ELEKTROMAGNETYZM – cz.1

I. Ładunek i materia

W przyrodzie obserwujemy dwa rodzaje ładunków elektrycznych: dodatnie i ujemnie. Wielkość sił elektrycznych, zarówno przyciągających jak i odpychających opisuje prawo Coulomba, które mówi że:

Oddziaływanie między dwoma ładunkami jest wprost proporcjonalne do iloczynu wartości ładunku a odwrotnie proporcjonalne do kwadratu ich odległości

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (1)$$

gdzie stała proporcjonalności:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}0 \circ 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

zaś stała elektryczna ε_0 (zwana też przenikalnością elektryczną próżni) wynosi:

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \circ 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

Cała materia zbudowana jest z atomów, te zaś składają się z dodatnio naładowanego jądra (w skład którego wchodzą protony i neutrony) oraz chmury elektronowej. Protony to cząstki naładowane dodatnio, elektrony – ujemnie, zaś neutrony nie posiadają ładunku elektrycznego. Poniższa tabela zawiera masy i ładunki tych cząstek

Nazwa	Oznaczenie	Ładunek	Masa
Elektron	e^-	$-e$	$9{,}11 \circ 10^{-31}\,kg$
Proton	p	$+e$	$1{,}673 \circ 10^{-27}$ kg
Neutron	n	0	$1{,}675 \circ 10^{-27}$ kg

gdzie: ładunek elementarny: $e = 1.6 \circ 10^{-19}$ C

Zauważmy, iż elektron jest cząstką prawdziwie elementarną, zaś nukleony (protony i neutrony) złożone są z kwarków. Liczba neutronów w jądrze atomowym jest zawsze większa lub równa liczbie protonów.

II. Pole elektryczne

Natężenie pola

Oddziaływanie pomiędzy ładunkami opisać można na dwa sposoby:
1) Biorąc pod uwagę bezpośrednio oddziaływanie **ładunek – ładunek**, przy czym siła oddziaływania wyrażona jest prawem Coulomba (Równ. 1):

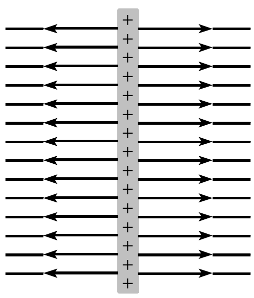
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

2) Używając koncepcji pola elektrycznego, które definiujemy w ten sposób, że każdemu punktowi przestrzeni **r** przypisujemy wektor natężenia pola elektrycznego **E**(**r**). Pole elektryczne oddziałuje na dowolny ładunek doń wprowadzony. W efekcie, oddziaływanie między ładunkami opisujemy zgodnie ze schematem: **ładunek – pole – ładunek**. Natężenie pola elektrycznego **E** definiujemy jako siłę wywieraną przez pole elektryczne na jednostkowy dodatni ładunek próbny (q_0). Natomiast siła działająca w polu elektrycznym na dowolny ładunek q wynosi:

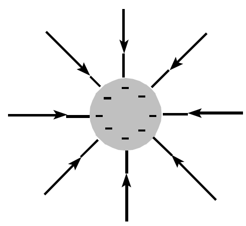
$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} \qquad (2)}$$

Linie sił

W celu wizualizacji rozkładu pola elektrycznego używa się linii sił pola. Linie sił pola rysowane są zgodnie z dwoma zasadami:
a) w dowolnym punkcie linia sił jest styczna do wektora natężenia pola elektrycznego **E**,
b) linie sił wykreśla się tak, aby liczba linii na jednostkę powierzchni przekroju poprzecznego była proporcjonalna do wartości pola E (czyli gdy linie są narysowane gęsto - E jest duże). Na poniższym rysunku pokazano przykładowe rozkłady pola elektrycznego, przy użyciu linii sił pola.

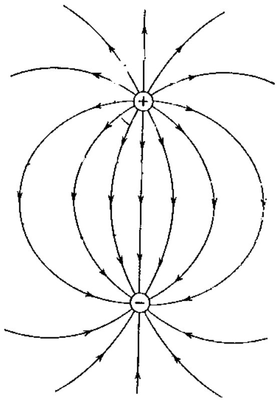


Rys.1. Jednorodne pole elektryczne, wytworzone przez nieskończoną płaszczyznę, naładowaną ze stałą gęstością ładunku.



Rys.2. Centralne pole elektryczne wytworzone przez jednorodnie naładowaną kulę.

Rys.1 przedstawia pole jednorodne, czyli takie, że wartość E w każdym punkcie jest stała. Natomiast Rys.2 przedstawia pole pochodzące od jednorodnie naładowanej kuli (w granicznym przypadku od ładunku punktowego); wraz z oddalaniem się od ładunku wartość E maleje. Natomiast poniższy rysunek przedstawia linie sił pola elektrycznego wytworzonego przez dwa jednakowe ładunki o przeciwnych znakach (dipol).

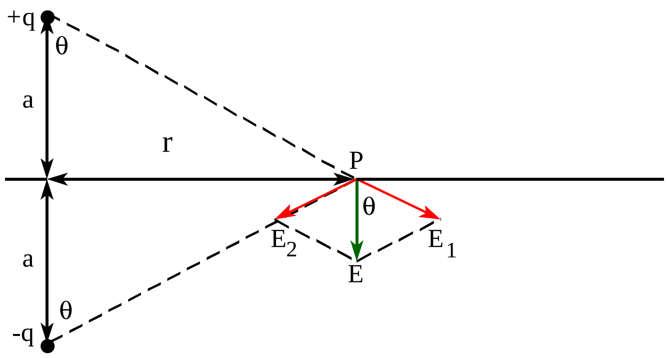


Rys.3. Linie sił pola elektrostatycznego wytworzonego przez dwa jednakowe ładunki o przeciwnych znakach (dipol).

Jeśli chcemy wyliczyć natężenie pola **E**, pochodzące od układu ładunków tym celu należy:
a) wyliczyć $\mathbf{E_i}$ w danym punkcie pochodzące od ładunku numer „i” (tak jakby to był jedyny obecny ładunek),
b) dodać wektorowo znalezione natężenia, pochodzące od wszystkich ładunków.
Inaczej mówiąc, stosujemy tu zasadę superpozycji.

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E_i} \tag{3}$$

Przykład 1: Pole elektryczne, pochodzące od dipola elektrycznego.



Chcemy wyliczyć natężenie pola **E** na osi symetrii dipola, np. w punkcie P. Wypadkowe pole **E** jest superpozycją natężeń $\mathbf{E_1}$ i $\mathbf{E_2}$**,** pochodzących od każdego z dwóch ładunków:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_1}$$

Zgodnie z prawem Coulomba:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2 + r^2},$$

natomiast natężenie pola wypadkowego: $E = 2E_1 \cos\theta$ gdzie: $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$.

Ostatecznie:

$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(a^2+r^2)}\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Zauważmy, że jeśli r>>a (czyli znajdujemy się znacznie dalej od dipola, niż wynosi jego rozmiar), to szukane natężenie wynosi:

$$E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{r^3}$$

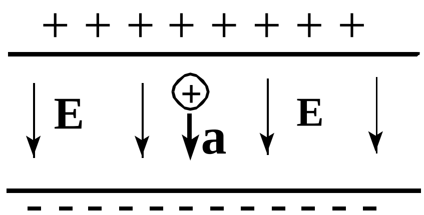
Definiując elektryczny moment dipolowy: p=2aq, możemy powyższy wynik zapisać:

$$\boxed{E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3} \qquad (4)}$$

Nadmieńmy, że wygodnie jest przedstawiać moment dipolowy jako wektor **p** skierowany od ładunku ujemnego do dodatniego, o długości p=2aq.

Przykład 2: Ładunek w polu elektrycznym

Załóżmy, że cząstka o ładunku q i masie m znajduje się w obszarze jednorodnego pola elektrycznego (np. pomiędzy okładkami kondensatora). Na naładowaną cząstkę działa siła: $\mathbf{F} = \mathbf{E}q$, która powoduje przyspieszenie: $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{E}q}{m}$



Rys.4 Jednorodne pole między okładkami kondensatora

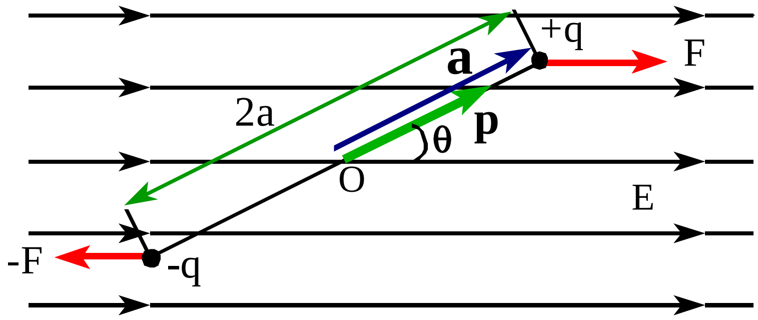
Jeśli cząstka na początku była nieruchoma, to uzyskana przez nią energia kinetyczna po przebyciu drogi *y* wynosi (stosujemy zasadę zachowania energii):

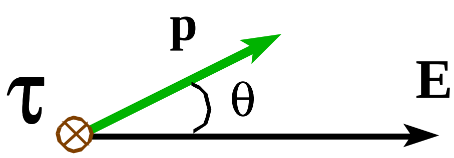
$E_k = Fy = qEy$ lub równoważnie: $\frac{1}{2}mv^2 = qEy$. A zatem prędkość cząstki, uzyskana po przebyciu w polu elektrycznym drogi y wynosi:

$$v = \sqrt{\frac{2qEy}{m}}$$

Przykład 3. Dipol w polu elektrycznym

Wyliczmy moment sił działających na dipol elektryczny w polu elektrycznym (Rys. 5).





Rys. 5. Dipol w jednorodnym polu elektrycznym

Wypadkowa siła działająca na dipol jest równa zero. Natomiast istnieje niezerowy moment obracający dipol wokół osi prostopadłej zarówno do wektora **E** jak i **p**, czyli do płaszczyzny powyższego rysunku. Wspomniany moment sił wynosi: $\tau = 2Fa\sin\theta$ czyli

$$\tau = 2aqE\sin\theta = pE\sin\theta$$

Wynik ten możemy zapisać ogólniej:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{5}$$

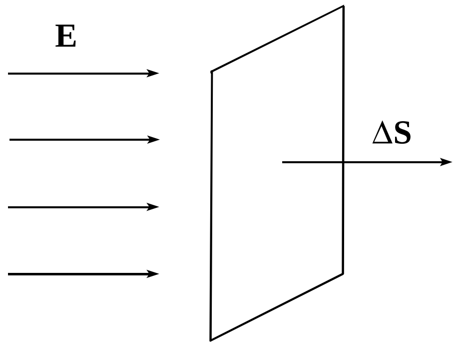
pamiętając, że wektor momentu dipolowego wnosi: **p**=2q**a**.

<u>III. Prawo Gaussa</u>

Zdefiniujmy strumień pola elektrycznego **E**, przechodzącego przez pomyślaną płaską powierzchnię Δ**S** (wektor Δ**S** jest prostopadły do powierzchni, zaś jego długość równa jest polu tej powierzchni), jako:

$$\Delta\Phi = \mathbf{E} \bullet \Delta\mathbf{S} \tag{6}$$

Jest on równy iloczynowi skalarnemu natężenia pola i wektora Δ**S**.



Rys. 6. Strumień pola elektrycznego **E**, przechodzący przez powierzchnię Δ**S**.

Jeśli rozpatrywana powierzchnia nie jest płaska, to musimy ją rozbić na bardzo małe elementy, z których każdy już jest w przybliżeniu płaski. Elementarny strumień $\Delta\Phi_i$ przechodzący przez kawałek powierzchni $\Delta\mathbf{S}_i$ wynosi:

$$\Delta\Phi_i = \mathbf{E} \bullet \Delta\mathbf{S}_\mathbf{i} \tag{7}$$

Całkowity strumień, przechodzący przez powierzchnię S otrzymamy przez zsumowanie strumieni elementarnych:

$$\mathbf{\Phi} = \sum_i \mathbf{E}_\mathbf{i} \bullet \Delta\mathbf{S}_\mathbf{i} \tag{8}$$

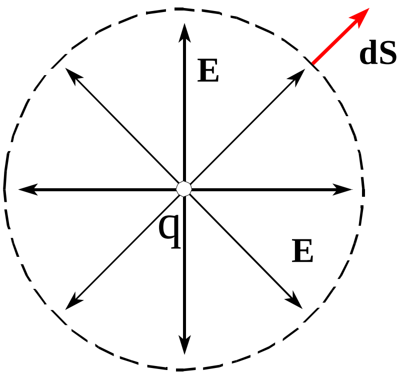
W granicznym przypadku, gdy rozbijemy powierzchnie na nieskończenie wiele elementów (każdy nieskończenie mały), całkowity strumień wyliczamy jako całkę z pola **E**, przechodzącego przez powierzchnię S:

$$\mathbf{\Phi} = \int \mathbf{E} \bullet \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{9}$$

*Przykład**:** Strumień pola od ładunku punktowego przechodzący przez kulę (ładunek znajduje się w środku kuli).*

Obliczmy strumień pola elektrycznego, który przepływa przez sferyczną powierzchnię otaczającą ładunek elektryczny q. Ponieważ pole od ładunku punktowego jest centralne, więc w każdym punkcie sfery wektor **E** jest do niej prostopadły i Rów. 9 przyjmie postać:

$$\mathbf{\Phi} = \int E(r)dS = E(r)\int dS = E(r)\cdot 4\pi r^2 \tag{10}$$



Rys. 7. Strumień pola elektrycznego od ładunku punktowego przechodzący przez powierzchnię sferyczną

Wartość natężenia pola elektrycznego na powierzchni sfery o promieniu r wynosi:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Podstawiając to natężenie do Równ. 10 otrzymujemy:

$$\mathbf{\Phi} = 4\pi E(r)r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}q$$

lub:

$\varepsilon_0 \Phi = q$	(11)

Wykazuje się, że powyższy rezultat jest prawdziwy w każdym przypadku, tzn. dla zamkniętej powierzchni o dowolnym kształcie i dla dowolnego rozkładu ładunku wewnątrz niej. Wyraża je prawo Gaussa.

Prawo Gaussa:
Określa ono związek między strumieniem polą elektrycznego Φ_E przechodzącym przez dowolną powierzchnię zamkniętą (powierzchnię Gaussa), a ładunkiem q zamkniętym wewnątrz niej:

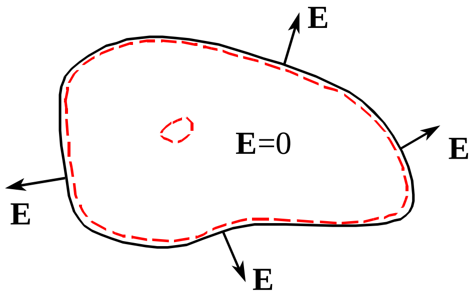
$$\varepsilon_0 \Phi_E = q \qquad \text{lub} \qquad \varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = q \qquad (12)$$

Symbol $\oint d\mathbf{S}$ w powyższym równaniu oznacza całkę po powierzchni zamkniętej.

<u>Zastosowania prawa Gaussa</u>

Przykład 1: Rozkład ładunku nadmiarowego w przewodniku izolowanym

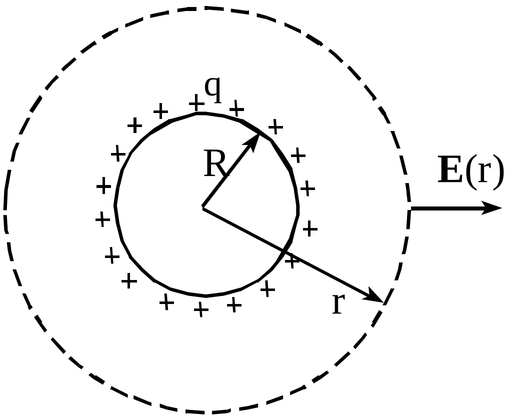
Nadmiarowy ładunek umieszczony na izolowanym przewodniku rozmieszcza się w całości na jego zewnętrznej powierzchni. Poniższy rysunek przedstawia przekrój przez izolowany metaliczny i lity przewodnik o dowolnym kształcie. Znajduje się na nim całkowity ładunek nadmiarowy q. Zauważmy, iż swobodne ładunki nadmiarowe (tego samego znaku), odpychając się wzajemnie rozmieszczą się maksymalnie daleko od siebie, czyli na powierzchni metali. Ponadto zauważmy, że wewnątrz przewodnika w każdym punkcie musi być **E**=0, gdyż w przeciwnym wypadku wystąpiłby ruch elektronów swobodnych, które zawsze są obecne w przewodniku, a rozpatrujemy przecież sytuację równowagi statycznej. Ponieważ wszędzie wewnątrz przewodnika **E**=0, więc strumień pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą wynosi zero, a zatem zgodnie z prawem Gaussa wewnątrz niej nie ma ładunków.
W stanie równowagi statycznej ładunek może być tylko na powierzchni przewodnika, zaś pole **E**≠0 na powierzchni może być tylko prostopadłe do powierzchni (w ten sposób ładunek nie przemieszcza się wzdłuż powierzchni).



Rys. 8. Ładunek i niezerowe pole elektryczne **E** występują tylko na powierzchni przewodnika. Wewnątrz przewodnika nie ma ładunków swobodnych i pole **E**=0. Linią przerywana zaznaczono powierzchnie Gaussa.

Przykład 2: Pole na zewnątrz naładowanej kuli

Rozważmy metalową kulę o promieniu R, na której znajduje się dodatni ładunek q. Wiemy już, że ładunek zgromadzi się tylko na jej powierzchni.



Rys.9. Obliczenie natężenia pola **E** w odległości od środka naładowanej kul.

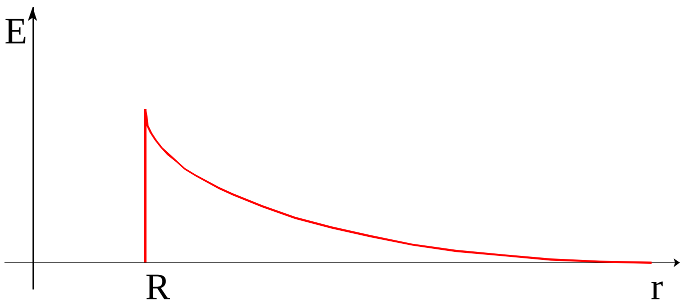
Szukamy natężenia pola E(r) w odległości r od środka naładowanej kuli. Przez sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu r przechodzi strumień: $4\pi r^2 E(r)$, a zatem zgodnie z prawem Gaussa:

$$\varepsilon_0 4\pi r^2 E(r) = q \qquad (13)$$

skąd znajdujemy:

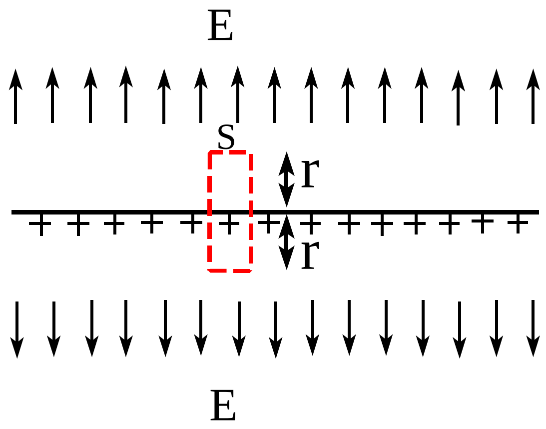
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (14)$$

Czyli pole na zewnątrz naładowanej kuli jest takie samo jak pole wytworzone przez ładunek punktowy q, umieszczony w geometrycznym środku kuli.
Z kolei kreśląc powierzchnię Gaussa wewnątrz naładowanej metalowej kuli, znajdziemy wszędzie E=0 (gdyż wewnątrz każdej takiej sfery zamknięty ładunek niej ładunek wynosi zero). Przebieg znalezionego pola elektrycznego pokazano na Rys. 10.



Rys.10. Wykres zależność natężenia pola od odległości od środka naładowanej kuli metalowej.

Przykład 3. Pole elektryczne wytworzone przez nieskończoną, naładowaną jednorodnie płaszczyznę



Rys. 11. Obliczenie pola elektrycznego od nieskończonej, jednorodnie naładowanej płaszczyzny

Jako powierzchnię Gaussa stosujemy teraz walec o polu powierzchni podstawy S i wysokości 2r, umieszczony prostopadle do płaszczyzny (Rys.11). Wewnątrz walca znajduje się powierzchnia S naładowanej płaszczyzny, na której jest ładunek: q=σS (σ jest gęstością powierzchniową ładunku). Pole **E** wytwarzane przez naładowaną płaszczyznę musi być do niej prostopadłe (ze względu na symetrię rozkładu ładunku). W efekcie strumień pola przechodzi tylko przez obie podstawy walca. Zgodnie z prawem Gaussa:

$$\varepsilon_0[E(r)S + E(r)S] = \sigma S \qquad \text{lub} \qquad 2\varepsilon_0 E(r) = \sigma$$

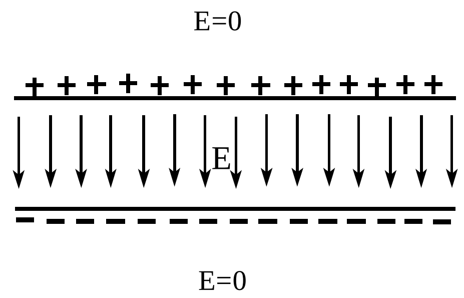
Ostatecznie znajdujemy:

$$E(r) = E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{15}$$

Pole elektryczne wytwarzane przez nieskończoną, naładowaną płaszczyznę jest do niej prostopadłe i ma stałą wartość w każdym punkcie przestrzeni.

Przykład 4. Pole elektryczne wewnątrz kondensatora płaskiego

Płaski kondensator składa się z dwóch metalicznych okładek, umieszczonych blisko siebie. Okładki te naładowane są przeciwnym ładunkiem, o stałej gęstości. Z dobrym przybliżeniem, pole elektryczne wytwarzane przez kondensator możemy obliczyć, jako pochodzące od dwóch jednorodnie naładowanych, nieskończonych płaszczyzn. Wynik taki będzie słuszny z dala od brzegów kondensatora.



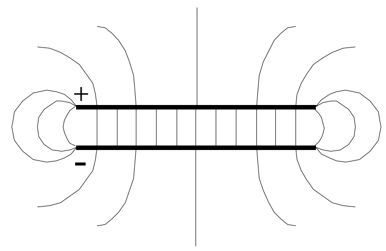
Rys. 12. Pole elektryczne w idealnym (nieskończonym) kondensatorze

Zauważmy, że pole wytwarzane przez dwie naładowane okładki jest sumą pól wytwarzanych prze każdą a nich oddzielnie (zasad superpozycji). A zatem natężenie pola elektrycznego pomiędzy okładkami będzie dwa razy większe niż natężenie wytwarzane przez jedną naładowaną płaszczyznę. Natomiast poza okładkami – natężenia wytwarzane prze obie okładki zniosą się. Tak więc, natężenie pola między okładkami jest prostopadłe do powierzchni okładek i skierowane od ładunków dodatnich do ujemnych i wynosi:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{16}$$

zaś poza okładkami: E=0.

Dla porównania poniżej pokazano przebieg linii pola w rzeczywistym (a zatem skończonym) kondensatorze:



Rys. 12a. Linie pola elektrycznego w kondensatorze rzeczywistym (o skończonych rozmiarach).

IV. Potencjał elektryczny

Pole elektryczne można opisywać nie tylko za pomocą wektora natężenia pola elektrycznego **E**, lecz także za pomocą potencjału V. Jak zobaczymy, wielkości te są ściśle ze sobą powiązane.
Potencjał V_A pola elektrycznego punkcie A definiujemy identycznie jak w przypadku pola grawitacyjnego:

$$V_A = \frac{-W_{\infty A}}{q_0} \tag{17}$$

gdzie $W_{\infty A}$ jest pracą, którą wykonują siły pola elektrycznego przesuwając ładunek jednostkowy od nieskończoności do tego punktu.

Zauważmy, iż w definicji tej zawarliśmy konwencję, że potencjał w nieskończoności wynosi zero:

$$V(\infty) = 0 \qquad (18)$$

Zapiszmy ponownie definicję potencjału prościej, opuszczając indeksy *A i* ∞:

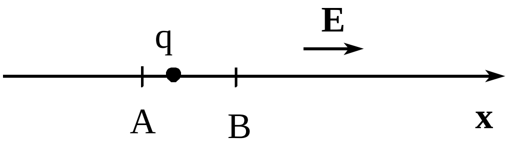
$$\boxed{V = \frac{-W}{q_0} \qquad (19)}$$

czyli:

Potencjał elektryczny w danym punkcie jest pracą (ze znakiem minus), jaką wykonuje <u>pole</u> przenosząc ładunek jednostkowy z nieskończoności do danego punktu.

Rozważmy teraz stałe pole elektryczne **E** (skierowane wzdłuż osi **x**), które przemieszcza dowolny ładunek q od punktu A do B, wzdłuż osi **x**. Wykonuje ono pracę:

$$W_{AB} = F\, x_{AB} = Eq\; x_{AB} \qquad (20)$$



Wykonana przez pole elektryczne praca W_{AB} wiąże się różnicą potencjałów $\Delta V = V_B - V_A$, zgodnie z relacją:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{W_{AB}}{q} \qquad (21)$$

Czyli: różnica potencjałów między dwoma punktami równa jest wziętej z przeciwnym znakiem pracy wykonanej przez siłę elektrostatyczną przy przemieszczeniu jednostkowego ładunku od pierwszego punktu do drugiego.

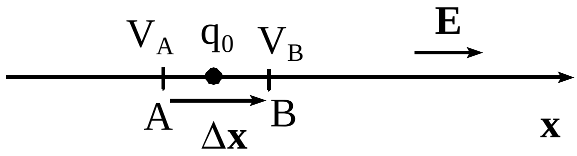
<u>Wyliczenie potencjału V znając rozkład natężenia pola elektrycznego **E**</u>

Rozważmy ponownie przemieszczenie jednostkowego dodatniego ładunku próbnego q_0 od punktu A do B (przemieszczenie $\Delta\mathbf{x}$) przez stałe pole **E** *skierowane wzdłuż osi x*. Praca wykonana przez pole elektryczne:

$$W_{AB} = F\,\Delta x = q_0\, E\;\Delta x \qquad (22)$$

W ogólniejszym przypadku, gdy pole **E** nie jest równoległe do przemieszczenia, pracę tą wyrazimy:

$$W_{AB} = \mathbf{F} \bullet \Delta\mathbf{x} = q_0\mathbf{E} \bullet \Delta\mathbf{x} \qquad (23)$$



Zgodnie z Równ. 21:

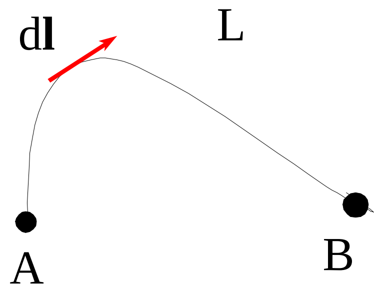
$$V_B - V_A = -\frac{W_{AB}}{q_o} \tag{24}$$

Podstawiając do powyższego związku pracę W_{AB} z Równ.23, otrzymamy:

$$\boxed{V_B - V_A = -\mathbf{E} \bullet \Delta\mathbf{x}} \tag{25}$$

czyli różnica potencjału (pomiędzy punktem końcowym i początkowym) równa się wziętemu z przeciwnym znakiem iloczynowi skalarnemu wektorów przemieszczenia i natężenia pola elektrycznego.

Rozważmy teraz przypadek bardziej ogólny, mianowicie, gdy pole jest niejednorodne i ładunek porusza się po zakrzywionym torze L:



Zgodnie z Równ.23, elementarna praca dW wykonana przez pole przy przesunięciu ładunku na drodze d**l** wynosi:

$$dW = q_0 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} \tag{26}$$

Natomiast całkowita praca pola przy przesunięciu ładunku po torze L między punktami A i B wynosi:

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} \tag{27}$$

(całka $\int_A^B d\mathbf{l}$ oznacza całkę po trajektorii od punktu A do punktu B). Zauważmy, że w polu zachowawczym (pole elektryczne, grawitacyjne) praca wykonana przez pole zależy tylko od położenia punktu początkowego i końcowego, nie zależy natomiast od drogi, po której nastąpiło przemieszczenie. Podstawiając Równ. 24, znajdujemy różnicę potencjałów między punktami A i B

$$V_B - V_A = -\frac{W_{AB}}{q_0} = -\int_A^B \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} \tag{28}$$

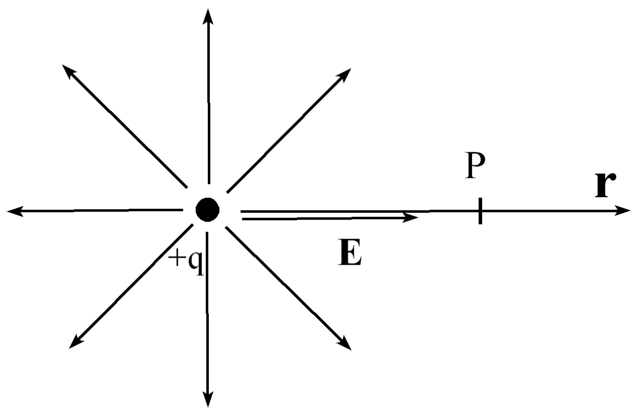
Jeśli założymy teraz, że ładunek q_0 został przemieszczony z punktu początkowego A o potencjale zerowym, który zgodnie z konwencją jest w nieskończoności (A=∞ oraz $V_\infty=0$), to otrzymamy:

$$V_B = -\int_{\infty}^{B} \mathbf{E} \bullet \mathbf{dl} \qquad (29)$$

Podsumujmy ten wynik: potencjał pola elektrycznego w danym punkcie jest równy (minus) całce krzywoliniowej (wzdłuż toru cząstki) z **E· dl** od nieskończoności do tego punktu. Albo inaczej: potencjał w danym punkcie równy jest pracy (ze znakiem przeciwnym) wykonanej przez pole przy przesunięciu dodatniego ładunku jednostkowego z nieskończoności do tego punktu.

<u>Przykład:</u> potencjał od ładunku punktowego

Pole elektryczne wytwarzane przez ładunek punktowy ma charakter centralny.



Rys.13. Pole pochodzące od ładunku punktowego

Wyliczmy potencjał tego pola w dowolnym punkcie P (por. Równ. 29). Dla uproszczenia załóżmy, że ładunek przemieszczany jest od nieskończoności do punktu P (o współrzędnej r_P) równolegle do osi **r** :

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{P}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{P}^{\infty} E(r)\mathrm{d}r \qquad (30)$$

przy czym mogliśmy opuścić iloczyn skalarny, gdyż **E** || **r**. Podstawiając do tego równania, natężenie pola elektrycznego:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

otrzymujemy:

$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{P}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_P}^{\infty} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_P} \qquad (31)$$

Opuszczając wskaźnik P, uzyskujemy ogólny wynik na wartość potencjału pola elektrycznego w odległości r od ładunku punktowego q:

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} \qquad (32)$$

Zauważmy, że q posiada znak; dla ładunku ujemnego V(r) < 0.
W sytuacji, jeśli pole elektryczne wytwarzane jest przez układ ładunków punktowych to, zgodnie z zasadą superpozycji:

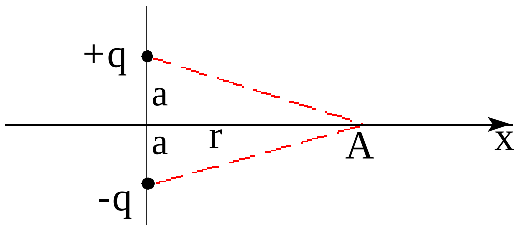
$$V = \sum_n V_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{q_n}{r_n} \qquad (33)$$

gdzie r_n jest odległością od do ładunku q_n do punktu, w którym wyliczamy potencjał.
Jeśli natomiast ładunki wytwarzające pole rozłożone są w sposób ciągły, to potencjał wyliczamy jako:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \qquad (34)$$

gdzie *r* jest odległością od ładunku elementarnego *dq* do rozważanego punktu, w którym wyliczamy potencjał.

Przykład : potencjał od dipola



Wyliczymy potencjał wytwarzany przez dipol elektryczny. Szukamy V(r), gdzie r jest odległością od dipola, mierzoną na jego osi symetrii (**x**). Zgodnie z zasadą superpozycji, potencjał V(r) w punkcie A, jest sumą potencjałów V_1 i V_2 wytwarzanych przez ładunki +q i –q:

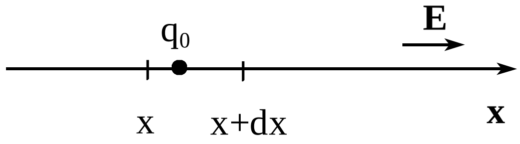
$$V(r) = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2}} - \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2}}\right) = 0 \qquad (35)$$

Wynik ten zgadza się z wcześniejszym przykładem dla dipola. Uzyskaliśmy wtedy wynik, że **E** liczone na osi x jest w każdym punkcie do niej prostopadłe, a zatem zgodnie z Równ.29:

$$V(r) = -\int_\infty^r \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = 0.$$

Wyliczenie pola **E** znając potencjał V

Załóżmy ponownie, że natężenie pola elektrycznego **E** jest skierowane wzdłuż osi x



Jednostkowy ładunek dodatni próbny q_0 przemieszczany jest przez pole **E** od punktu x do x+dx, wskutek różnicy potencjałówe ($V_x > V_{x+dx}$):

$$V_{x+dx} - V_x = -\frac{W_{x,x+dx}}{q_0} = -\frac{q_0 E dx}{q_0} = -Edx \qquad (36)$$

Przyrost potencjału na odcinku dx wynosi:

$$dV = V_{x+dx} - V_x$$

Równ.36 możemy zatem zapisać:

$$dV = -Edx \qquad (37)$$

Czyli wartość natężenia pola elektrycznego E wzdłuż osi x wynosi:

$$E = -\frac{dV}{dx} \qquad (38)$$

Zauważmy, iż powyższy wynik obowiązuje w szczególnym przypadku, gdy: **E** || **x** lub też w przypadku ogólnym, gdy wyliczamy składową E_x pola elektrycznego:

$$\boxed{E_x = -\frac{dV}{dx} \qquad (39)}$$

Jeśli mamy dowolny rozkład pola **E** (np. w przestrzeni), to analogicznie do wyniku na E_x otrzymujemy wyniki na E_y i E_z:

$$E_y = -\frac{dV}{dy} \qquad\qquad E_z = -\frac{dV}{dz} \qquad (40)$$

Dowolne pole **E** odtwarzamy z jego składowych:

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}E_x + \mathbf{y}E_y + \mathbf{z}E_z \qquad (41)$$

A zatem znając potencjał pola elektrycznego V(x,y,z), jego natężenie wyliczymy następująco:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{z}\right) \qquad (42)}$$

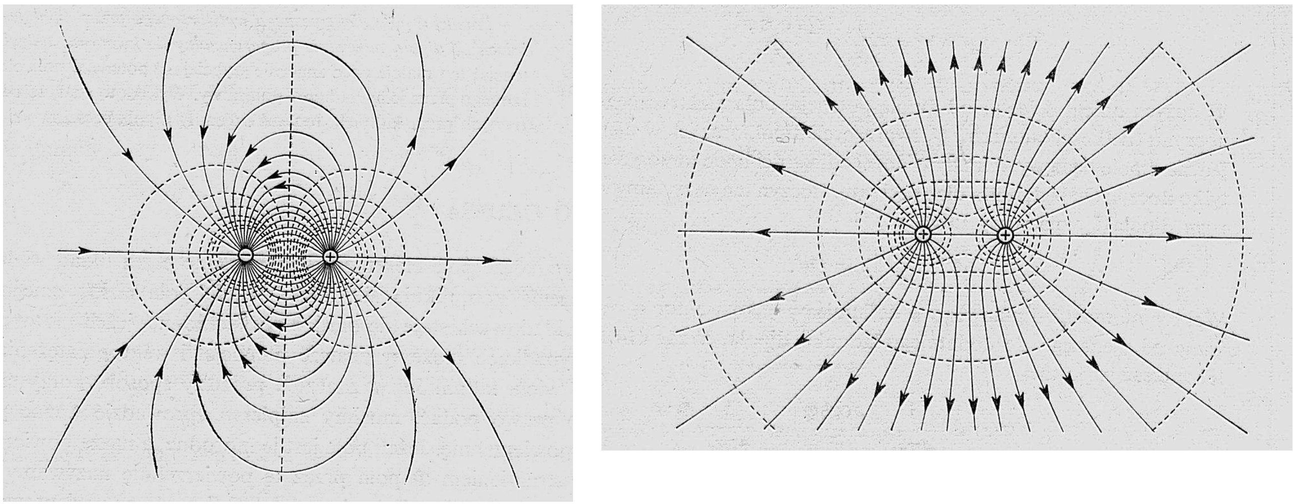
W powyższym równaniu użyliśmy pochodnych cząstkowych zamiast zwykłych, gdyż w ogólnym przypadku potencjał jest funkcją trzech współrzędnych: V=V(x,y,z). Równanie powyższe możemy zapisać prościej jako:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, V \tag{43}$$

gdzie operator gradientu (znany z matematyki), który funkcji skalarnej przyporządkowuje wektor, definiujemy jako:

$$\mathbf{grad}\ f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{z} \tag{44}$$

Wykazuje się, że gradient **grad**V (a zatem i wektor natężenia pola elektrycznego **E**) jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej (powierzchnia stałego potencjału). Widać to na poniższym rysunku, na którym pokazano jednocześnie linie sił oraz linie stałego potencjału.



Rys.14. Pole pochodzące od dwóch ładunków punktowych

V. Kondensatory i dielektryki

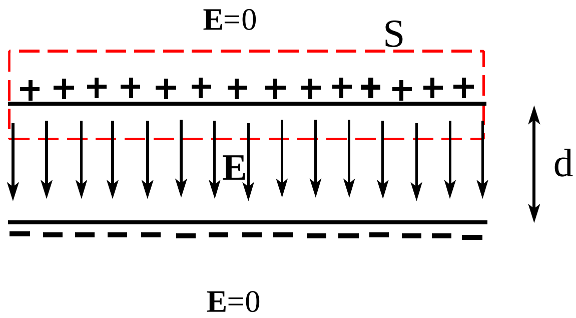
Pojemność elektryczna

Pojemność elektryczną kondensatora definiujemy jako iloraz ładunku na jednej z okładek do różnicy potencjałów U=ΔV między okładkami:

$$C = \frac{q}{U} \tag{45}$$

Przykład 1: Pojemność elektryczna kondensatora płaskiego

Kondensator posiada dwie okładki, o polu powierzchni S, naładowane przeciwnym ładunkiem ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ.



Rys. 15. Obliczenie pojemności elektrycznej kondensatora płaskiego przy użyciu prawa Gaussa.

Stosując prawo Gaussa wyliczymy pojemność takiego kondensatora. Jako powierzchnię Gaussa weźmy prostopadłościan, o powierzchni poziomej podstawy równej S. Strumień wektora **E** przechodzący przez ściany pionowe prostopadłościanu wynosi zero, gdyż wektor **E** jest do nich równoległy (czyli ich nie przecina). Także przez górną podstawę poziomą nie przechodzi strumień pola elektrycznego, gdyż na zewnątrz kondensatora **E**=0. Strumień elektryczny przechodzi natomiast przez dolną poziomą podstawę powierzchni Gaussa i wynosi:

$$\Phi_E = ES \tag{46}$$

Jako napięcie elektryczne U, weźmiemy w przypadku kondensatora płaskiego różnicę potencjałów między jego okładkami. Zgodnie z Równ.25, jeśli przemieścimy się o *d* zgodnie z kierunkiem stałego pola **E**, to napięcie elektryczne wyniesie:

$$U = V_A - V_B = Ed \tag{47}$$

Podstawiając Równ.48 do prawa Gaussa ($\varepsilon_0 \Phi_E = q$), otrzymamy:

$$\varepsilon_0 \Phi_E = \varepsilon_0 ES = q \tag{48}$$

Podstawiając obie powyższe relacje do definicji pojemności elektrycznej (C=q/U), otrzymujemy wzór na pojemność kondensatora płaskiego:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}} \tag{49}$$

Widzimy, że pojemność elektryczna kondensatora płaskiego jest proporcjonalna do powierzchni jego okładek, a odwrotnie proporcjonalna do odległości między okładkami.

Przykład 2: Pojemność elektryczna odosobnionej kuli metalowej

Jak widzieliśmy poprzednio, pole elektryczne od ładunku punktowego jest takie samo, jak od jednorodnie naładowanej kuli. Jest to słuszne dla odległości r≥R, gdzie r jest liczone od środka kuli, zaś R jest jej promieniem. A zatem potencjał na powierzchni naładowanej kuli, na której znajduje się ładunek q, wynosi:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \qquad (50)$$

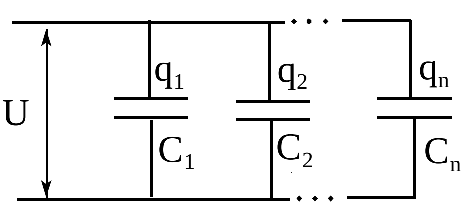
Jako „drugą okładkę” przyjmiemy tutaj nieskończoność (bo ładując kulę, np., dodatnio, przenosimy ładunki ujemne od niej do nieskończoności). A zatem: $U = V - V_\infty = V$. Zgodnie z definicją pojemności elektrycznej (Równ. 45), dla naładowanej kuli znajdujemy:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (51)$$

Łączenie kondensatorów

W praktyce elektrotechnicznej czy elektronicznej często zdarza się, że nie dysponujemy akurat kondensatorem o takiej pojemności, jaka jest nam potrzebna, posiadamy natomiast kondensatory o innych pojemnościach. Sposobem na uzyskanie żądanej pojemności jest łącznie kondensatorów. Wyróżniamy dwa podstawowe sposoby łączenia kondensatorów: równoległe i szeregowe.

a) Łączenie równoległe



Rys.16. Równoległe połączenie kondensatorów

Na kolejnych kondensatorach o pojemnościach C_1, C_2, …., C_n, zgromadzone są ładunki q_1, q_2, …, q_n, natomiast napięcie na każdym z nich jest takie samo i wynosi U.
Zgodnie z definicją pojemności:

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U, \quad q_n = C_n U$$

Zauważmy, że na zespole połączonych w ten sposób kondensatorów jest zgromadzony sumaryczny ładunek:

$$q = q_1 + q_2 + ... q_n$$

gdyż w istocie wszystkie górne okładki tworzą jedną okładkę „wypadkowego” kondensatora i podobnie dolne. A zatem pojemność zespołu kondensatorów:

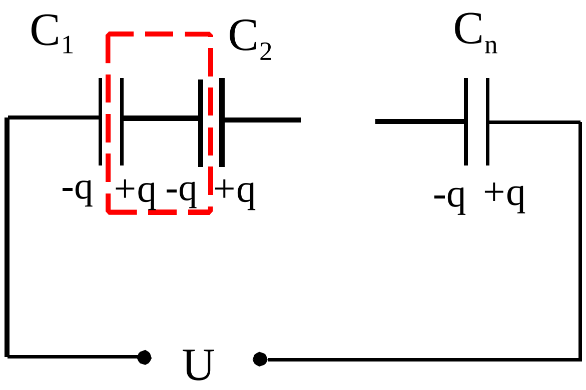
$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2 + ... + q_n}{U} = \frac{C_1 U + C_2 U + ... + C_n U}{U}$$

czyli:

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + ... + C_n \qquad (52)}$$

Wypadkowa pojemność dla połączenia równoległego kondensatorów jest zawsze **większa** od każdej z pojemności w układzie.

b) Łączenie szeregowe



Rys.17. Szeregowe połączenie kondensatorów

Przy tym połączeniu wartość bezwzględna ładunku q na każdej okładce musi być taka sama, gdyż ładunki +q i –q na sąsiadujących okładkach (znajdujących się w zaznaczonym konturze) powstały przez ich rozdzielenie. Dlatego wypadkowy ładunek na części obwodu objętej przerywanym konturem musi być równy zero. Odnosi się to do wszystkich kolejnych kondensatorów, a zatem wypadkowy ładunek układu wynosi:

$$q_{wyp} = q$$

Natomiast różnice potencjałów (napięcia) na poszczególnych kondensatorach:

$$U_1 = \frac{q}{C_1}; U_2 = \frac{q}{C_2}; \ldots U_n = \frac{q}{C_n}$$

sumują się dając napięcie elektryczne przyłożone do całego układu:

$$U = U_1 + U_2 + \ldots U_n$$

W efekcie wypadkowa pojemność układu wynosi:

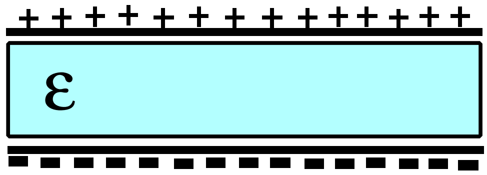
$$C = \frac{q_{wyp}}{U} = \frac{q}{U_1 + U_2 + \ldots + U_n} = \frac{q}{\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \ldots \frac{q}{C_n}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots \frac{1}{C_n}}$$

czyli:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots \frac{1}{C_n} \qquad (53)}$$

Zauważmy, że równoważna pojemność dla szeregowego połączenia kondensatorów jest zawsze **mniejsza** od najmniejszej pojemności w układzie.

Kondensator z dielektrykiem



Rys.18. Kondensator płaski z dielektrykiem

Doświadczalnie stwierdza się, że pojemność elektryczna kondensatorów zwiększa się, gdy pomiędzy ich okładki wprowadzimy płytkę tzw. dielektryka. Są to izolatory, których cząsteczki stają się w polu elektrycznym dipolami elektrycznymi. Stwierdza się, że różnica potencjałów, U, pomiędzy okładkami odizolowanego kondensatora maleje ε razy, jeśli wprowadzi się dielektryk:

$$U_d = \frac{U_0}{\varepsilon} \tag{54}$$

ε jest względną przenikalnością elektryczną danego materiału.

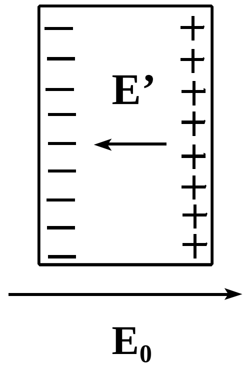
Przy niezmienionym ładunku na okładkach, pojemność elektryczna:

$$C = \frac{q}{U_d} = \frac{\varepsilon q}{U_0} = \varepsilon C_0 \tag{55}$$

wzrośnie ε razy.
W rezultacie, pojemność elektryczna kondensatora płaskiego z dielektrykiem wynosi:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}} \tag{56}$$

Co się dzieje w dielektryku ?



*Rys.19. Polaryzacja dielektryka wytwarza dodatkowe pole elektryczne **E’***

Jeśli umieścimy płytkę dielektryczną w jednorodnym polu elektrycznym(np. między okładkami kondensatora płaskiego) to w wyniku powstania i uporządkowania dipoli elektrycznych następuje w efekcie niewielkie rozsunięcie dodatniego i ujemnego ładunku płytki dielektryka. Chociaż płytka jako całość jest obojętna, staje się ona częściowo spolaryzowana i wewnątrz niej wytwarza się pole elektryczne **E’** przeciwnie skierowane do pola $\mathbf{E_0}$, jakie wytwarza kondensator bez dielektryka. W efekcie wypadkowe pole w kondensatorze z dielektrykiem wynosi:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0} + \mathbf{E'} \tag{57}$$

przy czym wartość bezwzględna pola wypadkowego:

$$E = E_0 - E' \tag{58}$$

oraz oczywiście $E < E_0$ (pole wypadkowe zmalało wskutek wprowadzenia dielektryka). Dla płaskiego kondensatora: U = Ed, mamy następującą zależność:

$$\frac{E_0}{E} = \frac{U_0}{U_d} = \varepsilon \tag{59}$$

a zatem $U_d < U_0$. Zredukowanie napięcia między okładkami powoduje wzrost pojemności (Równ.55):

$$C = \frac{q}{U_d} = \frac{\varepsilon q}{U_0} = \varepsilon C_0$$

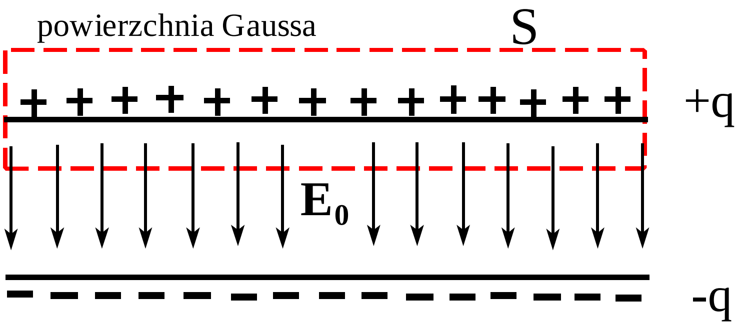
W tabeli podano przykładowe stałe dielektryczne.

Przykładowe względne przenikalności elektryczne	
	ε
Próżnia	1,00000
Powietrze	1,00054
Woda	78
Szkło pyreksowe	4,5
Porcelana	6.5
Dwutlenek tytanu	100
Ceramika tytanowa	130
Tytanian strontu	310

Prawo Gaussa w obecności dielektryka

Rozważmy najpierw kondensator bez dielektryka. Wprowadzamy powierzchnię Gaussa obejmującą okładkę z ładunkiem dodatnim. Zgodnie z prawem Gaussa:

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E_0} \bullet d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E_0 S = q \tag{60}$$

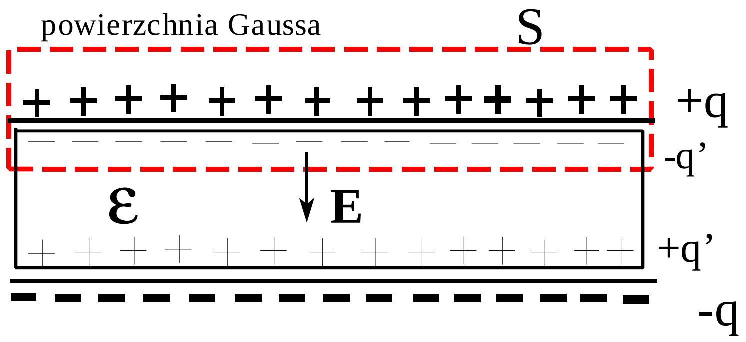


Rys. 20. Kondensator bez dielektryka

Natężenie pola elektrycznego bez dielektryka wynosi zatem:

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \tag{61}$$

A teraz rozważmy ten sam kondensator, ale z dielektrykiem. Wypadkowe pole elektryczne wynosi **E**, zaś na dolnej i górnej powierzchni dielektryka wyidukowały się ładunki –q' i +q'.



Rys. 21. Kondensator z dielektrykiem

Napiszmy prawo Gaussa dla tej samej powierzchni zamkniętej:

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = \varepsilon_0 ES = q - q' \tag{62}$$

Czyli wartość natężenia pola elektrycznego wynosi:

$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 S} \tag{63}$$

Wiemy z drugiej strony, że natężenie pola maleje o czynnik ε w obecności dielektryka:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} \tag{64}$$

Porównując dwa ostatnie równania, otrzymujemy:

$$q - q' = \frac{q}{\varepsilon} \tag{65}$$

Podstawiając ten wynik do Równ.62 otrzymujemy:

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon} \qquad \text{czyli} \qquad \oint \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = q \tag{66}$$

Definiując wektor indukcji elektrycznej:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \tag{67}$$

otrzymujemy prawo Gaussa słuszne w ogólnym przypadku, gdy pole elektryczne wytwarzane jest w konkretnym ośrodku (a nie tylko w próżni):

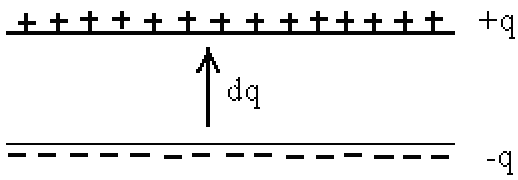
$$\oint \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = q \tag{68}$$

Wektor indukcji elektrycznej **D** ma taką własność, że nie zmienia się przy przejściu od próżni do dielektryka. Jego wartość zależy tylko od ładunków swobodnych (q), np. zgromadzonych na okładkach kondensatora, a nie zależy od ładunków indukowanych w dielektryku (q'). Tej zalety nie ma wektor natężenia pola elektrycznego **E**, gdyż jak widzieliśmy, gdy wchodzi ono do dielektryka jego wartość maleje ($E=E_0/\varepsilon$). Natomiast $D=\varepsilon_0\varepsilon E= \varepsilon_0 E_0$ reprezentuje wyłącznie wartość pola elektrycznego w próżni (w dobrym przybliżeniu również w powietrzu) i pochodzącego tylko od ładunków swobodnych q.

Energia pola elektrycznego

Rozważmy pracę ładowania kondensatora. Elementarna praca, jaką trzeba wykonać, aby przenieść ładunek dq z jednej okładki na drugą wynosi (w danej chwili na okładkach jest już ładunek q, a między okładkami różnica potencjałów $\Delta V=U$):

$$dW = Udq = \frac{q}{C}dq$$



Całkowita praca naładowania kondensatora do ładunku Q wyniesie:

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2C}Q^2$$

Praca ta jest równa energii, E_{pe}, powstałego w kondensatorze pola elektrycznego (inaczej mówiąc też jest to praca rozdzielenia ładunków):

$$E_{pe} = W = \frac{Q^2}{2C} \qquad (69)$$

lub też równoważnie:

$$E_{pe} = \frac{U^2C^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 \qquad (70)$$

Wygodną charakterystyką pola elektrycznego jest jego gęstość energii, *u*, czyli energia przypadająca na jednostkową objętość. W przypadku kondensatora płaskiego, objętość między okładkami v=Sd i gęstość energii pola elektrycznego wyniesie:

$$u = \frac{E_{pe}}{v} = \frac{E_{pe}}{Sd} = \frac{\frac{1}{2}CU^2}{Sd}$$

Podstawiając do powyższego równania pojemność kondensatora płaskiego :

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

otrzymamy :

$$u = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{Sdd} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}E^2$$

gdzie podstawiliśmy: U = d E (gdzie E oznacza natężenie pola elektrycznego). Ostatecznie :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 \qquad (71)$$

Używając wektora indukcji elektrycznej ($\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$), gęstość energii możemy też zapisać jako:

$$u = \frac{1}{2}ED \qquad (72)$$

lub jeszcze ogólniej:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\mathbf{E} \bullet \mathbf{D} \qquad (74)}$$

Podsumujmy: jeżeli w jakimś punkcie przestrzeni istnieje pole elektryczne, to zmagazynowana jest w nim energia o gęstości podanej w powyższym równaniu.