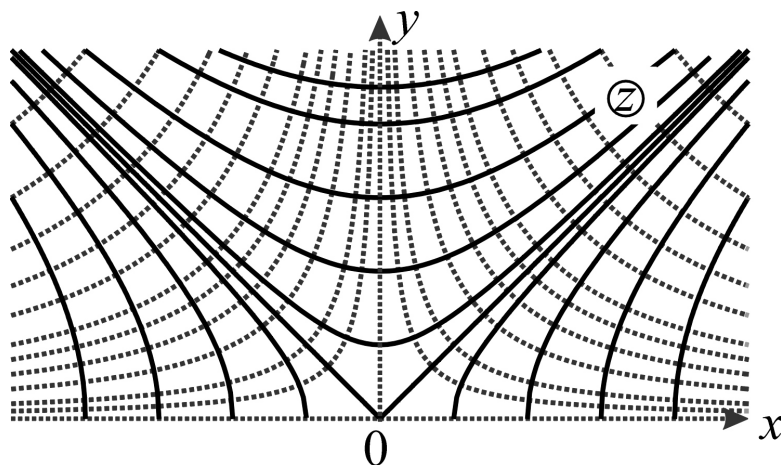
dla funkcji $f(z) = 1/z$ mamy (por.1.151)

$$f(z) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}; \quad u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \quad (1.159)$$



Rysunek 1.26: Prostokątna siatka kartezjańska na płaszczyźnie zespolonej C_w

Pierwsza z tych funkcji $f(z) = z^2$ odwzorowuje w sposób jedno-jednoznaczny górną półpłaszczyznę $\Im(z) > 0$ na płaszczyznę bez półosi rzeczywistej dodatniej (linia cięcia). Odwzorowanie to jest konforemne w całej górnej półpłaszczyźnie (dw/dz jest wszędzie różne od zera). Przeciwobraz prostokątnej siatki kartezjańskiej z D_w na płaszczyźnie D_z – w przypadku odwzorowania danego funkcją (1.157) – to rodziny ortogonalnych hiperbol, określonych równaniami (1.157) i zilustrowanych na rysunku 1.27.



Rysunek 1.27: Siatka konforemnie równoważna siatce kartezjańskiej dla $f(z) = z^2$

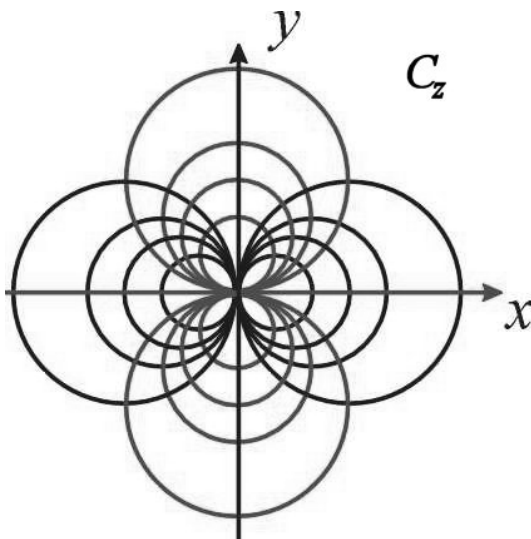
Dla funkcji (1.158) krzywe $u = \text{const} \equiv 1/2C_1$ i $v = \text{const} \equiv 1/2C_2$ zapisane w języku zmiennych x i y to okręgi

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2C_1}, \quad \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2C_2}, \quad (1.160)$$

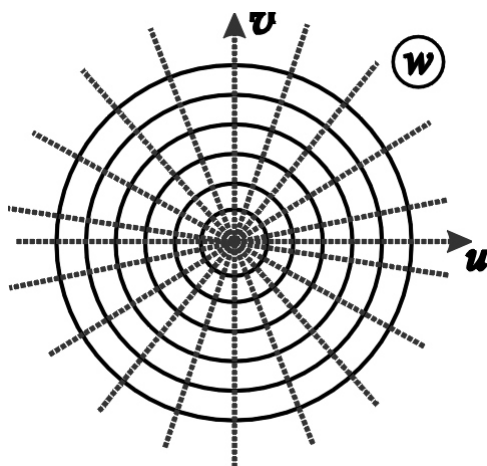
albo

$$(x - C_1)^2 + y^2 = C_1^2, \quad x^2 + (y + C_2)^2 = C_2^2, \quad (1.161)$$

a więc przeciwobrazami prostych $u = \text{const}$ i $v = \text{const}$ (dwie rodziny ortogonalnych „okręgów”, wzajemnie stycznych w $w = \infty$) są – na płaszczyźnie \mathcal{C}_z – ortogonalne rodziny okręgów, wzajemnie stycznych w przeciwobrazie nieskończoności z \mathcal{C}_w – punkcie $z = 0$. Sytuację ilustruje rysunek 1.28.



Rysunek 1.28: Siatka konformennie równoważna siatce kartezjańskiej dla $f(z) = 1/z$



Rysunek 1.29: Ortogonalna siatka biegunowa na płaszczyźnie zespolonej \mathcal{C}_w

Reprezentacja kartezjańska liczby zespolonej ($z = x + iy$) nie zawsze jest najwygodniejsza. W reprezentacji biegunowej ($w = Re^{i\psi}$) zamiast pary (u, v) posługujemy się parą (R, ψ) . I w tym przypadku rodziny $R = \text{constans}$ (okręgi współśrodkowe, o środku w $w = 0$) oraz $\psi = \text{constans}$ (pek półprostych przechodzących przez początek układu) są wzajemnie ortogonalne (por. rys.1.29). Podobnie jak w przypadku siatki kartezjańskich, możemy też wprowadzić, na płaszczyźnie \mathcal{C}_z , pojęcie *siatki konforemnie równoważnej biegunowej siatce współrzędnych* (z płaszczyzny \mathcal{C}_w).

Jako przykład zobaczymy jak wygląda taka siatka, w przypadku odwzorowania płaszczyzny \mathcal{C}_z funkcją homograficzną

$$w = \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad (1.162)$$

gdzie α i β są dowolnymi punktami \mathcal{C}_z . W wyniku odwzorowania punkty α i β przechodzą odpowiednio w $w = 0$ i $w = \infty$. Opierając się na własności homografii, możemy stwierdzić, że:

- (1) Okręgi przechodzące na płaszczyźnie \mathcal{C}_z przez α i β odwzorowują się w okręgi przechodzące na płaszczyźnie \mathcal{C}_w przez $w(\alpha) = 0$ i $w(\beta) = \infty$, a więc półproste o równaniu $\arg(w) = \psi = \text{constans}$;
- (2) Okręgi z \mathcal{C}_z , dla których para α i β jest parą punktów symetrycznych, przechodzą, na płaszczyźnie \mathcal{C}_w , w okręgi, względem których symetryczne są $w(\alpha) = 0$ i $w(\beta) = \infty$; będą to okręgi współśrodkowe, o środku w $w = 0$ i równaniu

$$|w| = \left| \frac{z - \alpha}{z - \beta} \right| = \text{const.}$$

Okręgi takie, na płaszczyźnie \mathcal{C}_z , są miejscami geometrycznymi punktów, dla których stosunek odległości $|z - \alpha|/|z - \beta|$ jest wielkością stałą. Są to tzw. okręgi Apolloniusza.

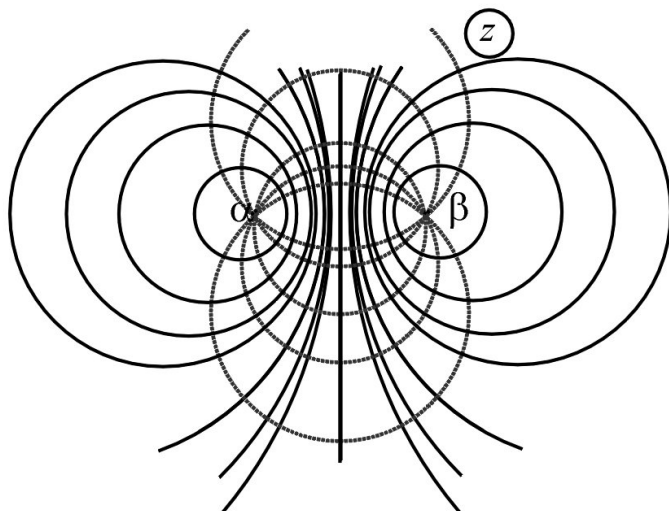
Przeciwbraz siatki biegunowej z \mathcal{D}_w na płaszczyźnie \mathcal{D}_z – w przypadku odwzorowania danego funkcją (1.158) – to rodziny okręgów Apolloniusza i ortogonalnych do nich łuków opartych na punktach α i β , zilustrowane na rysunku 1.30.

1.12.4 Potencjał zespolony wektorowego pola płaskiego

Przykładem wektorowego pola płaskiego niech będzie pole elektryczne, wytwarzane przez jednorodnie naładowaną prostą (gęstość liniowa ładunku λ). Pole takie nazwiemy umownie polem ładunku punktowego; pole to możemy rozpatrywać w dowolnej płaszczyźnie, prostopadłej do prostej. Wektor pola, \mathbf{E} , leży w tej płaszczyźnie (por. rys.1.31(a)). W języku zmiennej zespolonej możemy zapisać

$$\mathbf{E} = E_x + iE_y \equiv - \frac{\partial V}{\partial x} - i \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (1.163)$$

gdzie $V = V(x, y)$ jest funkcją potencjału. Wartość bezwzględna wektora natężenia



Rysunek 1.30: Siatka konforemnie równoważna siatce biegunowej dla
 $f(z) = (z - \alpha)/(z - \beta)$

nia pola znajdziemy natychmiast z prawa Gaussa: zamykając jednostkową długość naładowanej prostej cylindryczną powierzchnią gaussowską o promieniu r i przyrównując strumień pola \mathbf{E} do całkowitego ładunku (w jednostkach ϵ_0) zawartego wewnątrz cylindra mamy

$$2\pi r \cdot 1E = \lambda/\epsilon_0;$$

(por. rys.1.31(b)). Mamy więc $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ albo w języku wektorów-liczb zespolonych

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{z}{|z|^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (1.164)$$

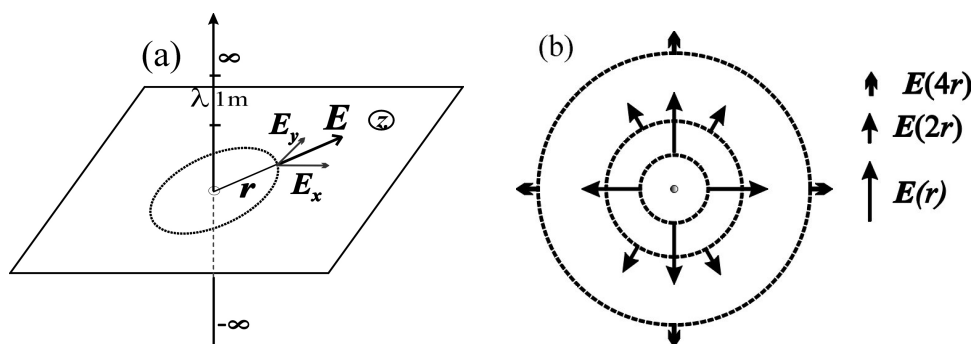
Zgodnie z równaniami (1.162) potencjał takiego pola możemy obliczyć na przykład według wzoru

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{x_0}^x \frac{x dx}{x^2 + y^2} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(x^2 + y^2) + C = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{|z|} + C. \quad (1.165)$$

Stała C teoretycznie mogłaby zależeć od zmiennej y , ale symetria wyrażeń na E_x i E_y (por.1.163) wyklucza taką możliwość. C jest więc „zwykłą” stałą, nie mającą znaczenia w przypadku określania funkcji potencjału.

Warunki Cauchy’ego-Riemanna narzucają istnienie funkcji $U(x, y)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = -E_y, \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = E_x. \end{aligned} \right\} \quad (1.166)$$



Rysunek 1.31: Elektryczne pole płaskie nieskończenie długiej, jednorodnie naładowanej prostej. (a) Widok „z boku”; (b) widok w płaszczyźnie prostopadłej do prostej – $|\mathbf{E}| \propto 1/r$

Wykonując rachunki, analogiczne do tych, jakie mieliśmy we wzorze (1.164) (całkując pierwsze z równań (1.165)), otrzymujemy, znowu z dokładnością do nieistotnej stałej C' lub C''

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{x_0}^x \frac{y dx}{x^2 + y^2} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C' \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) + C' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \arg z + C''. \end{aligned} \quad (1.167)$$

Funkcja $V(x, y)$ to, jak powiedzieliśmy, potencjał naszego pola elektrycznego; izoliny $V = \text{const}$ (na płaszczyźnie $W = U + iV$) – to linie ekwipotencjalne. Prostopadłe do nich izoliny $U = \text{const}$ – to linie sił pola, tory po których porusza się wprowadzony do niego próbny ładunek. Funkcję

$$W(x, y) = U(x, y) + iV(x, y) \quad (1.168)$$

nazywamy *potencjałem zespolonym* rozpatrywanego pola. W przypadku „punktowego” ładunku

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \arg z + i \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{|z|} = \frac{i\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{1}{|z|} - i \arg z \right) \\ &= \frac{i\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \left| \frac{1}{z} \right| + i \arg \frac{1}{z} \right) = \frac{i\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{z}. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Zawarte są w nim linie ekwipotencjalne, linie sił, a także natężenie pola \mathbf{E} . Mamy bowiem

$$W'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial x} = -E_y - iE_x = -i(E_x - iE_y). \quad (1.170)$$

Aby otrzymać *explicite* wektor \mathbf{E} , musimy wykonać operację sprzężenia

$$\mathbf{E} = E_x + iE_y = -i\overline{W'(z)}. \quad (1.171)$$

Oczywiście wartość bezwzględna wektora \mathbf{E} wynosi

$$E = |W'(z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2}. \quad (1.172)$$

Potencjał zespolony przedstawia *przekształcenie* płaszczyzny \mathcal{C}_z , w której rozpatrujemy nasze pole wektorowe, na płaszczyznę \mathcal{C}_w , konforemne we wszystkich punktach obszaru \mathcal{D}_z , w których natężenie nie jest równe zero. Linie sił wektorów \mathbf{E} i linie ekwipotencjalne na płaszczyźnie \mathcal{D}_z to przeciwobrazy (siatka konforemnie równoważna) rodzin prostych $U = \text{constans}$ i $V = \text{constans}$ na płaszczyźnie \mathcal{C}_w ¹⁹.

Funkcja określona we wzorze (1.168) to potencjał zespolony pola, wytworzonego przez „punktowy” ładunek, umieszczony w punkcie $z = 0$. Jeżeli ładunek znajduje się nie w początku układu, ale w punkcie $z = z_0$, to potencjał zespolony będzie miał postać

$$W = \frac{i\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{z - z_0}. \quad (1.173)$$

Jeżeli rozpatrzeć dwa, różnoimienne ładunki, $+\lambda$ i $-\lambda$, umieszczone odpowiednio w punktach α i β płaszczyzny z , to potencjał zespolony układu wynosi

$$W = \frac{i\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{z - \alpha} - \frac{i\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{z - \beta} = \frac{i\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z - \beta}{z - \alpha}. \quad (1.174)$$

Linie ekwipotencjalne są określone równaniem

$$\Im(W) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left| \ln \frac{z - \beta}{z - \alpha} \right| = \text{constans},$$

albo prostszym

$$\left| \frac{z - \beta}{z - \alpha} \right| = \text{constans}.$$

Powyższe krzywe – to znane nam już okręgi Apolloniusza. Prostopadłe do nich linie sił to łuki okręgów opartych na punktach α i β . Na rysunku 1.30 oglądamy obraz linii sił pola i krzywych ekwipotencjalnych dla układu dwóch, równych co wartości bezwzględnej, różnoimiennych ładunków liniowych.

I jeszcze jeden, już ostatni, przykład. Dwóm różnoimiennym ładunkom $\pm\lambda$, umieszczonym w punktach $\alpha = 0$ i $\beta = -a$ odpowiada potencjał zespolony

$$W = \frac{i\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + a}{z} = \frac{i\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(1 + \frac{a}{z}\right) = \frac{\lambda a i}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(1 + \frac{a}{z}\right)^{1/a} \equiv \frac{m_d i}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(1 + \frac{a}{z}\right)^{1/a}, \quad (1.175)$$

¹⁹Sytuacja – z punktu widzenia formalnego – jest nieco bardziej skomplikowana. Konforemność wymaga w zasadzie jednoznaczności odwzorowania, podczas gdy w opisanym powyżej przykładzie mamy do czynienia z funkcją nieskończenie wieloznaczną. Należałoby więc sprecyzować, z jakimi gałęziami tej funkcji mamy do czynienia, wprowadzając ewentualnie odpowiednie linie cięcia. Niemniej jednak, z „pragmatycznego” punktu widzenia, nie jest to konieczne. Pochodna takiej nieskończenie wieloznaczonej funkcji jest już funkcją jednoznaczną, a to właśnie pochodna określa nasze pole.

gdzie wprowadziliśmy moment dipolowy: $m_d = \lambda a$. Zgodnie z definicją dipola, przechodzimy teraz z odległością a do zera, powiększając wartości bezwzględne ładunków, tak aby iloczyn λa pozostawał stały. Potencjał zespolony liniowego dipola to

$$W = \frac{m_d i}{2\pi\epsilon_0} \lim_{\substack{a \rightarrow 0; \lambda \rightarrow \infty \\ a \cdot \lambda = \text{constans}}} \ln \left(1 + \frac{a}{z} \right)^{1/a} = \frac{m_d i}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(e^{1/z} \right) = \frac{m_d i}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{z} \quad (1.176)$$

– homografia omawiana w podrozdziale 1.12.3. Linie ekwipotencjalne i linie sił – przeciwobrazy kartezjańskiej siatki płaszczyzny \mathcal{C}_w – to pęki okręgów wzajemnie stycznych w punkcie $z = 0$ (por. rys.1.28).

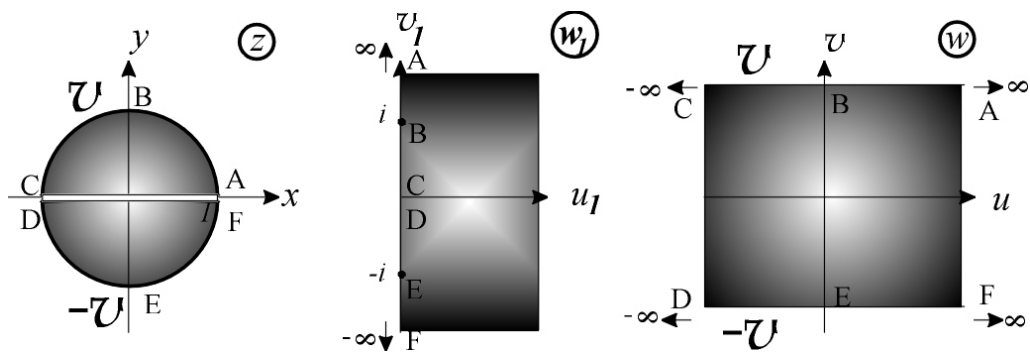
1.12.5 Wektorowe pole płaskie i odwzorowania konforemne

Podane w poprzednim podrozdziale przykłady uzmysławiają nam, wspomnianą już wcześniej, „organiczną przydatność” funkcji zmiennej zespolonej do rozwiązywania problemów z elektrostatyki, hydrodynamiki, teorii transportu – krótko mówiąc: problemów sformułowanych w języku równania Laplace’a. Część rzeczywista i urojona każdej funkcji analitycznej spełniają to równanie i jako takie mogą reprezentować bądź to potencjał pola, bądź linie sił. W praktyce, często mamy do czynienia z sytuacjami, w których samo sformułowanie problemu sprowadza się do zadania określonych wartości potencjału na pewnych obiektach, których geometryczne wyobrażenie stanowią pewne krzywe, należące do określonego obszaru \mathcal{D}_z . Niewątpliwie, najprościej taka sytuacja wygląda, jeżeli krzywymi tymi są proste (prostokątna siatka kartezjańska) bądź współśrodkowe okręgi i pęk prostych (ortogonalna siatka biegunowa). Idea wykorzystania odwzorowań konforemnych do rozwiązywania tego typu problemów sprowadza się do znalezienia odwzorowania, które *przekształca rzeczywisty obraz krzywych równego potencjału, istniejący na płaszczyźnie \mathcal{C}_z , w jeden z tych standardowych typów siatki na płaszczyźnie \mathcal{C}_w* albo, innymi słowy, znalezienia odwzorowania, w którym przeciwobrazem siatki prostokątnej lub biegunowej z \mathcal{C}_w – siatką konforemnie równoważną na płaszczyźnie \mathcal{C}_z – jest rzeczywisty obraz krzywych równego potencjału i prostopadłych do nich linii sił.

Przykład

Wyobraźmy sobie nieskończenie długi walec (pusty w środku), o promieniu jednostkowym, który został przecięty na dwie identyczne „połówki” płaszczyzną, w której leży oś walca. Dwie połówki zostały rozsunięte na bardzo małą (nieskończenie małą) odległość i naładowane tak, że wytworzona różnica potencjału między nimi jest równa $2\mathcal{V}$. Sytuacja, oglądana w dowolnej płaszczyźnie \mathcal{C}_z , prostopadłej do osi walca, jest zilustrowana na rysunku 1.32.

Interesuje nas znalezienie pola (potencjału) w dowolnym punkcie pomiędzy dwoma półwałcami. W tym celu, poszukujemy odwzorowania, które ten obszar, z płaszczyzny \mathcal{C}_z , przekształca w pas, o wysokości $2\mathcal{V}$, na płaszczyźnie \mathcal{C}_w . Wiemy, że aby uzyskać pas, powinniśmy użyć funkcji logarytmicznej (por. podrozdział



Rysunek 1.32: Dwa naładowane „półwalce” przewodzące na płaszczyźnie \mathcal{C}_z i ich obraz na płaszczyznach \mathcal{C}_{w_1} i \mathcal{C}_w

1.4.1, wzory (??) i (1.25)), która obszar, na przykład półpłaszczyzny, przekształca w pas o szerokości (wysokości) π . Ponieważ, jak wynika z rysunku 1.32, punkty $z = 1$ i $z = -1$ są jedynymi punktami specjalnymi, rozważmy w pierwszej kolejności homografię²⁰

$$w_1 = \frac{1+z}{1-z}. \quad (1.177)$$

Od razu widzimy, że $w_1(0) = 1$. Punkty leżące na okręgu jednostkowym, $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ transformują się

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = -\frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} = i \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \quad (1.178)$$

w oś urojoną płaszczyzny \mathcal{C}_{w_1} . Ponieważ $w_1 = 1$ leży po prawej stronie osi urojonej, to odwzorowanie określone wzorem (1.176) odwzorowuje wnętrze koła jednostkowego na prawą półpłaszczyznę: $\Re(w_1) \geq 0$, a więc obszar, w którym argument zmiennej w_1 zmienia się od $+\pi/2$ do $-\pi/2$ ²¹.

Jeżeli tak, to funkcja

$$w = \frac{2\mathcal{V}}{\pi} \ln w_1 = \frac{2\mathcal{V}}{\pi} \ln \frac{1+z}{1-z} \quad (1.179)$$

da nam szukany wynik: pas o wysokości $2\mathcal{V}$; dolna prosta odpowiada wartości $v = -\mathcal{V}$; górna $v = +\mathcal{V}$. Aby znaleźć potencjał w dowolnym punkcie $z =$

²⁰Sztuka – nieco już zanikająca – znajdowania odwzorowań konforemnych w dużej mierze sprowadza się do technik heurystycznych, czyli tzw. metody prób i błędów. Zaproponowana homografia mogłaby być nieco inna – na przykład z mianownikiem i licznikiem zamienionymi miejscami, lub jednym z nich pomnożonym przez -1 . Warto sprawdzić Czytelniku, że te alternatywne postacie też zaprowadzą nas do właściwego wyniku końcowego.

²¹W ramach (kształcących wyobraźnię) samodzielnych ćwiczeń: zastanów się, w co przechodzi średnica okręgu, odcinek $-1 \leq x \leq 1$? W punktach $z = \pm 1$ średnica jest prostopadła do okręgu. Wprawdzie w tych punktach naruszone są warunki konforemności, ale wspomnieliśmy, że homografia jest wyjątkowo nieczuła na takie odstępstwa od reguł.

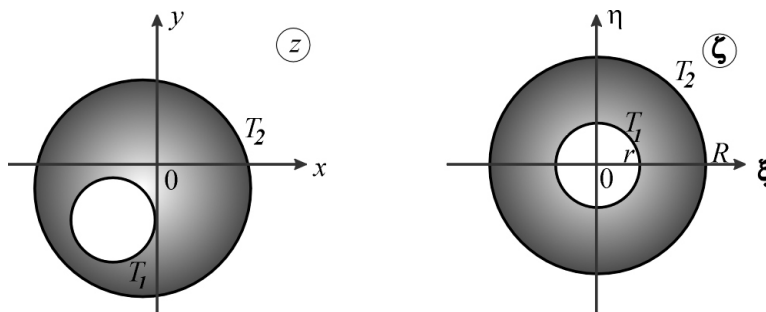
$x + iy = re^{i\theta}$ wnętrza koła jednostkowego na płaszczyźnie \mathcal{C}_z , wystarczy obliczyć, dla tego punktu, część urojoną funkcji (1.178). Mamy

$$u + iv = \frac{2\mathcal{V}}{\pi} \ln \frac{1 + x + iy}{1 - x - iy} = \frac{2\mathcal{V}}{\pi} \ln \frac{1 - x^2 - y^2 + 2iy}{1 - 2x + x^2 + y^2} \equiv \ln Re^{i\psi} = \ln R + i\psi,$$

gdzie

$$\psi = v = \frac{2\mathcal{V}}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} = \frac{2\mathcal{V}}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2r \sin \theta}{1 - r^2}.$$

W rozdziale czwartym, w punkcie poświęconym zastosowaniu wielomianów Legendre’a do rozwiązywania problemów pola elektrostatycznego, analogiczny problem – ale dla symetrii sferycznej, a nie cylindrycznej – jest rozwiązany techniką wywodzącą się z metody separacji zmiennych. Proponuję Ci Czytelniku, abyś spróbował rozwiązać przedstawiony właśnie problem w analogiczny sposób i porównał otrzymane wyniki. Zauważysz wtedy, niewątpliwie, że metoda odwzorowań konforemnych daje wynik o postaci zdecydowanie prostszej.



Rysunek 1.33: Dwie rury niewspółśrodkowe na płaszczyźnie \mathcal{C}_z i ich obraz na płaszczyźnie \mathcal{C}_ζ

Innym, bardzo typowym, przykładem techniki odwzorowań konforemnych będzie wyznaczenie rozkładu temperatury (stan ustalony – temperatura spełnia równanie Laplace’a) w obszarze ograniczonym dwoma niewspółśrodkowymi rurami walcowymi, z których jedna znajduje się w stałej temperaturze T_1 , a druga – T_2 (por. rys.1.33). Zastanówmy się, opierając się na dotychczasowych rozważaniach, jaka funkcja miałaby szanse spełniać rolę potencjału zespolonego dla pola w pierścieniu, a więc w obszarze (zmiennej zespolonej ζ) ograniczonym dwoma *współśrodkowymi* powierzchniami walcowymi o promieniach r i R ($r < R$), z których każda ma ustaloną wartość temperatury. Niewątpliwie izolinie temperatury to okręgi o promieniach $|\zeta| = \rho$; $r \leq \rho \leq R$. Prostopadłe do nich proste $\arg \zeta = \text{constans}$ to linie, wzdłuż których następuje przepływ ciepła (od temperatury wyższej do niższej). Sytuacja jest więc analogiczna do przypadku pola punktowego ładunku; potencjałem zespolonym będzie funkcja

$$W = Ki \ln \zeta, \tag{1.180}$$

gdzie K jest stałą rzeczywistą. Rzeczywiście, część urojona $V = K \ln |\zeta|$ wyrażenia (1.179) przybiera na okręgach $|\zeta| = r$ i $|\zeta| = R$ wartości stałe; stała K zapewnia nam odpowiednią różnicę temperatur między dwoma granicznymi okręgami

$$K = (T_2 - T_1) / \ln \frac{R}{r}.$$

Jeżeli zamiast różnicy chcemy, tak jak w sformułowanym powyżej problemie, operować dwoma określonymi wielkościami temperatury, powinniśmy zmodyfikować funkcję (1.179) poprzez dodanie do niej jeszcze jednej stałej, czysto urojonej

$$W = Ki \ln \zeta + iL. \quad (1.181)$$

Dodanie stałej w potencjale jest zawsze możliwe (równanie Laplace'a w dalszym ciągu pozostaje spełnione), a część urojona ma postać

$$V = K \ln |\zeta| + L \quad (1.182)$$

i właściwe dobranie stałych K i L pozwala na uzyskanie $V(r) = T_1$ i $V(R) = T_2$. Pozostawiam Ci Czytelniku znalezienie odwzorowania $\zeta = \zeta(z)$, które dwa okręgi z rysunku 1.33 przeprowadza w dwa okręgi współśrodkowe, o środku w $\zeta = 0$. Jako wskazówkę przypominam: dla tych ostatnich okręgów parą punktów symetrycznych są punkty $\zeta = 0$ i $\zeta = \infty$.

Metoda odwzorowań konforemnych cechuje się dużą elegancją i skutecznością, ale jej podstawową wadę stanowi wymóg „dwuwymiarowości” problemu. Niewątpliwie, w dobie szybkich komputerów i szalenie skutecznych metod numerycznych (metod różnicowych) rozwiązywania równania Laplace'a (nawet z mocno skomplikowanymi warunkami brzegowymi) jej użyteczność nie jest już taka, jaką była kilkadziesiąt lat temu. Ale – dla ambitnego Czytelnika – mam propozycję, która nie tylko stanowi ciekawy i całkiem „praktyczny” problem, ale w dodatku uzmysławia potęgę i elegancję metody odwzorowań konforemnych. Otóż, wyobraźmy sobie metalowy krążek (o zadanym promieniu), na którym zdeponowano ładunek elektryczny Q . Interesuje nas gęstość powierzchniowa ładunku (w funkcji odległości od środka krążka). W kontekście metody potencjału zespolonego zagadnienie jest „dwuwymiarowe” (oś symetrii krążka „niszczy” jeden wymiar). Jeżeli już Czytelniku znajdziesz odpowiednie odwzorowania, potencjał i gęstość powierzchniową ładunku, to spróbuj rozwiązać ten sam problem metodą separacji zmiennych w równaniu Laplace'a, zapisanym w odpowiednim dla symetrii problemu układzie współrzędnych (układ współrzędnych elipsoidalnych). I tu czeka Cię spora satysfakcja, jeżeli dojrnisz do końca rachunków, które choć nie trudne wymagają sporo uwagi. Ich końcowy etap – to równanie Legendre'a dla funkcji argumentu czysto urojonego. Odpowiednie warunki brzegowe (stałość potencjału na brzegu krążka) powinny dać wynik pozostający w zgodzie z tym uzyskanym metodą odwzorowań konforemnych. Ale bilans kosztów w tym przypadku preferuje bezwzględnie tę nieco już „staromodną” metodę!

1.12.6 Dużo fizyki – odwzorowania konforemne w dynamice płynów

Odwzorowania konforemne odegrały znaczącą rolę w matematycznym opisie wielu problemów związanych z dynamiką przepływów. W latach trzydziestych 20. wieku fizycy i matematycy posługiwali się tym narzędziem, aby „zilustrować” od strony teoretycznej pewne zaobserwowane doświadczalnie efekty – takie jak np. siłę nośną, pojawiającą się przy opływie cieczy lepkiej wokół przeszkody. Prawdą jest, że w dzisiejszej dobie problemy te można jeszcze skuteczniej rozwiązać, stosując zaawansowane metody symulacji komputerowej, ale aby móc odpowiednio „dostroić” program symulacyjny, potrzebna jest wnikliwa i rzetelna znajomość całego kompleksu zjawisk fizycznych. W budowaniu gmachu tej wiedzy odwzorowania konforemne odegrały pierwszorzędą rolę.

Wprowadzenie

Będziemy rozpatrywać ustalone przepływy cieczy *w zasadzie idealnej* wokół przeszkody. W zasadzie idealnej – bo aby móc przedyskutować pewne realia fizyczne, będziemy zmuszeni do uwzględnienia lepkości. Na początek więc zakładamy, że ciecz jest nieściśliwa (gęstość cieczy pozostaje stała, $\rho = \text{constans}$), a przepływy są potencjalne. Potencjalny przepływ to taki, dla którego rotacja prędkości jest równa zero; istnieje wówczas skalarna funkcja ϕ , taka że

$$\mathbf{v} = \text{grad } \phi, \quad (1.183)$$

a ponieważ prędkość spełnia równanie ciągłości

$$\text{div}(\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad (1.184)$$

to – przy stałości ρ – potencjał prędkości spełnia równanie Laplace’a

$$\Delta\phi = 0. \quad (1.185)$$

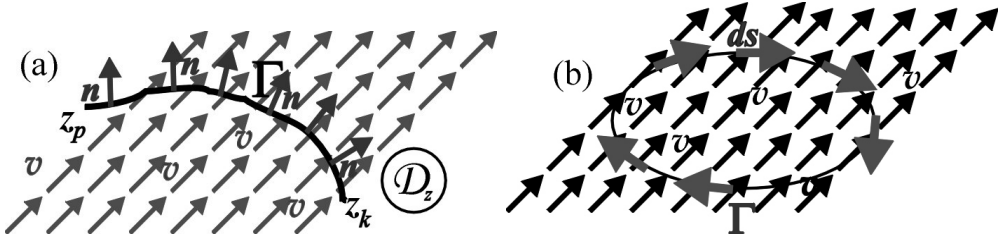
Podobnie jak w przypadku pola elektrostatycznego, będziemy starali się „uproszczyć” rzeczywistą sytuację transformując (dwuwymiarową!) strukturę: płynu i opływanej przez niego przeszkody, na sytuację kiedy płyn porusza się w przestrzeni pozbawionej jakichkolwiek przeszkód. Funkcja odwzorowująca będzie zespolonym potencjałem prędkości

$$\Psi(z) = \Psi(x, y) \equiv \phi(x, y) + i\psi(x, y); \quad (1.186)$$

analogicznie jak w podrozdziale 1.12.4 jego część rzeczywista, a także – na mocy warunków Cauchy’ego-Riemanna – urojona będą związane ze składowymi prędkości

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \stackrel{C-R}{=} \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} \stackrel{C-R}{=} -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (1.187)$$

Płyn porusza się prostopadłe do linii ekwipotencjalnych $\phi = \text{constans}$; wektor prędkości jest styczny do linii $\psi = \text{constans}$, tzw. *linii prądu*, będących – w przepływie ustalonym – torami ruchu cząstek płynu. Część urojona potencjału, funkcja $\psi(x, y)$, ma związek z *wydatkiem* (strumieniem wektora prędkości płynu) \mathcal{Q} , czyli ilością płynu przepływającego „na zewnątrz”, w jednostkowym czasie, przez dowolną krzywą Γ , leżącą w obszarze \mathcal{D}_z (por. rys.1.34a):



Rysunek 1.34: Do obliczeń wydatku płynu, przepływającego przez krzywą Γ w obszarze \mathcal{D}_z (a); do obliczeń krążenia wektora prędkości dla zamkniętego konturu Γ (b)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q} &= \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{n} = \int_{\Gamma} (v_x + iv_y)(-idz) \\
 &= \int_{\Gamma} (v_x + iv_y)(dy - idx) = \int_{\Gamma} v_x dy - v_y dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \\
 &= \int_{\Gamma} d\psi = \psi(x_k, y_k) - \psi(x_p, y_p). \tag{1.188}
 \end{aligned}$$

W wzorze 1.187 przez \mathbf{n} oznaczamy jednostkowy wektor, prostopadły do krzywej i skierowany „na zewnątrz” (zgodnie z konwencją okrążany obszar pozostaje po lewej stronie: $d\mathbf{n} = e^{-i\pi/2}d\mathbf{s} \equiv e^{-i\pi/2}dz = -idz$; punkty (x_k, y_k) i (x_p, y_p) to odpowiednio końcowy i początkowy punkt konturu). Różny od zera wydatek dla zamkniętego konturu oznacza, że wewnątrz niego znajdują się źródła (dodatnie lub ujemne) płynu.

Analogiczna całka z części rzeczywistej określa *krążenie* \mathcal{K} wektora prędkości cieczy, będące miarą wirowości przepływu. Krążenie definiujemy dla konturu *zamkniętego*²²

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K} &= \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Gamma} (v_x + iv_y) \cdot (dz) \\
 &= \oint_{\Gamma} (v_x + iv_y) \cdot (dx + idy) = \oint_{\Gamma} v_x dx + v_y dy = \oint_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \\
 &= \oint_{\Gamma} d\phi. \tag{1.189}
 \end{aligned}$$

²²Pamiętajmy, że w skalarnym iloczynie wektorów, reprezentowanych przez liczby zespolone, części: rzeczywista i urojona tych liczb są ortogonalne, a iloczyn $i \cdot i = 1$.

Na mocy twierdzenia Stokesa z analizy wektorowej, zamiast obliczać całkę krzywoliniową wektora wzdłuż konturu Γ , możemy obliczać całkę powierzchniową z rotacji wektora prędkości, po powierzchni Σ , zawartej wewnątrz konturu

$$\mathcal{K} = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (1.190)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ jest skierowanym elementem powierzchni.

Jeżeli chodzi o związek pomiędzy *wektorem prędkości* \mathbf{v} i *potencjałem zespolonym* Ψ to, analogicznie do wzorów (1.169 – 1.171) podrozdziału 1.12.4, mamy

$$\Psi'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i \frac{\partial\phi}{\partial y} = v_x - iv_y \quad (1.191)$$

i konsekwentnie

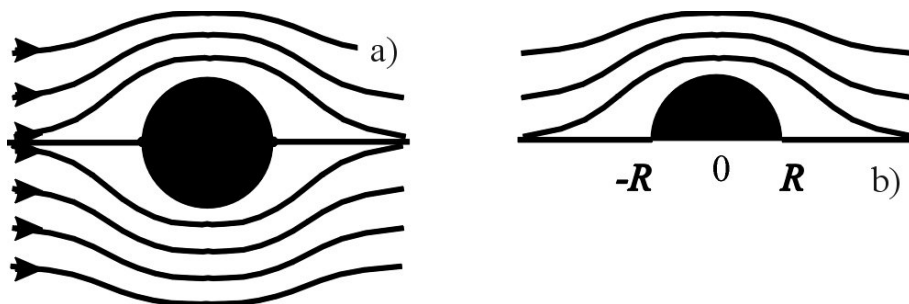
$$\mathbf{v} = v_x + iv_y = \overline{\Psi'(z)}, \quad (1.192)$$

a także

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}. \quad (1.193)$$

Całkowity opływ okręgu

Omawiając podstawowe przykłady odwzorowań konforemnych, mieliśmy do czynienia z przypadkami, kiedy zadaniem odwzorowania była transformacja danego obszaru w okrąg lub (pół)płaszczyznę. Rozpatrzmy teraz sytuację, w której ciecz idealna opływa okrąg – tak jak na rysunku 1.35(a). W nieskończoności pole prę-



Rysunek 1.35: Opiływ profilu kołowego (nieskończony walec, prostopadły do płaszczyzny rysunku): (a) wyidealizowany obraz rzeczywisty; (b) redukcja obrazu do górnej półpłaszczyzny przy wykorzystaniu warunku symetrii

kości cieczy jest jednorodne; dla uproszczenia możemy przyjąć, że wartość bezwzględna wektora prędkości $|\mathbf{v}_{\infty}| = 1$, a jej kierunek jest równoległy do osi $0x$.

Okrąg, będący „śladem” nieskończenie długiego walca, prostopadłego do płaszczyzny rysunku, ma promień R i środek $z = 0$. Dodatkowo, narzucmy – na etapie wstępnym – na przepływ „rozsądny” warunek symetrii względem osi $0x$ – odcinki osi rzeczywistej $(-\infty, -R)$ oraz (R, ∞) są więc liniami prądu. Ten dodatkowy warunek pozwala uściślić postać szukanego odwzorowania – odwzorowaniu podlega górna półpłaszczyzna z wyciętym półkolem (por. rys.1.35(b)); szukamy odwzorowania $w = \Psi(z)$ przekształcającego ten obszar w górną półpłaszczyznę, $\Im w \geq 0$, przy czym $\Psi(\infty) = \infty$ oraz $\Psi'(\infty) = 1$.

Odwzorowanie to będzie spełniała tzw. *funkcja Żukowskiego*

$$w(z) = z + \frac{R^2}{z}. \quad (1.194)$$

Jeżeliby zastanowić się nad obszarem jednoznaczności tego odwzorowania, to widzimy natychmiast, że dwa różne punkty płaszczyzny \mathcal{C}_z : z_1 i z_2 będą odwzorowane w ten sam punkt płaszczyzny \mathcal{C}_w , jeżeli

$$z_1 + \frac{R^2}{z_1} = z_2 + \frac{R^2}{z_2},$$

albo

$$(z_1 - z_2) \left(1 - \frac{R^2}{z_1 z_2} \right) = 0.$$

Obszar wyjściowy nie może więc zawierać punktów, dla których $z_1 z_2 = R^2$, a takim właśnie obszarem jest zarówno zewnątrz ($|z| > R$), jak wewnątrz ($|z| < R$) koła o promieniu R .

Aby zanalizować geometrię odwzorowania (1.193) podstawiamy $z = re^{i\phi}$; $w \equiv u + iv$. Otrzymujemy natychmiast

$$u = \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \phi, \quad v = \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \phi. \quad (1.195)$$

Eliminując kąt ϕ z powyższych równań (podnosimy obie ich strony do kwadratu i dodajemy do siebie), mamy

$$\frac{u^2}{\left(r + \frac{R^2}{r} \right)^2} + \frac{v^2}{\left(r - \frac{R^2}{r} \right)^2} = 1, \quad (1.196)$$

a więc okręgi płaszczyzny \mathcal{C}_z , krzywe o równaniach $|z| = r > 1$, przekształcają się w elipsy o półosiach

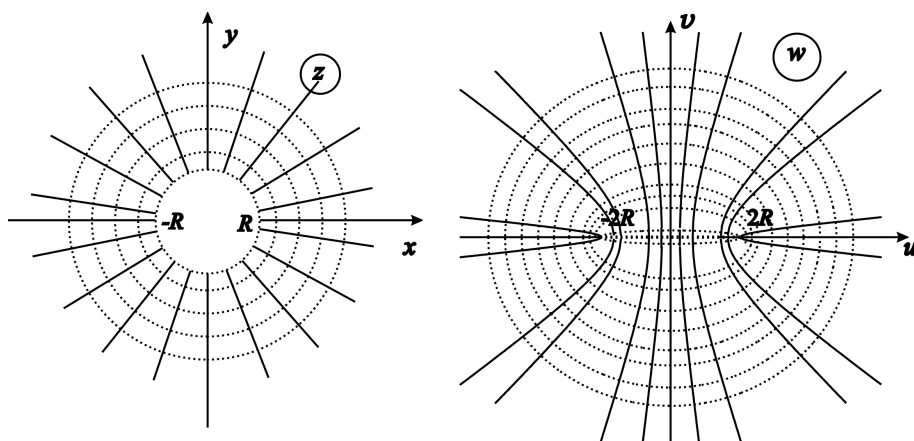
$$a \equiv a_r = r + \frac{R^2}{r} \quad \text{oraz} \quad b \equiv b_r = r - \frac{R^2}{r}.$$

Bliższa analiza pozwala stwierdzić, że kierunek obiegania okręgów jest zachowany; sam okrąg $|z| = R$ przekształca się w odcinek osi rzeczywistej \mathcal{C}_w : $-2R < u <$

$2R$, ale obiegany dwukrotnie: górną i dolną. Ortogonalne do okręgów $|z| = r > 1$ półproste $\arg z = \phi$ z płaszczyzny \mathcal{C}_z przekształcają się na płaszczyźnie \mathcal{C}_w w rodzinę hiperbol, ortogonalną do rodziny elips. Równania hiperbol (tym razem eliminujemy r z równań (1.194)) to

$$\frac{u^2}{\cos^2 \phi} - \frac{v^2}{\sin^2 \phi} = 1. \quad (1.197)$$

Obie rodziny: elips i hiperbol mają wspólne ogniska w punktach $(-R, 0)$ i $(R, 0)$ płaszczyzny \mathcal{C}_w (por. rys.1.36). W końcu, odcinki osi rzeczywistej płaszczyzny



Rysunek 1.36: Odwzorowanie zewnątrz koła, realizowane przez funkcję Żukowskiego (1.193)

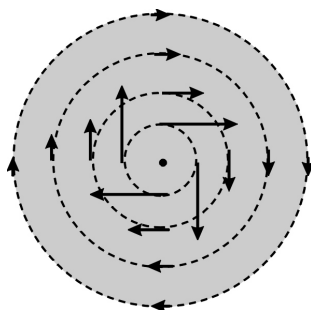
\mathcal{C}_z : $-\infty < x < -R$ oraz $R < x < \infty$ odwzorowują się w analogiczne odcinki $-\infty < u < -2R$ oraz $2R < u < \infty$ płaszczyzny \mathcal{C}_w ²³.

Opisane powyżej odwzorowanie nie opisuje jednak w pełni zagadnienia opływu okręgu. Optyw ten bowiem może realizować jeszcze „potencjalny wir”, charakteryzujący się wektorem prędkości (por. rys.1.37)

$$\mathbf{v} = \frac{i\mathcal{K}}{2\pi} \frac{z}{|z|^2} \equiv -\frac{\mathcal{K}y}{2\pi(x^2 + y^2)} + i\frac{\mathcal{K}x}{2\pi(x^2 + y^2)}. \quad (1.198)$$

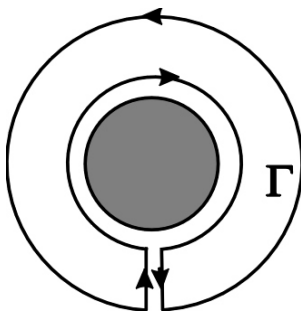
Wyrażenie „potencjalny wir” brzmi nieco dziwnie. Potencjalny – bo, jak Czytelniku sprawdzisz bez trudu – rotacja prędkości, określonej wzorem (1.197), jest równa zero. Z kolei całka krzywoliniowa z wektora prędkości, zdefiniowanego

²³Szczegółową analizę odwzorowań realizowanych przez funkcję Żukowskiego można znaleźć w każdym podręczniku funkcji zmiennej zespolonej. *Bardzo* pouczające jest prześledzenie tego odwzorowania *bardzo* dokładnie. Program minimum: wykaż, że wnętrze koła przekształca się też w płaszczyznę, z analogicznymi rodzinami elips i hiperbol, ale obieganych w kierunku przeciwnym.



Rysunek 1.37: Wir płaski o zerowej rotacji ($v(r) \sim 1/r$)

wzorem (1.197), po każdym konturze zawierającym w sobie punkt $z = 0$ jest równa \mathcal{K} ; natomiast dla konturu *nie* zawierającego $z = 0$ wartość całki jest równa zero. Tę pozorną sprzeczność (czyżby nie był słuszny wzór Stokesa?) można wyjaśnić, jeżeli zauważyć, że dla prędkości o wartości bezwzględnej proporcjonalnej do $1/r$ punkt $z = 0$ stanowi osobliwość. Prędkość, jak i jej rotacja, nie są w tym punkcie określone. Usunięcie tej osobliwości może być zrealizowane przez umieszczenie (na przykład) kołowej przeszkody (o środku w $z = 0$), ale wtedy kontur służący do obliczenia krążenia staje się konturem jak na rysunku 1.38, dla którego całkowite krążenie jest zerowe.



Rysunek 1.38: Kontur do obliczeń całkowitego krążenia wiru płaskiego z rysunku 1.37, wokół przeszkody umieszczonej w $z = 0$

Nietrudno jest zauważyć, że wektorowe pole prędkości płaskiego wiru – równ. (1.197) – to wektorowe pole liniowego ładunku (równ. 1.163) obrócone o kąt 90° , a więc przemnożone przez i . Zespolony potencjał wiru płaskiego ma postać (por. równ. (1.168))

$$w_1(z) = i \frac{\mathcal{K}}{2\pi} \ln \frac{1}{z} = \frac{\mathcal{K}}{2\pi i} \ln z, \quad (1.199)$$

a jeżeli tak, to potencjał zespolony naszego przepływu, dopuszczającego możliwość

krążenia płynu wokół przeszkody, to

$$\Psi(z) = w(z) + w_1(z) = z + \frac{R^2}{z} + \frac{\mathcal{K}}{2\pi i} \ln z. \quad (1.200)$$

Już na pierwszy rzut oka widać, że spełnione są warunki: $\Psi(\infty) = \infty$, a także $\Psi'(\infty) = 1$. Gdyby prędkość w nieskończoności była dowolną (zespoloną) liczbą v_∞ , to potencjał (1.201) należałoby poddać dość oczywistej modyfikacji

$$\Psi(z) = \overline{v_\infty} z + \frac{R^2 |v_\infty|^2}{\overline{v_\infty} z} + \frac{\mathcal{K}}{2\pi i} \ln(z \overline{v_\infty}) = \overline{v_\infty} z + \frac{\overline{v_\infty} R^2}{z} + \frac{\mathcal{K}}{2\pi i} \ln z + \frac{\mathcal{K}}{2\pi i} \ln \overline{v_\infty}. \quad (1.201)$$

Mamy wtedy bowiem, zgodnie z (1.191), $\Psi'(\infty) = \overline{v_\infty}$. Obecność czynnika $|v_\infty|^2$ w liczniku drugiego wyrazu sumy to konsekwencja tego „skalowania” $1 \rightarrow \overline{v_\infty}$. Czynniki skalujący pojawiają się także w elemencie logarytmu, co powoduje pojawienie się w potencjale pewnej – zupełnie nieistotnej – stałej addytywnej.

Równanie (1.200) opisuje w pełni wszystkie możliwe sytuacje, z jakimi mamy do czynienia przy opływie przeszkody o przekroju kołowym. Kluczową rolę odgrywa tu obecność wyrazu reprezentującego krążenie; wartość tego krążenia – stała \mathcal{K} – decyduje w sposób jakościowy o charakterze przepływu. Aby to zrozumieć, obliczmy wartość bezwzględną prędkości. Mamy

$$v = \left| \frac{d\Psi}{dz} \right| = \left| \overline{v_\infty} - \frac{R^2 v_\infty}{z^2} + \frac{\mathcal{K}}{2\pi i} \frac{1}{z} \right|. \quad (1.202)$$

Wartość prędkości będzie równa zeru w punktach spełniających równanie

$$z^2 \overline{v_\infty} + \frac{\mathcal{K}}{2\pi i} z - v_\infty R^2 = 0; \quad (1.203)$$

są to tzw. *punkty krytyczne*, albo *punkty stagnacji* z_{kr}

$$z_{kr} = \frac{1}{\overline{v_\infty}} \left[\frac{i\mathcal{K}}{4\pi} \pm \frac{1}{4\pi} \sqrt{16\pi^2 V^2 R^2 - \mathcal{K}^2} \right], \quad (1.204)$$

gdzie przez V oznaczamy $|v_\infty|$. Wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym może być dodatnie lub ujemne, w zależności od wielkości przyczynku do potencjału, pochodzącego od krążenia. Wartości bezwzględne punktów z_{kr} to

$$|z_{kr}| = \begin{cases} \frac{1}{4\pi V} \sqrt{\mathcal{K}^2 + 16\pi^2 V^2 R^2 - \mathcal{K}^2} = R, & \text{dla } |\mathcal{K}| \leq 4\pi V R, \\ \frac{1}{4\pi V} \left| \mathcal{K} \pm \sqrt{\mathcal{K}^2 - 16\pi^2 V^2 R^2} \right| & \text{dla } |\mathcal{K}| > 4\pi V R. \end{cases} \quad (1.205)$$

W pierwszym przypadku oba punkty krytyczne leżą na opływającym profilu (okręgu); w drugim jeden z nich leży poza okręgiem, a drugi – wewnątrz okręgu (jak wynika z (1.202)) $|z_{kr}^{(1)} \cdot z_{kr}^{(2)}| = R^2$.

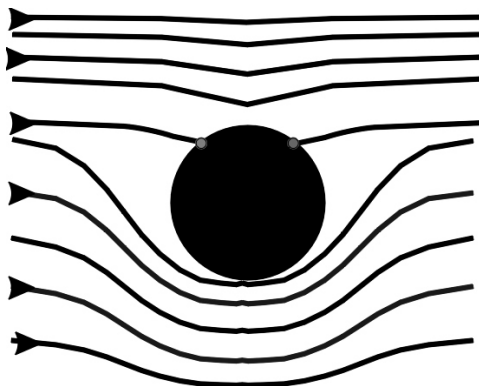
W sytuacjach „praktycznych” mamy zazwyczaj do czynienia z tym pierwszym przypadkiem. Połóżmy więc $z = Re^{i\phi}$ i $v_\infty = Ve^{i\theta}$ w (1.202). Dostaniemy

$$Ve^{-i\theta} - Ve^{i\theta}e^{-i2\phi} - \frac{i\mathcal{K}}{2\pi R}e^{-i\phi} = 0,$$

co po prostych przekształceniach daje warunek, tzw. *warunek Czapygina*, wiążący ze sobą wielkość krążenia, prędkość płynu w nieskończoności i argumenty punktów krytycznych

$$\mathcal{K} = 4\pi RV \sin(\phi - \theta). \quad (1.206)$$

Na przykład dla $\theta = 0$ (prędkość skierowana równoległe do osi rzeczywistej) dwa punkty krytyczne leżą symetrycznie względem osi urojonej (ϕ_1 i $\phi_2 = \pi - \phi_1$). Zwyczajowo pierwszy z nich nazywa się *punktem stagnacji*, a drugi określa się mianem *punktu spływu*. Sytuację przedstawia rysunek 1.39.



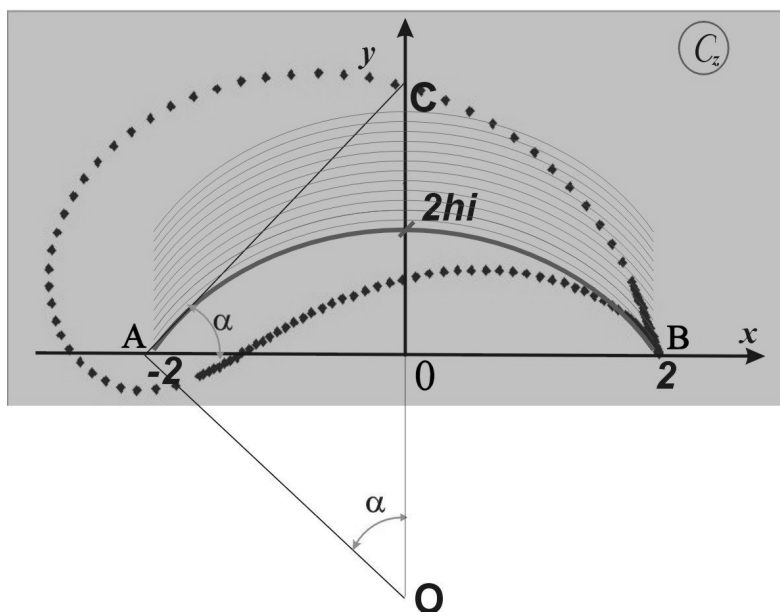
Rysunek 1.39: Pole prędkości w opływie profilu kołowego – punkty krytyczne

Całkowity opływ profilu typu „skrzydło”

Opisany w poprzednim punkcie opływ profilu o przekroju kołowym ma znacznie bardziej uniwersalny charakter, niż można by przypuszczać. Wynika to z faktu, że za pomocą odwzorowań konforemnych, a w szczególności funkcji Żukowskiego (por. 1.193), można praktycznie dowolny obszar, a właściwie *zewnątrze* pewnego profilu płaskiego, przekształcić na zewnątrz pewnego okręgu. Aby to zilustrować, rozpatrzmy profil (przekrój skrzydła) jak na rysunku 1.40 i zacznijmy od znalezienia odwzorowania zewnątrz łuku **AB** okręgu z płaszczyzny \mathcal{C}_z , rozpiętego pomiędzy punktami -2 i 2^{24} , na zewnątrz koła **K** płaszczyzny \mathcal{C}_w . Homografia

$$\zeta = \frac{z - 2}{z + 2} \quad (1.207)$$

²⁴Uważny Czytelniku, który zauważyłeś, że łuk **AB** nie jest łukiem okręgu – masz rację! Z przyczyn technicznych został on nieco „spłaszczony”, aby reszta szczegółów rysunku pokrywała się z modelem skrzydła.



Rysunek 1.40: Model profilu skrzydła. Gęste (cienkie) linie określają „zewnątrze” konturu (łuku **AB**)

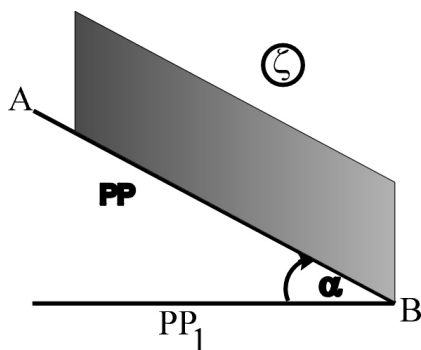
przekształca łuk **AB** w półprostą **PP**; punkt **B** $z = 2$ przechodzi w $\zeta = 0$. Ta sama homografia przekształca odcinek $[-2, 2]$ płaszczyzny C_z w półprostą **PP**₁ $[0, -\infty)$ płaszczyzny C_ζ , a ponieważ wartość pochodnej

$$\left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=2} > 0,$$

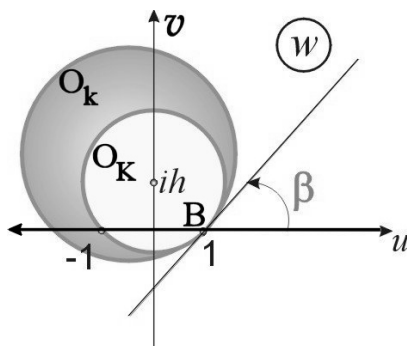
to kąt α w punkcie **B** płaszczyzny C_z , pomiędzy styczną do łuku a osią rzeczywistą, zostaje przy przekształceniu zachowany zarówno co do wielkości bezwzględnej, jak i do zwrotu. Kąt ten obliczamy z trójkąta **AOC** na rysunku 1.40: $\sin \alpha = 2/OA \equiv 2/r$. Wprowadzając wysokość łuku „ponad” osią rzeczywistą jako $2h$, mamy też $\cos \alpha = (r - 2h)/r = 1 - h \sin \alpha$, a więc

$$h = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (1.208)$$

albo $\alpha = 2 \operatorname{arctg} h$. Zewnątrze łuku **AB** płaszczyzny C_z przechodzi w zewnątrze półprostej **PP** płaszczyzny C_ζ (rys.1.41). To ostatnie chcielibyśmy teraz przekształcić w zewnątrze koła **K** na płaszczyźnie C_w . Możemy znaleźć potrzebne odwzorowanie pracując „od tyłu”: wyobraźmy sobie, że interesuje nas odwzorowanie koła **K** z płaszczyzny C_w na zewnątrze półprostej, położonej na płaszczyźnie C_t (por. rys.1.43). Brzeg koła **K**, okrąg **OK** na płaszczyźnie C_w , przecina jej oś rzeczywistą $0u$ w punktach $u = \pm 1$; kąt pomiędzy styczną do tego okręgu w punkcie $w = 1$, a osią $0u$ to kąt β . Środek koła ma współrzędną $v = h$ (por. rys.1.42). Homografia



Rysunek 1.41: Odwzorowanie zewnątrz łuku okręgu, realizowane przez funkcję (1.206)



Rysunek 1.42: Dwa styczne okręgi na płaszczyźnie C_w

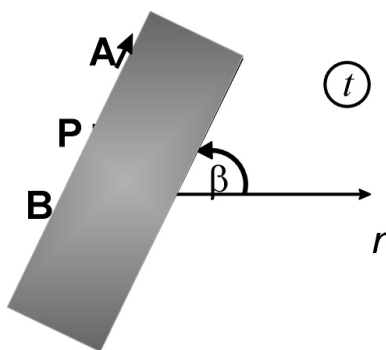
$$t = \frac{w-1}{w+1} \quad (1.209)$$

przekształca okrąg O_K C_w na prostą \mathbf{P} (por. rys.1.43), przechodzącą przez $t=0$ i nachyloną do osi rzeczywistej $0r$ pod kątem (por. rys.1.42) $\beta = \pi/2 - \arctg h$ (znak pochodnej funkcji (1.208) w punkcie $w=1$ jest dodatni). Zewnątrz koła \mathbf{K} z płaszczyzny C_w przechodzi w zewnątrz tej prostej na płaszczyźnie C_t . Jeżeli zastosujemy teraz odwzorowanie

$$\zeta = t^2 = \left(\frac{w-1}{w+1} \right)^2, \quad (1.210)$$

to kąt pomiędzy prostą \mathbf{P} a osią $0r$ zmieni się na $2\beta = \pi - 2\arctg h = \pi - \alpha$, a więc prosta \mathbf{P} pokrywa się z prostą \mathbf{PP} z rysunku 1.41. Pozbywając się „pośredniczących” zmiennych ζ i t z równań (1.206) i (1.209), mamy

$$\left(\frac{w-1}{w+1} \right)^2 = \frac{z-2}{z+2}, \quad (1.211)$$



Rysunek 1.43: Obraz obszaru zawartego pomiędzy okręgami na rysunku 1.42

albo

$$z = w + \frac{1}{w} \tag{1.212}$$

oraz – odwzorowanie odwrotne –

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4} \right). \tag{1.213}$$

Jeżeli na płaszczyźnie C_w wziąć teraz drugi okrąg, O_k , styczny do okręgu O_K w punkcie $w = 1$, to odwzorowanie (1.211) przekształca obszar zawarty pomiędzy tymi dwoma okręgami w obszar płaszczyzny C_z , ograniczony znacznikami w kształcie rombów z rysunku 1.40. Znaczniki tworzą kontur, który w punkcie $z = 2$ ma ostrze, a którego kształt może być modelem przekroju skrzydła samolotu²⁵.

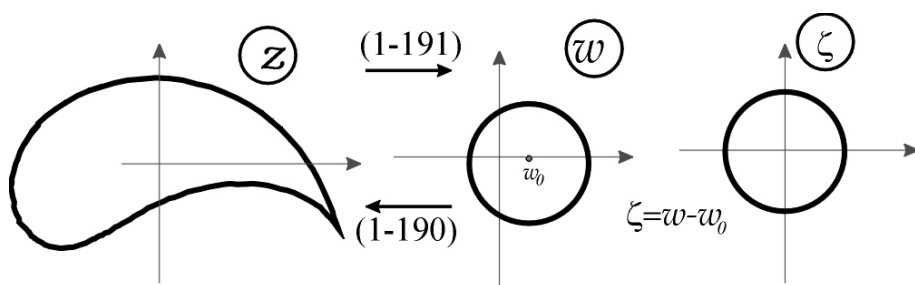
Jak widać, jeszcze raz pojawia się tutaj funkcja Żukowskiego. Opływ profilu skrzydła może więc zostać bez większych trudności sprowadzony do problemu opływu koła (walca), opisanego w poprzednim podrozdziale. Sekwencja odwzorowań: $w = w(z)$; $\zeta = \zeta(w) = \zeta[w(z)] \equiv \tilde{\zeta}(z)$ (por. rysunek 1.44) przekształca obszar zewnętrzny profilu skrzydła, z płaszczyzny C_z , w obszar zewnętrzny okręgu $|\zeta| = R$ płaszczyzny C_ζ ; prędkość przepływu określa (wzór 1.200) zespolony potencjał prędkości $\Psi(\zeta) = \tilde{\Psi}(z)$.

Przy obliczaniu prędkości dla określonych punktów z płaszczyzny C_z oblicza-

²⁵Profil skrzydła, który pojawia się na rysunku 1.40 został „skonstruowany” za pomocą arkusza obliczeniowego Excel. Punkty okręgu z k płaszczyzny C_w zostały zapisane jako

$$w = u + iy = u_0 + iv_0 + Re^{i\psi}.$$

Punkt (u_0, iv_0) to środek koła k , którego promień jest równy R . Z równania (1.211) zostały obliczone odpowiednie wartości x (część rzeczywista) i y (część urojona) punktów-obrazów płaszczyzny C_z . Wartości liczbowe: $u_0 = -0,6$; $v_0 = 0,75$; $R = 1,77$. Eksperymenty z transformacją Żukowskiego można znaleźć (wraz z elementami hydrodynamiki i fizyki lotu) na bardzo interesujących stronach dr. Johna Stewarta Denkera: <http://www.monmouth.com/~jsd>.



Rysunek 1.44: Sekwencja odwzorowań, przekształcających kontur „skrzydła” w okrąg o środku w początku układu współrzędnych

my $\tilde{\Psi}(z)$

$$\frac{d\tilde{\Psi}}{dz} = \frac{d\Psi}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\Psi}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}. \quad (1.214)$$

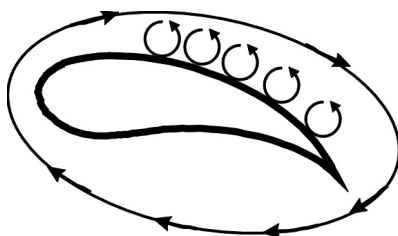
Dla profilu z rysunku 1.42

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=2} = \left. \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4} \right) \right] \right|_{z=2} = \infty, \quad (1.215)$$

(por. wzór (1.212)). W okolicy ostro zakończonej partii profilu wartość prędkości dąży do nieskończoności (tzw. *efekt ostrza*). Tak byłoby rzeczywiście, gdyby nie efekty lepkości i powstające wskutek niej wiry w tzw. *warstwie granicznej* (warstwie płynu przepływającego bezpośrednio przy profilu). Wiry te powodują przesunięcie punktu spływu („tylnego” punktu krytycznego) właśnie do ostrza i bliższa analiza wykazuje, że to właśnie przesunięcie eliminuje nieskończoną wartość prędkości w okolicy ostrza. Z kolei położenie drugiego – „frontalnego” – punktu stagnacji związane jest z prędkością (niezaburzonego przez profil) płynu w nieskończoności i krążeniem wokół skrzydła. To ostatnie – to znowu efekt lepkości: w jego wyniku warstwa graniczna płynu na górnej części skrzydła odrywa się od niego, tworząc cały szereg wirów o krążeniu dodatnim (kierunek obiegu przeciwny do ruchu wskazówek zegara), jeżeli prędkość płynu skierowana jest do strony lewej profilu ku prawej. Ze względu na prawo zachowania krążenia (szczególny przypadek prawa zachowania momentu pędu) powstawanie tych wirów musi być kompensowane pojawieniem się wokół profilu skrzydła dodatkowego krążenia o obiegu przeciwnym – ujemnym (zgodnym z ruchem wskazówek zegara), tak jak pokazane jest to na rysunku 1.45.

Taka dodatkowa cyrkulacja stanowi źródło siły nośnej. Wynika to z prawa Bernoulliego, dla przepływów ustalonych płynów ... idealnych²⁶. Zgodnie z prawem

²⁶Idealnych i lepkich? Argumentujemy: lepkość płynu manifestuje się poprzez przesunięcie punktu spływu do ostrza, a także – w wyniku odrywania się warstwy granicznej i powstawania wirów – poprzez wprowadzenie dodatkowego, „globalnego” krążenia wokół skrzydła. Krążący wokół skrzydła i przesuający się względem niego płyn zachowuje się już – z niezłym przybliżeniem – jak płyn idealny.



Rysunek 1.45: Krążenie wektora prędkości wokół profilu skrzydła

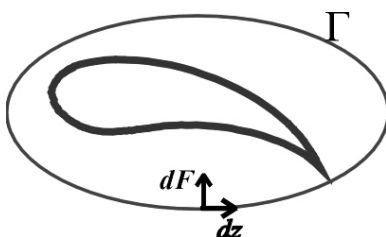
Bernoulliego, ciśnienie p i prędkość \mathbf{v} płynu związane są relacją

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = C, \quad (1.216)$$

gdzie ρ jest gęstością płynu, a C – pewną stałą. Przy opływie krzywej Γ (por. rys.1.46) ciśnienie wywierane na opływany kontur (prawo Pascala!) jest skierowane prostopadle ku jego wnętrzu. Element siły $d\mathbf{F}$ działający na element dz konturu²⁷ to $i p dz$; siła całkowita to

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{X} + i\mathbf{Y} = \oint_{\Gamma} i p dz = -\frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} v^2 dz + \oint_{\Gamma} i C dz, \quad (1.217)$$

przy czym druga całka jest równa zero (twierdzenie Cauchy’ego). Dla punktów



Rysunek 1.46: Kontur Γ do obliczeń siły nośnej, wynikającej z niezerowego krążenia

profilu prędkość cieczy jest do niego styczna

$$\mathbf{v} = \overline{\Psi'(z)} \equiv v e^{i\phi}, \quad (1.218)$$

gdzie v jest modułem prędkości, a ϕ – argumentem elementu konturu dz : $dz \equiv e^{i\phi} |dz|$. Tak więc

$$v = e^{-i\phi} \overline{\Psi'(z)} \quad (1.219)$$

²⁷Cały czas pamiętamy, że kontur jest śladem przecięcia nieskończonego obiektu trójwymiarowego z płaszczyzną. Siła to ciśnienie \times powierzchnia; ta ostatnia – to długość elementu konturu pomnożona przez (np.) jednostkową „głębokość”.

i wzór (1.216) przybiera postać

$$\mathbf{F} = -\frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} [\overline{\Psi'(z)}]^2 e^{-2i\phi} dz. \quad (1.220)$$

Z kolei $e^{-2i\phi} dz = e^{-2i\phi} e^{i\phi} |dz| = e^{-i\phi} |dz| = \overline{dz}$ i wzór (1.219) możemy zapisać, przechodząc do wielkości sprzężonych

$$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{X} - i\mathbf{Y} = \frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} [\Psi'(z)]^2 dz. \quad (1.221)$$

Zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego, krzywą całkowania – kontur Γ – możemy zastąpić inną krzywą, obejmującą opływany profil (i kontur Γ), jeżeli tylko obszar na zewnątrz Γ wolny jest od wirów i źródeł – osobliwości fizycznych, przekładających się na punkty nieanalityczności funkcji $\Psi'(z)$.

W rozważanym przez nas przypadku opływu profilu kołowego mieliśmy (por. wzór (1.200))

$$\Psi(z) = \overline{v_{\infty}}z + \frac{R^2|v_{\infty}|^2}{v_{\infty}z} + \frac{\mathcal{K}}{2\pi i} \ln z = \overline{v_{\infty}}z + \frac{v_{\infty}R^2}{z} + \frac{\mathcal{K}}{2\pi i} \ln z$$

i, konsekwentnie,

$$\Psi'(z) \equiv \overline{v_{\infty}} + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2}, \quad (1.222)$$

przy czym, w zgodzie z twierdzeniem o reszduach

$$\mathcal{K} = \oint_{\Gamma} \Psi'(z) dz = 2\pi i c_{-1}. \quad (1.223)$$

Obliczmy kwadrat pochodnej potencjału zespolonego

$$\begin{aligned} [\Psi'(z)]^2 &= \left(\overline{v_{\infty}} - \frac{v_{\infty}R^2}{z^2} + \frac{\mathcal{K}}{2\pi iz} \right)^2 \\ &= \overline{v_{\infty}}^2 + \frac{\overline{v_{\infty}}\mathcal{K}}{\pi iz} + \dots \end{aligned} \quad (1.224)$$

Wstrzymujemy dalsze rachunki, bo do naszych celów potrzebny jest tylko współczynnik przy $1/z$. Całka występująca w (1.220) to

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{i\rho}{2} 2\pi i \frac{\overline{v_{\infty}}\mathcal{K}}{\pi i} = i\rho\mathcal{K}\overline{v_{\infty}}, \quad \text{tak więc} \quad (1.225)$$

$$\mathbf{F} = -i\rho\mathcal{K}\overline{v_{\infty}}. \quad (1.226)$$

Powyższy wzór nosi nazwę wzoru Kutty-Żukowskiego (obaj panowie wyprowadzili go niezależnie od siebie); podaje on wartość siły działającej na opływane ciało jako proporcjonalną do: krążenia, gęstości płynu, prędkości w nieskończoności. Kierunek tej siły nośnej jest obrócony o kąt prosty względem kierunku v_{∞} : zgodnie

z ruchem wskazówek zegara (czynnik $-i$), o ile krążenie jest dodatnie (obieg przeciwny do obiegu wskazówek zegara) lub przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o ile krążenie jest ujemne (obieg zgodny z obiegiem wskazówek zegara).

Dla konturu z ostrzem wzór Czapłygina (1.205) wiąże cyrkulację, prędkość w nieskończoności i kształt ostrza

$$\mathcal{K} = 4\pi V R \sin(\phi_0 - \theta), \quad (1.184)$$

gdzie – przypomnijmy – V to wartość bezwzględna (moduł) prędkości niezaburzonej, θ – jej argument, a ϕ_0 – argument obrazu punktu ostrza przy odwzorowaniu, przekształcającym zewnętrzny obszar opływającego konturu w zewnątrz koła o promieniu R . Podstawiając z powyższego wzoru za \mathcal{K} do wzoru Kutty-Żukowskiego otrzymujemy wartość bezwzględną siły wyporu

$$F = 4\pi\rho R V^2 |\sin(\phi_0 - \theta)| \quad (1.227)$$

– siła nośna jest proporcjonalną do kwadratu prędkości w nieskończoności i do gęstości płynu.

1.13 Gamma Eulera i pokrewne jej funkcje

Zacznijmy od definicji funkcji $\Psi(z)$, która jest *pochodną logarytmiczną funkcji gamma* $\Gamma(z)$:

$$\frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) \equiv \Psi(z), \quad (1.228)$$

przy czym definicję Ψ podamy nie dla argumentu z lecz $z + 1$:

$$\Psi(1 + z) = -\gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right). \quad (1.229)$$

Porównując powyższy wzór z rozwinięciem kotangensa – (1.118) – widzimy, że – z dokładnością do niewyspecyfikowanej jeszcze stałej γ – logarytmiczna pochodna gammy Eulera to „połowa” rozwinięcia $\pi \operatorname{ctg} \pi z - 1/z$, a konkretnie – część rozwinięcia dla ujemnych wskaźników k . Funkcja $\Psi(1 + z)$ jest więc funkcją meromorficzną, z biegunami pierwszego rzędu w punktach $z = -1, -2, \dots, -k, \dots$

Celem pełnego określenia funkcji gamma narzucmy na nią dwa warunki, które staną się oczywiste w dalszym ciągu tego podrozdziału

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \quad (1.230)$$

i scałkujemy definicję (1.228) względem z od $z = 0$ do z (podobnie jak w podrozdziale 1.11.3). Otrzymamy

$$\ln \Gamma(1 + z) - \ln \Gamma(1) = \int_0^z \Psi(1 + z) dz = -\gamma z - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln \frac{z+k}{k} - \frac{z}{k} \right), \quad (1.231)$$

albo, uwzględniając pierwszy z warunków (1.229) oraz pozbywając się logarytmów i ujemnych znaków po prawej stronie

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}. \quad (1.232)$$

Powyższy wzór – zwany postacią iloczynową Weierstrassa – pozwala nam już dobrze zanalizować strukturę funkcji gamma: jej odwrotność jest funkcją całkowitą (regularną na całej płaszczyźnie zespolonej otwartej), która ma zera pierwszego rzędu w $z = -1, -2, \dots, -k, \dots$. Punkty te są biegunami pierwszego rzędu gammy, która (dla skończonych z) nigdzie nie jest równa zero. We wzorze (1.231) pojawia się znowu „połowa” przedstawienia funkcji $\sin \pi z / \pi z$ w postaci iloczynu – wzór (1.126).

Pozostaje jeszcze wyznaczenie stałej γ . Wykorzystując drugi z warunków (1.229), mamy

$$\ln \Gamma(2) = \ln 1 = 0 = -\gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1+k}{k} - \frac{1}{k} \right). \quad (1.233)$$

Tak więc

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{1+k}{k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right) - \ln \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \dots \quad (1.234)$$

Już widzimy

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n). \quad (1.235)$$

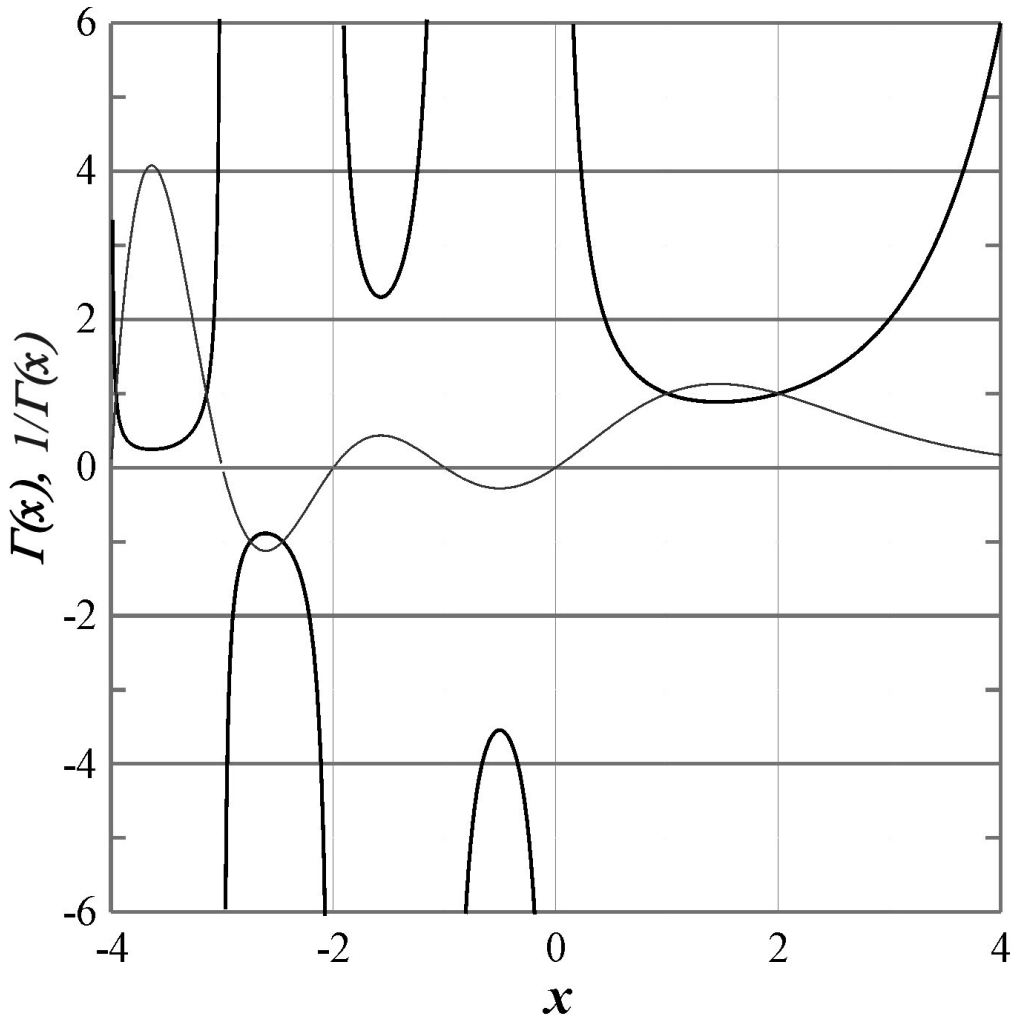
(Zamianę $\ln(n+1) \rightarrow \ln(n)$ usprawiedliwia przejście graniczne.) H_n to n -ta liczba harmoniczna, analogon funkcji logarytmicznej w rachunkach zmiennej dyskretnej²⁸. Mówiąc prostym językiem: stała gamma, nazywaną stałą Eulera albo stałą Eulera-Mascheroniego, to różnica pomiędzy logarytmem a liczbą harmoniczną, w przypadku gdy argumenty obu stają się nieskończenie wielkie. Sama różnica jest niewielka²⁹

$$\gamma = 0,57721566 \dots \quad (1.236)$$

Zachowanie się gammy i jej odwrotności, dla rzeczywistych wartości argumentu „w okolicy” zera, zilustrowane jest na rys.1.47.

²⁸Jeżeli chcesz wiedzieć więcej, zagłębuj: <http://www.ftj.agh.edu.pl/~lenda/cicer/harm.htm>.

²⁹Dzisiaj artyści od asymptotyki liczą rozwinięcia gammy, zawierające tysiące cyfr po przecinku i ... gryzą paznokcie z nerwów, bo nikomu nie udało się jeszcze rozstrzygnąć problemu, czy ta „połówka i ciut” jest liczbą wymierną, czy nie.



Rysunek 1.47: Gamma Eulera i jej odwrotność jako funkcja rzeczywistego x w przedziale $x \in (-4, +4)$

1.13.1 Podstawowe własności $\Gamma(z)$

Wykorzystując definicję (1.228) (i fakt, że szereg jest jednostajnie zbieżny dla każdego, skończonego z), mamy

$$\begin{aligned} \Psi(1+z) - \Psi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k-1} - \frac{1}{z+k} \right) & (1.237) \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \dots - \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \dots \right) = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Całkując powyższą równość, otrzymujemy

$$\ln \Gamma(1+z) - \ln \Gamma(z) = \ln z + \ln C, \quad (1.238)$$

czyli $\Gamma(1+z) = Cz \Gamma(z)$. Wartość stałej C wynika z warunku (1.229)

$$\Gamma(2) - \Gamma(1) = 1 - 1 = 0; \quad \rightarrow \quad C = 1.$$

Podstawowa własność gammy to

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)} \quad (1.239)$$

Aplikując ją n razy

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)\Gamma(z+n-1) = \dots = (z+n-1)(z+n-2)\dots z\Gamma(z), \quad (1.240)$$

i kładąc $z = 1$ odkrywamy wreszcie, że

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \quad (1.241)$$

– gamma Eulera to „analityczne przedłużenie” silni na całą płaszczyznę zespoloną! Zmieniając w (1.239) $z+n$ na $(z+n+1)$, uzyskujemy raz jeszcze możliwość „wizualizacji” osobliwości biegunowych gammy

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad (1.242)$$

a także policzenia jej residuów

$$\text{Res } \Gamma(-n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (1.243)$$

Wykorzystując podstawowy wzór (1.231) (i podstawową własność (1.238)) mamy

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{z}{\Gamma(1+z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \quad (1.244)$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} \quad (1.245)$$

i mnożąc przez siebie odpowiednie strony równości (1.244) i (1.243), otrzymujemy

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right). \quad (1.246)$$

Iloczyn po prawej stronie to (por.1.126) przedstawienie funkcji $\sin \pi z / \pi z$. Kolejny ważny wzór to

$$\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}} \quad (1.247)$$

z którego wynika, po podstawieniu $z = 1/2$,

$$\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}} \quad (1.248)$$

Będąc przy argumentie $z = 1/2$, warto podać wzory dla dowolnych argumentów „połwkowych”. Wykorzystując podstawową własność gamma (1.238), mamy natychmiast

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \left(\frac{2n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right);$$

zastosowanie tego proceduru obniżania wartości argumentu odpowiednią liczbę razy daje

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(3)(1)\sqrt{\pi}}{2^n} \equiv \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n}, \quad (1.249)$$

$$\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-3)(2n-5)\dots(3)(1)\sqrt{\pi}}{2^{n-1}} \equiv \frac{(2n-3)!!\sqrt{\pi}}{2^{n-1}}. \quad (1.250)$$

Dwoma wykrzyknikami oznaczamy tzw. podwójne silnie – iloczyny wszystkich nieparzystych liczb od 1 do $2n \pm 1$. Można zresztą pozostać przy „zwykłych” silniach. Wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned} (2n-1)(2n-3)\dots(3)(1) &= \\ \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(3)(1) \cdot 2^{n-1}(n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} &= \\ \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(3)(1)(2n-2)(2n-4)\dots 2}{2^{n-1}(n-1)!} &= \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \end{aligned}$$

i wzory (1.248) i (1.249) przybierają postać

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}(n-1)!} = \frac{\Gamma(2n)\sqrt{\pi}}{\Gamma(n)2^{2n-1}} \quad (1.251)$$

$$\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-3)!\sqrt{\pi}}{2^{2n-3}(n-2)!} = \frac{\Gamma(2n-2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(n-1)2^{2n-3}}. \quad (1.252)$$

Te ostatnie wzory spotyka się w literaturze pod nazwą wzorów podwajających Legendre’a.

1.13.2 Reprezentacja całkowa

Określenie funkcji w postaci nieskończonego iloczynu (1.231) to tzw. definicja Weierstrassa. Sam Euler, znakomity szwajcarski matematyk³⁰, podał oryginalną definicję (w 1729 roku) w nieco innej postaci. Ta oryginalna definicja Eulera to³¹

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{\left(1 + \frac{z}{n}\right)}. \quad (1.253)$$

³⁰<http://www.ftj.agh.edu.pl/~lenda/cicer/cyclop.htm>.

³¹Dociekliwemu Czytelnikowi pozostawiamy wykazanie równoważności obu wzorów.

Tak jak wynika z powyższej dyskusji, postać ta dobrze oddaje pewne własności funkcji gamma³², ale nie jest zbyt „przyjazna” w praktycznych zastosowaniach. Euler wprowadził z wzoru (1.252) określenie gammy w postaci całki

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0. \quad (1.254)$$

Jak wynika z zastrzeżenia, całka we wzorze (1.253) jest zbieżna tylko dla dodatniej rzeczywistej części argumentu. To zresztą jest dość oczywiste: moduł funkcji podcałkowej to

$$|e^{-t} t^{z-1}| = |e^{-t} e^{(z-1) \ln t}| = e^{-t} e^{(x-1) \ln t}.$$

Czynnik e^{-t} zapewnia zbieżność całki dla $t \rightarrow \infty$, a czynnik $e^{(x-1) \ln t}$ – dla $t \rightarrow 0$ (przy $x > 0$). W olbrzymiej większości przypadków mamy zresztą do czynienia z funkcją gamma dla argumentów czysto rzeczywistych, tak że bardziej „robocza” definicja całkowa to³³

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0. \quad (1.255)$$

Dla x całkowitego, $x = n$, całkując n -krotnie przez części, znajdujemy natychmiast potwierdzenie (1.240)

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n!$$

Wzór (1.254) pojawia się w rozlicznych postaciach, często dość daleko odbiegających od formy kanonicznej. Odpowiednia zmiana zmiennych pozwala szybko ustalić ekwiwalencję. Na przykład

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left[\ln \frac{1}{u} \right]^{x-1} du, \quad x > 0, \quad (1.256)$$

(podstawienie $u = e^{-t}$), lub – szczególnie popularne –

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2z-1} du; \quad x > 0, \quad (1.257)$$

(podstawienie $t = u^2$). Popularność tej ostatniej definicji wynika z obecności w funkcji podcałkowej funkcji gaussowskiej e^{-u^2} .

³²Warto może wiedzieć, że to nie sam Euler tak nazwał swoje dziecko. Nazwy tej użył pierwszy raz Legendre w 1814 r., dobre dwadzieścia lat po śmierci wielkiego Eulera.

³³Istnieje też rozszerzenie wzoru (1.253) na przypadek ujemnych (ale nie całkowitych!) wartości $\Re(z)$, tzw. całka konturowa Hankela.

1.13.3 Funkcje niekompletne — $\gamma(a, x)$ i $\Gamma(a, x)$; całkowa funkcja wykładnicza; sinus, kosinus i logarytm całkowity

Związek eulerowskiej gammy z rozkładem Gaussa – podstawowym „narzędziem statystyki” – powoduje, że w użyciu mamy też tzw. niekompletne funkcje gamma, to jest funkcje zdefiniowane za pomocą całek identycznych jak ta we wzorze (1.254), ale z jedną z granic całkowania zastąpioną przez zmienną τ . Mamy

$$\gamma(x, \tau) = \int_0^\tau e^{-t} t^{x-1} dt, \quad (1.258)$$

$$\Gamma(x, \tau) = \int_\tau^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (1.259)$$

Oczywiście

$$\gamma(x, \tau) + \Gamma(x, \tau) = \Gamma(x). \quad (1.260)$$

Funkcja $\gamma(x, \tau)$ będzie więc ściśle powiązana z dystrybuantą (skumulowaną gęstością rozkładu prawdopodobieństwa) rozkładu Gaussa. Ze względu na popularność dystrybuanty gaussowskiej wprowadzono tzw. funkcję błędu (*error function*):

$$\operatorname{erf}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma(1/2, \tau^2). \quad (1.261)$$

Z definicji widzimy, że funkcja błędu reprezentuje podwojoną całkę krzywej gaussowskiej (wartość oczekiwana zero), na prawo od punktu $t = 0$ do $t = \tau$. Dla symetrii wprowadza się też funkcję dopełniającą dla funkcji błędu (*error function complement*)

$$\operatorname{erfc}(\tau) = 1 - \operatorname{erf}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\tau^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2, \tau^2). \quad (1.262)$$

Funkcja błędu $\operatorname{erf}(x)$ i jej dopełnienie (do jedności) $\operatorname{erfc}(x)$ pojawiają się także w fizyce, w rozwiązaniach równania dyfuzji.

Jednym z szczególnych przypadków niekompletnej funkcji $\Gamma(x, \tau)$ jest przypadek dla $x = 0$. Mamy wówczas do czynienia z tzw. całkową funkcją wykładniczą, definiowaną – w różnych źródłach – według nieco różniących się formuł. My przyjmujemy definicję całkowitej funkcji wykładniczej Ei jako³⁴

$$-Ei(-\tau) = \int_\tau^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \equiv E_1(\tau). \quad (1.263)$$

(Funkcja $E_1(x)$ to alternatywna definicja całkowitej wykładniczej.) Oczywiście mamy

$$E_1(\tau) = -Ei(-\tau) = \Gamma(0, \tau).$$

³⁴ Ei to skrót od *exponential integral*. Małe i ma swą genezę w łacińskim (angielskim, francuskim, ...) *integralis*. Duże C (kosinus) i małe s (sinus) to skutki istnienia pewnych – mało istotnych – konwencji stosowanych przy definiowaniu „całkowych” funkcji.

W podobnym duchu definiowane są sinus, kosinus i logarytm całkowity:

$$\operatorname{si}(\tau) = - \int_{\tau}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{1}{2i} [\operatorname{Ei}(ix) - \operatorname{Ei}(-ix)]; \quad (1.264)$$

$$\operatorname{Ci}(\tau) = - \int_{\tau}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \frac{1}{2} [\operatorname{Ei}(ix) + \operatorname{Ei}(-ix)]; \quad (1.265)$$

$$\operatorname{li}(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{dt}{\ln t}. \quad (1.266)$$

Pomiędzy trzema funkcjami zachodzi relacja

$$\operatorname{Ei}(\tau) = \operatorname{Ci}(\tau) + i \operatorname{si}(\tau)$$

– analogiczna do dobrze znanego wzoru Eulera (de Moivre’a).

Jako ciekawostkę warto przytoczyć ó jeszcze fakt, że niekompletna funkcja γ jest spowinowana z funkcją konfluentną, o której będziemy mówić w podrozdziale ???. Konkretnie

$$\gamma(x, \tau) = \frac{1}{x} \tau^x F(x, x+1, -\tau). \quad (1.267)$$

1.13.4 Funkcja beta Eulera

Podstawowa definicja pojawiającej się dość często w rachunkach *funkcji Eulera drugiego rodzaju*, $B(p, q)$, to

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (1.268)$$

Aby zdefiniować funkcję $B(p, q)$ w sposób bardziej „bezpośredni”, obliczmy występujący w liczniku (1.267) iloczyn dwóch funkcji gamma:

$$\begin{aligned} & \Gamma(p)\Gamma(q) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \int_0^{\infty} e^{-s} s^{q-1} ds = \dots t \Rightarrow x^2, \quad s \Rightarrow y^2 \dots \\ &= 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2p-1} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2q-1} dy = \dots x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \dots \\ &= 4 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2p+2q+1} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \\ &= (\text{por. wzór 1.256}) = \Gamma(p+q) 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Stąd

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta. \quad (1.269)$$

Podstawienie $\cos \theta = t$ pozwala łatwo uzyskać alternatywną definicję

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \quad (1.270)$$

Kolejna zmiana zmiennej całkowania $t = u/(u + 1)$ prowadzi do jeszcze jednego pożytecznego wzoru-definicji

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{u^{p-1}}{(u + 1)^{p+q}} du, \quad (1.271)$$

który można wykorzystać do wykazania relacji (por. 1.246)

$$B(p, 1 - p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad (1.272)$$

z której, kładąc $p = 1/2$, można łatwo otrzymać kolejną weryfikację: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1.13.5 Trochę fizyki

Ładnym przykładem zastosowania funkcji gamma w fizyce jest problem promieniowania ciała doskonale czarnego. Jak wiadomo, jest to jeden z pierwszych problemów, którego skuteczne rozwiązanie wymagało wprowadzenia pojęcia kwantu energii. Jeszcze na gruncie rozważań czysto „klasycznych” Rayleigh i Jeans wykazali, że liczba fal dn zawarta w nieskończenie małym przedziale częstotliwości $(\nu, \nu + d\nu)$ i w jednostkowej objętości jest równa

$$dn = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu; \quad (1.273)$$

(c – prędkość światła). Natomiast Planck, wprowadzając pojęcie kwantu energii: $E = h\nu$ (h – stała Plancka), otrzymał następujący wzór na średnią energię oscylatora (modelu ciała doskonale czarnego) w stanie równowagi

$$E = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (1.274)$$

gdzie T to temperatura, a k – stała Boltzmanna. Wzór ten różnił się od analogicznego wzoru „klasycznego” obecnością jedynki w mianowniku – różnica ta była praktycznie do zaniechania dla niewielkich T , ale dla dużych stawała się wyraźna. Co więcej, to właśnie wzór Plancka zgadzał się z danymi doświadczalnymi! Z równań (1.272) i (1.273) wynika, że gęstość energii emitowanej przez ciało doskonale czarne to

$$\phi(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (1.275)$$

a całkowita energia emitowana to całka

$$\Phi = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (1.276)$$

Gdyby nie jedynka Plancka w mianowniku, mielibyśmy całkę typu $\int_0^{\infty} \nu^3 e^{-a\nu} d\nu$ ($a = h/kT$), a więc „praktycznie” $\Gamma(4)$, ale „fizyczna” waga jedynki jednak zmusza nas do małego wysiłku. Podstawmy $x = e^{-a\nu}$. Nowa całka to

$$\Phi = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{1-x} dx. \quad (1.277)$$

I znowu – gdyby nie czynnik $1/(1-x)$ mielibyśmy – bezpośrednio – gammę (por. wzór (1.255)). Ale ten czynnik, to – dla $|x| < 1$ – suma szeregu geometrycznego:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Całkę (1.276) można więc zapisać w postaci

$$\Phi = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^1 \left\{ \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 + x \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 + x^2 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 + \dots \right\} dx. \quad (1.278)$$

Zakładając, że wolno nam całkować wyraz po wyrazie nieskończoną sumę pod znakiem całki i obliczając „po drodze” całkę (por. 1.255)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\ln \frac{1}{u} \right]^{x-1} u^m du &= \dots u = e^{-t} \dots \\ &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t(m+1)} dt = \int_0^\infty \frac{[t(m+1)]^{x-1} e^{-t(m+1)} d[(m+1)t]}{(m+1)^x} = \frac{\Gamma(x)}{(m+1)^x} \end{aligned}$$

uzyskujemy ostateczny wynik. Całkowita energia emitowana w temperaturze T jest równa

$$\Phi = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \Gamma(4) \left\{ \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right\} \equiv \frac{48\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \zeta(4). \quad (1.279)$$

Pojawiająca się w ostatnim wzorze $\zeta(4)$ to *funkcja dzeta Riemanna*, zdefiniowana jako

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 1. \quad (1.280)$$

(W podrozdziale 1.11.3 widzieliśmy, że suma występującą w (1.278) jest równa $\zeta(4) = \pi^4/90$.)

Ale – czy wolno całkować wyraz po wyrazie? Fizyka mówi, że tak, bo uzyskany wynik (wzór 1.278) to znajome prawo Stefana-Boltzmann³⁵. A z matematycznego punktu widzenia? Najprostszym wyjściem będzie zastąpienie nieskończonego rozwinięcia funkcji podcałkowej – skończonym

$$\left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{1-x} = \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 + x \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 + \dots x^{n-1} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 + \frac{x^n}{1-x} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3$$

i wykazanie, że wartość całki z ostatniego członu rozwinięcia zmierza do zera przy $n \rightarrow \infty$. To ostatnie jest proste. Mamy bowiem

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^3 \frac{x^n}{1-x} = \int_0^1 \left(\frac{x \ln^3 \frac{1}{x}}{1-x} \right) x^{n-1} dx < \int_0^1 M x^{n-1} dx = \frac{M}{n}.$$

³⁵Prawo to dostaniemy bez względu na obecność jedynki w mianowniku wzoru (1.271)!

(Wykorzystujemy fakt, że w przedziale $[0, 1]$ funkcja występująca (w nawiasach) w środkowej całce ma jedno maksimum (M), a w obu krańcach przedziału jej graniczne wartości to zera.) Nasze całkowanie wyraz po wyrazie jest uzasadnione, bo $M/n \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$.