

## Elektromagnetyzm i optyka IS, 3sem - zestaw 1

- Proszę podać definicje następujących operatorów różniczkowych: gradient, dywergencja, rotacja i laplasjan we współrzędnych kartezjańskich, wykorzystując operator Nabla -  $\nabla$ . Jaka jest ich fizyczna interpretacja? Następnie:
  - Obliczyć gradient funkcji  $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  i zinterpretuj otrzymany wynik.
  - Wykorzystując związek pomiędzy pochodną kierunkową a gradientem obliczyć wartość pochodnej funkcji  $f(x, y) = x^2 - xy$  w punkcie  $x_0 = (2, -3)$  wzdłuż wektora  $\vec{v} = 0.6\hat{i} + 0.8\hat{j}$ .
  - Oblicz dywergencję następujących funkcji wektorowych:  $\vec{r}, \hat{z}, z\hat{z}$ .
  - Obliczyć rotację następujących pól wektorowych:  $\mathbf{v}_a = -y\hat{x} + x\hat{y}$ .
- Rozkład prędkości prądu w rzece w funkcji odległości od środka rzeki dany jest wzorem  $v(x) = v_0 \left(1 - \frac{|x|}{L}\right)$ , gdzie  $L$  jest odległością od środka do brzegu rzeki. Scharakteryzuj to pole prędkości (określ, czy jest wirowe/bezwirowe, źródłowe/bezźródłowe).
- Obliczyć całki krzywoliniowe z funkcji  $\mathbf{v} = y^2\hat{x} + 2x(y+1)\hat{y}$  wzdłuż krzywych biegnących od punktu  $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$  do punktu  $\mathbf{b} = (2, 2, 0)$  w sposób przedstawiony na rysunku poniżej. Jaka jest wartość  $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$  dla zamkniętej drogi całkowania, która przebiega od  $\mathbf{a}$  do  $\mathbf{b}$  wzdłuż krzywej (1), a następnie od  $\mathbf{b}$  do  $\mathbf{a}$  wzdłuż krzywej (2).
- Obliczyć całkę powierzchniową z funkcji  $\mathbf{v} = 2xz\hat{x} + (x+2)\hat{y} + y(z^2-3)\hat{z}$  po powierzchni złożonej z pięciu ścianek sześciennego pudełka (bez dolnej podstawy) o boku 2. Przyjąć, że orientacja dodatnia jest wyznaczona przez wektor normalny skierowany na zewnątrz (zgodnie z rysunkiem).

