

ELEKTROMAGNETYZM – cz.2

VI. Natężenie i opór prądu elektrycznego

Do tej pory rozpatrywaliśmy ładunki elektryczne w spoczynku (czyli elektrostatykę). Chwila zastanowienia nad funkcjonującymi wokół nas urządzeniami, doprowadza nas do wniosku, że otaczają nas ładunki w ruchu, czyli prądy elektryczne. Płyną one najczęściej w przewodnikach metalowych (w kablach, drutach, itp.).

Zacznijmy od prądu stałego. Jego natężenie definiujemy jako ładunek przenoszony w czasie t przez przekrój poprzeczny przewodnika:

$$i = \frac{q}{t} \quad (75)$$

Jeśli mamy do czynienia z prądem zmiennym to jego natężenie definiujemy jako:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (76)$$

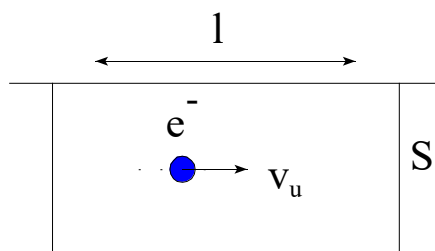
Praktyczną miarą prądu elektrycznego jest jego gęstość:

$$j = \frac{i}{S} \quad (77)$$

gdzie S jest przekrojem poprzecznym przewodnika.

W zdecydowanej większości przypadków za otaczające nas prądy odpowiedzialny jest ruch elektronów. Niemniej, przetrwała do dziś konwencja, ustanawiająca zwrot prądu, tak jakby był on wywołany przez ładunki dodatnie. Dlatego też, gdy na jakimś schemacie mamy zaznaczony zwrot płynięcia prądu np. w prawo, to odpowiada to w rzeczywistości ruchowi elektronów w lewo.

Wyraźmy teraz natężenie prądu przez wielkości mikroskopowe.



Rys.21. Schemat przepływu ładunku w przewodniku

Na powyższym rysunku wyodrębniliśmy kawałek przewodnika o długości l (jego przekrój wynosi S). Przez przewodnik poruszają się w prawo elektrony, (co odpowiada, zgodnie z konwencją prądowi elektrycznemu skierowanemu w lewo); dla pogłębności na rysunku zaznaczono tylko jeden elektron.

W zaznaczonym kawałku przewodnika w danej chwili znajduje się całkowity ładunek

swobodny (tzn. mogący się przemieszczać):

$$q = (nSl)e \quad (78)$$

gdzie: n jest koncentracją elektronów (tzn. ich ilością w jednostce objętości) oraz e – ładunkiem elementarnym. Ładunek ten przepływa przez koniec drutu w czasie $t = \frac{l}{v_u}$ (gdzie

v_u jest prędkością unoszenia nośników ładunku w przewodniku), zatem natężenie prądu:

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nSle}{\frac{l}{v_u}} = nSev_u \quad (79)$$

Bardziej obiektywną charakterystyką przepływającego prądu elektrycznego jest gęstość:

$j = \frac{i}{S} = nev_u \quad (80)$

□□

Opór elektryczny

Opór (oporność) elektryczny wyraża się wzorem :

$R = \frac{U}{i} \quad (81)$

Jednostką oporności jest om (Ω):

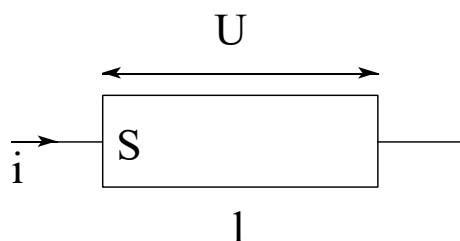
$$1\Omega = \frac{V}{A} \quad (\text{om=wolt/amper}) \quad (82)$$

Opór właściwy

Opór właściwy charakteryzuje sam materiał, nie zależy od kształtu i rozmiarów próbki wykonanej z tego materiału. Definiujemy go następująco:

$$\rho = \frac{E}{j} \quad (83)$$

Wyprowadźmy związek między oporem a oporem właściwym. Rozważmy przewodnik o oporze R , długości l i przekroju S , do którego przyłożona jest różnica potencjałów V .



Wewnątrz przewodnika, na którym jest napięcie U , istnieje pole elektryczne E :

$$E = \frac{U}{l}$$

Gęstość prądu elektrycznego:

$$j = \frac{i}{S}$$

Zgodnie z definicją oporności właściwej (Równ.83):

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{US}{il} = \frac{RS}{l}$$

A zatem związek między oporem a opornością właściwą jest następujący:

$R = \frac{\rho l}{S} \tag{84}$

Zmiana oporu właściwego z temperaturą

Opór właściwy zależy od temperatury. Stwierdzono doświadczalnie, że zależność tą (w rozsądnie ograniczonym zakresie temperatur) można wyrazić za pomocą równania:

$$\rho = \rho_0 [1 + \bar{\alpha}(T - T_0)] \tag{85}$$

gdzie $\bar{\alpha}$ jest średnim współczynnikiem temperaturowym oporu właściwego, zaś ρ_0 jest opornością właściwą w temperaturze T_0 . Zgodnie z powyższym, współczynnik temperaturowy oporu właściwego zdefiniowany jest jako:

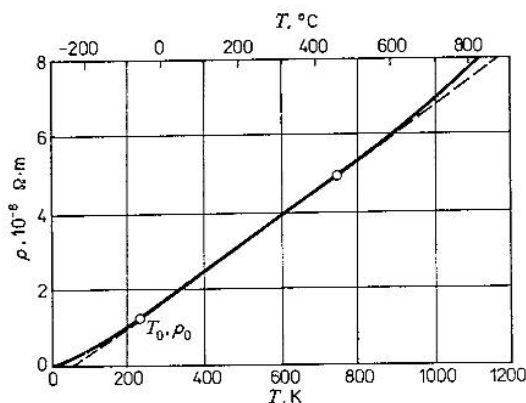
$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho - \rho_0}{T - T_0} \tag{86}$$

Równ.85 można przekształcić do następującej, łatwej do zapamiętania postaci:

$$\Delta\rho = \rho_0 \bar{\alpha} \Delta T \tag{87}$$

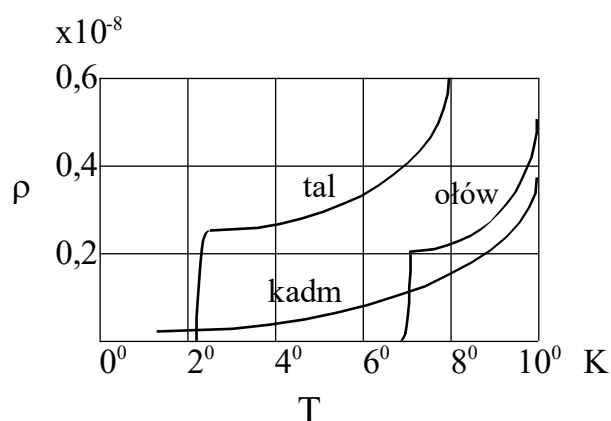
w której: $\Delta T = T - T_0$ oraz $\Delta\rho = \rho - \rho_0$.

Z Równ. 85 wynika, że oporność rośnie liniowo z temperaturą. Jest to w dobrym przybliżeniu prawdziwe dla wielu materiałów w ograniczonych przedziałach temperatury. Przykładowo, na Rys. 22 pokazano zależność oporności właściwej miedzi od temperatury.



Rys.22. Opór właściwy miedzi w funkcji temperatury
(D. Halliday, R. Resnick „Fizyka” tom 2, PWN Warszawa, 1972)

Opór elektryczny w temperaturze $T=0$ na ogół nigdy nie jest dokładnie równy zero (w większości materiałów istnieje tzw. opór resztkowy) – patrz Rys.23 – przypadek kadmu. Natomiast w pewnych materiałach, zwanych *nadprzewodnikami*, opór staje się dokładnie zerowy. Zachodzi to poniżej tzw. temperatury krytycznej (charakterystycznej dla każdego nadprzewodnika, na ogół bardzo niskiej, bliskiej 0 K). Na Rys. 23 pokazano przykład zależności temperaturowej oporności właściwej dwóch nadprzewodników: ołowiu i talu. Nadprzewodnictwo odkrył Kamerling Onnes (Holandia, 1914) w ciekłej rtęci - w temperaturze około 4° K. Czyste pierwiastki mają niskie temperatury krytyczne – rzędu kilku Kelwinów (Rys. 23, Tabela 1). Bardzo ważnym odkryciem było wynalezienie w latach osiemdziesiątych XX wieku nadprzewodników ceramicznych (np. związków Y-Ba-Cu-O), których temperatury krytyczne są znacznie wyższe – sięgają do 100 K (pierwszy wynik dla ceramicznej próbki La-Ba-Cu-O, która wykazywała temperaturę krytyczną około 30 K, uzyskali w roku 1986 Bednorz i Müller, za co otrzymali nagrodę Nobla). Historię odkryć w dziedzinie nadprzewodnictwa przedstawia schematycznie Rys. 24.

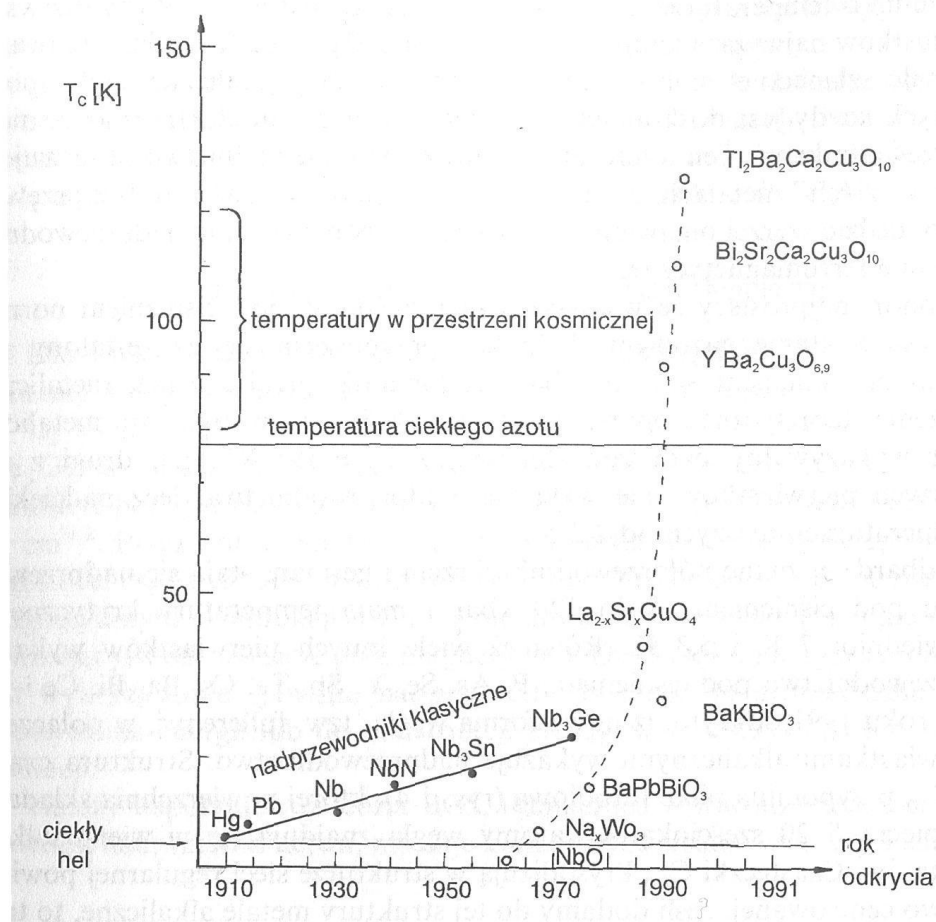


Rys. 23. Oporność właściwa w funkcji temperatury dla zwykłego przewodnika (kadm) i dla nadprzewodników (tal, ołów)

Poniżej pokazano w tabeli układu okresowego, które pierwiastki są nadprzewodnikami.

Tabela 1. Temperatury i pola krytyczne dla czystych pierwiastków

Li	Be 0,026	Temperatury krytyczne (K) Pola krytyczne w 0 K podano w gausach (10^{-4} T)										B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg											Al 1,140 105	Si	P	S	Cl	Ar
K	Ca	Sc	Ti 0,39 100	V 5,38 1420	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn 0,875 53	Ga 1,091 51	Ge	As	Se	Br	Kr
Rb	Sr	Y	Zr 0,546 47	Nb 9,50 1980	Mo 0,92 95	Tc 7,77 1410	Ru 0,51 70	Rh 0,003 0,49	Pd	Ag	Cd 0,56 30	In 3,4035 293	Sn 3,722 309	Sb	Te	I	Xe
Ca	Ba	La 6,00 1100	Hf 0,12	Ta 4,483 830	W 0,012 1,07	Re 1,4 198	Os 0,655 65	Ir 0,14 19	Pt	Au	Hg 4,153 412	Tl 2,39 171	Pb 7,193 803	Bi	Po	At	Rn



Rys. 24. Historia odkrywania nadprzewodników o coraz wyższych temperaturach krytycznych (zaczepnięto z: M. Cyrot, D. Pavuna, Wstęp do nadprzewodnictwa, PWN, Warszawa 1996)

Cewki nawinięte z drutów nadprzewodzących (zanurzonych w ciekłym helu) służą do wytwarzania bardzo silnych pól magnetycznych, rzędu 10 T. Z ewentualnym odkryciem materiałów wykazujących zjawisko nadprzewodnictwa w temperaturach pokojowych wiąże się ogromne nadzieje na zrewolucjonizowanie wielu dziedzin techniki i nauki (bezsplatne przesyłanie energii elektrycznej, konstrukcja pociągów poruszających się na poduszce magnetycznej, konstrukcja komputerów nowej generacji itp.).

Prawo Ohma

Przyjmujemy, że opór danego elementu (np. opornika) jest stały, niezależnie od wielkości przyłożonego napięcia oraz płynącego przez niego prądu. Oczywiście, jest to poprawne założenie przy rozsądnie ograniczonym zakresie parametrów pracy tego elementu. Jeśli do opornika przyłożona jest różnica potencjałów, czyli napięcie elektryczne, to płynie przez niego prąd elektryczny. Relację między tymi wielkościami podaje prawo Ohma:

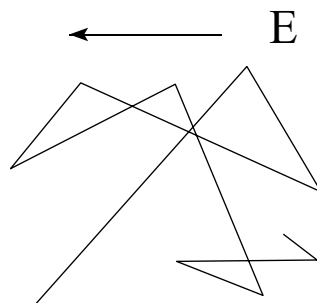
$U = iR$	(88)
----------	------

Przyłożone napięcie elektryczne powoduje powstanie wewnątrz przewodnika pola elektrycznego E . Równoważna postać prawa Ohma podaje zależność pomiędzy natężeniem pola elektrycznego, gęstością prądu oraz opornością właściwą:

$E = j\rho$	(89)
-------------	------

Pogląd atomistyczny na prawo Ohma

Nawet w nieobecności przyłożonego pola elektrycznego, elektrony swobodne w przewodniku poruszają się z ogromnymi prędkościami; prędkość średnia tego chaotycznego ruchu elektronów wynosi: $\bar{v} = 10^8$ cm/s. Elektrony swobodne wykonują chaotyczny ruch, zderzając się z rdzeniami jonowymi przewodnika i często zmieniając prędkość i kierunek. Tor jednego z elektronów pokazuje poniższy rysunek. Odcinki proste odpowiadają przebiegowi elektronu pomiędzy dwoma kolejnymi zderzeniami.



Parametrem charakteryzującym tor elektronu jest jego *średnia droga swobodna* λ : jest to średni odcinek między dwoma zderzeniami. Jeżeli do przewodnika przyłożymy różnicę potencjałów (czyli napięcie U), to na chaotyczny ruch elektronu nałoży się systematyczna jego składowa, opisana prędkością unoszenia v_u .

Czas pomiędzy dwoma zderzeniami wynosi:

$$t = \frac{\lambda}{\bar{v}} \quad (90)$$

Gdy jest przyłożone pole elektryczne \mathbf{E} , elektron doznaje przyspieszenia:

$$a = \frac{eE}{m} \quad (91)$$

Prędkość nabytą na końcu średniej drogi swobodnej, przyjmiemy jako reprezentatywną wartość prędkości unoszenia, którą uzyskuje elektron:

$$v_u = a \left(\frac{\lambda}{\bar{v}} \right) \quad (92)$$

(gdzie zastosowaliśmy wzór na prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym: $v=at$).
Podstawiając przyspieszenie z Równ. 91 do powyższej relacji, otrzymujemy:

$$v_u = \frac{eE\lambda}{m\bar{v}} \quad (93)$$

Z drugiej strony z Równ. 80 mamy : $v_u = \frac{j}{ne}$

Porównując dwie powyższe relacje otrzymujemy:

$$\frac{E}{j} = \frac{m\bar{v}}{ne^2\lambda} \quad (94)$$

Lecz zgodnie z Równ. 89:

$$\frac{E}{j} = \rho$$

i ostatecznie znajdujemy:

$$\rho = \frac{m\bar{v}}{ne^2\lambda} \quad (95)$$

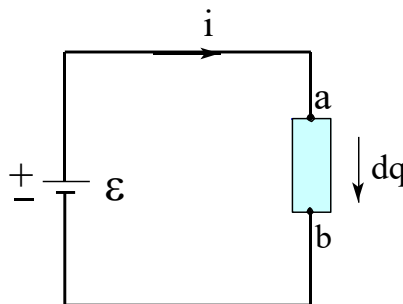
Otrzymaliśmy wzór na oporność właściwą, wyrażoną przez parametry mikroskopowe, takie jak: masa, ładunek, średnia droga swobodna i średnia prędkość ruchu chaotycznego oraz koncentracja elektronów.

Szacuje się, że typowa wartość prędkości unoszenia jest o 13 rzędów wielkości mniejsza niż średnia prędkość ruchu chaotycznego. Wartości te w temperaturze pokojowej dla typowego przypadku wynoszą:

$$\begin{aligned} \bar{v} &\sim 1.6 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_u &\sim 5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \quad (96)$$

Przemiany energii w obwodzie elektrycznym

Rozważmy obwód elektryczny składający się z baterii połączonej z odbiornikiem, przedstawionym w postaci prostokąta o zaciskach a i b (odbiornikiem tym może być opornik elektryczny, żarówka, telewizor lub lodówka).



W obwodzie płynie prąd stały o natężeniu i , a na zaciskach a i b istnieje różnica potencjałów. Zgodnie z przyjętą konwencją, prąd elektryczny przedstawiamy umownie jako ruch ładunków dodatnich. Płynie on zatem w obwodzie od zacisku dodatniego baterii do ujemnego. Między zaciskami baterii panuje różnica potencjałów ε , zwana siłą elektromotoryczną. Jest ona przyczyną przepływu prądu w obwodzie. Prąd elektryczny przepływa też przez odbiornik: na zacisku a odbiornika jest wyższy potencjał (+) niż na zacisku b (-). Napięcie panujące między zaciskami odbiornika $V_{ab} = \varepsilon$. Ładunek (dodatni) dq przenoszony jest od zacisku (+) do (-), a zatem mniejsza on swoją energię potencjalną o dU :

$$dW = dq U_{ab} = i dt U_{ab} \quad (97)$$

gdzie podstawiliśmy: $dq = i dt$.

Energia tracona przez ładunek zyskiwana jest przez odbiornik. Moc P , definiowana jako szybkość zmiany energii, wynosi:

$$P = \frac{dW}{dt} = i U_{ab}$$

Ogólnie, moc prądu elektrycznego pobierana przez odbiornik wynosi:

$P = iU$	(98)
----------	------

Jest to moc pobierana lub rozpraszana w jakimś urządzeniu (silnik, opornik ...).

Równoważne formuły na moc prądu elektrycznego otrzymamy podstawiając prawo Ohma ($V = Ri$) do powyższego równania:

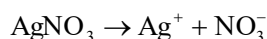
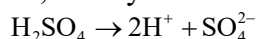
$$P = i^2 R \quad \text{lub} \quad P = \frac{U^2}{R}$$

Jednostką mocy jest wat (W):

$$W = VA = \frac{J}{s}$$

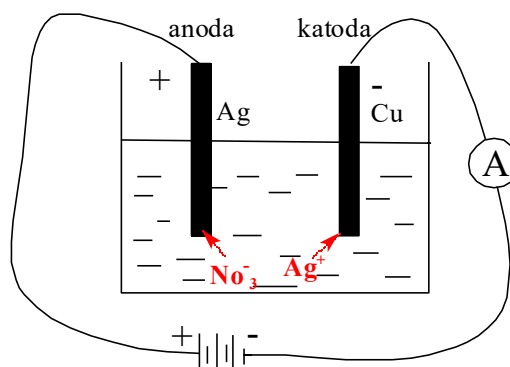
Przepływ prądu w elektrolitach. Elektroliza

Prąd elektryczny może płynąć nie tylko w metalach, ale i w cieczach, a nawet w pewnych warunkach – w gazach. Czyste ciecze, takie jak woda destylowana, olej, nafta, gliceryna nie przewodzą prądu elektrycznego. Natomiast roztwory kwasów i zasad dysocjują na jony i przewodzą. Przykłady dysocjacji kwasu, zasady i soli w roztworze wodnym:



W praktyce przepływ prądu w tzw. elektrolitach używany jest do pokrywania cienką warstwą metaliczną jednej z elektrod, zaś proces ten nazywany jest elektrolizą.

Rozpatrzmy elektrolizę azotanu srebra : $AgNO_3 \rightarrow Ag^+ + NO_3^-$



Rys.25. Schemat układu, w którym zachodzi elektroliza

Jony dodatnie, które dążą do katody nazywamy kationami, zaś ujemne, które dążą do anody – anionami. W naszym przykładzie jony srebra (kationy) osadzają się na miedzianej katodzie, natomiast jony NO_3^- (aniony) dążą do srebrnej anody. Te ostatnie wchodzi w reakcję z anodą ($NO_3^- + Ag^+ = AgNO_3$); w efekcie z anody ubywa srebra, zaś powstałe cząstki azotanu srebra przechodzą do roztworu. Oczywiście masa srebra, które osadza się na katodzie, równa jest ubytkowi masy anody.

Zjawisko elektrolizy zostało zbadane przez M. Faradaya w r. 1833. Sformułował on dwa prawa elektrolizy:

1) Masa substancji, m , wydzielonej na katodzie:

$m = kQ$	lub	$m = kit$	(99)
----------	-----	-----------	------

gdzie: k jest równoważnikiem elektrochemicznym (jt. masa substancji wydzielonej na katodzie, gdy przez roztwór przepłynął całkowity ładunek $Q=1C$), i jest prądem, zaś t jest czasem.

2) Równoważniki elektrochemiczne substancji są proporcjonalne do ich równoważników chemicznych: $k \sim \frac{\mu}{w}$ (μ jest masą molową, zaś w – wartościowością). Dokładniej:

$k = \frac{1}{F} \frac{\mu}{w}$	(100)
---------------------------------	-------

F – jest stałą Faraday’a; jej wartość wynosi $F = 96\,533\text{ C}$.

Łącząc oba prawa elektrolizy, otrzymujemy masę substancji wydzieloną na katodzie:

$$m = \frac{1}{F} \frac{\mu}{w} Q$$

Zauważmy, że gdy, ładunek całkowity, który przepłynął przez elektrolit $Q=F$, to podczas elektrolizy wydzielą się masa substancji równa równoważnikowi chemicznemu.

Wyrażmy F przez stałe podstawowe:

$$m = \frac{1}{F} \frac{\mu}{w} Q \rightarrow F = \frac{\mu Q}{mw} ; F = \frac{\mu(n' N_A w e)}{w(n' \mu)}$$

gdzie N_A jest stałą Avogadro. Po uproszczeniu, znajdujemy stałą Farady’a:

$F = N_A e$	(101)
-------------	-------

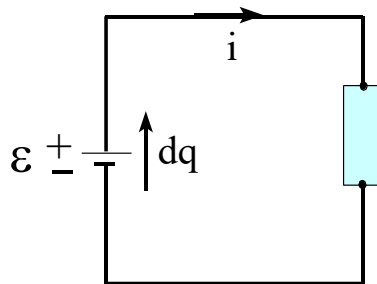
Podstawiając: $N_A = 6,022 \times 10^{23} \frac{\text{cz}}{\text{mol}}$

$$e = 1,603 \times 10^{-19} \text{ C}$$

wyliczamy, że $F=96\,533\text{ C}$.

Siła elektromotoryczna (SEM)

Źródłami siły elektromotorycznej (SEM) są urządzenia wytwarzające różnicę potencjałów (czyli napięcie) między swoimi zaciskami; są to np. baterie i prądnice. Idealne źródło napięciowe utrzymuje stałą wartość siły elektromotorycznej niezależnie od prądu pobieranego ze źródła. Rozważmy ponownie obwód elektryczny zawierający SEM oraz odbiornik w postaci opornika.



Wewnątrz źródła napięcia wykonywana jest praca nad umownymi dodatnimi ładunkami dq , ponieważ wewnątrz źródła przenoszone są one od potencjału niższego do wyższego. Praca ta wynosi:

$$dW = \varepsilon dq$$

Dzięki wykonaniu tej pracy, na zewnątrz źródła napięcia ładunki mogą przepływać przez różne odbiorniki pokonując ich opór elektryczny. Jednostką SEM jest volt: $1\text{ V} = \text{J/C}$.

Obliczanie obwodów elektrycznych

Obwody elektryczne mają strukturę zamkniętych konturów - zwanych *oczkami*. Natomiast miejsce, gdzie spotykają się co najmniej trzy przewody nazywamy *węzłem*.
Przy obliczaniu obwodów elektrycznych stosowane są dwa prawa Kirchoffa:

a) I prawo Kirchoffa:

W dowolnym węźle obwodu algebraiczna suma prądów musi być równa zero:

$$\sum_k i_k = 0 \quad (102)$$

b) II Prawo Kirchoffa:

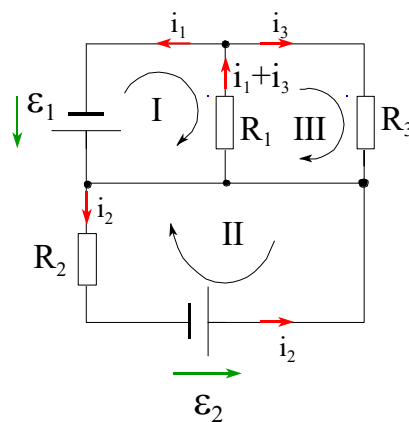
Suma napięć (zmian potencjału) napotykanym przy okrążeniu dowolnego zamkniętego konturu (oczka) jest równa zero:

$$\sum_k U_k + \sum_j \varepsilon_j = 0 \quad (103)$$

Bilans ten robimy dla każdego oczka; U_k oznaczają spadki potencjału na odbiornikach, zaś ε_j – siły elektromotoryczne występujące w obwodzie.

Przykład: obliczenie obwodu zawierającego trzy oczka

Oczka ponumerowaliśmy liczbami rzymskimi i zaznaczyliśmy umowne kierunki obiegu oczek. Pamiętajmy, że spadek napięcia na odbiorniku ma przeciwny zwrot niż prąd przez niego przepływający. Każdy spadek napięcia bierzemy ze znakiem plus, gdy jest zgodny z kierunkiem obiegu oczka, w przeciwnym razie bierzemy go ze znakiem minus.



Zastosujmy prawa Kirchoffa do trzech oczek naszego obwodu :

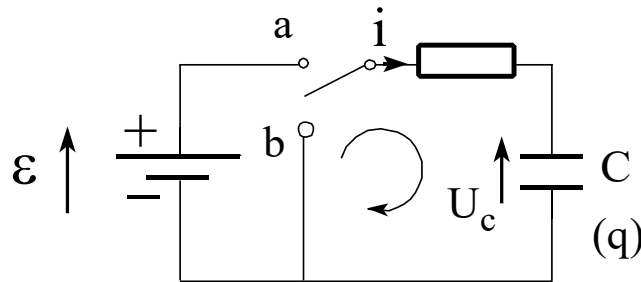
$$\begin{cases} (i_3 + i_1)R_1 - \varepsilon_1 = 0 & \text{oczko I} \\ i_2 R_2 - \varepsilon_2 = 0 & \text{oczko II} \\ -i_3 R_3 - (i_1 + i_3)R_1 = 0 & \text{oczko III} \end{cases}$$

Mamy tu trzy równania oraz trzy niewiadome (i_1, i_2, i_3). Zakładamy, że wartości sił elektromotorycznych ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) oraz oporności (R_1, R_2, R_3) są dane. Rozwiązując powyższy układ równań znajdziemy poszukiwane wartości natężenia prądu.

Przykład przebiegu innego niż stałoprądowy - obwód RC

Do tej pory rozważaliśmy obwody elektryczne, w których elementami biernymi były tylko oporniki, a siły elektromotoryczne były stałe. W efekcie natężenia prądów były stałe, tzn., nie zmieniały się w czasie.

Jeśli do obwodu dołączymy kondensator, C, będziemy mieli do czynienia z prądem zmieniającymi się w czasie. Rozważmy poniższy obwód:



Rys.26. Obwód RC.

Założmy, że przełącznik znajduje się w położeniu *a*; na podstawie drugiego prawa Kirchoffa napiszemy:

$$\varepsilon - iR - U_c = 0$$

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0$$

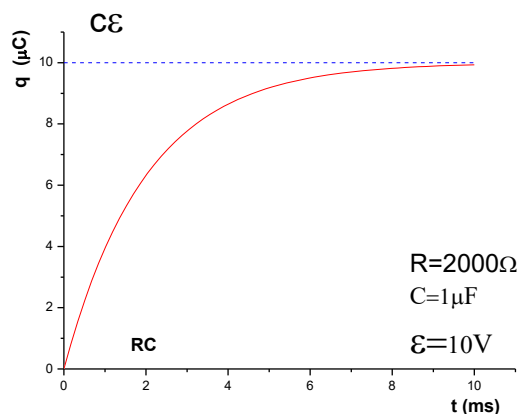
lecz: $i = \frac{dq}{dt}$, więc powyższe równanie przepiszemy następująco:

$$\varepsilon = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} \quad (104)$$

Powyższe równanie jest równaniem różniczkowym ze względu na q (zgromadzony na kondensatorze). Jego rozwiązaniem jest:

$$q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) \quad (105)$$

Zależność tę obrazuje poniższy wykres:

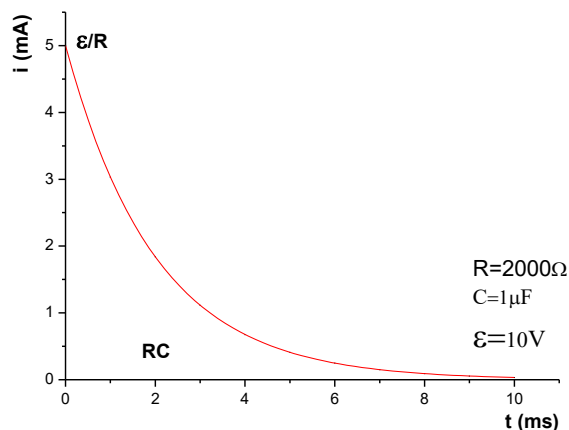


Rys. 27. Wykres zmiany q w zależności od czasu t w procesie ładowania

Widzimy, że ładunek na kondensatorze rośnie osiągając w końcu wartość $q=C\varepsilon$. Wiedząc, że natężenie prądu wyraża się wzorem: $i = \frac{dq}{dt}$, otrzymujemy zależność prądu płynącego w obwodzie od czasu:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \quad (106)$$

Występujący w wykładniku czynnik RC nazywamy stałą czasową. W istocie, jest to czas, po którym ładunek na kondensatorze osiąga $(1 - e^{-1}) \cong 63\%$ wartości końcowej ($q_0=C\varepsilon$). Wykres natężenia prądu w funkcji czasu przedstawiono poniżej:



Rys. 28. Wykres natężenia prądu i w funkcji czasu t .

A zatem po włączeniu obwodu (przełącznik w położeniu „a”) i odczekaniu dostatecznie długiego czasu uzyskujemy stan równowagi: prąd ustaje, a kondensator jest całkowicie naładowany.

W powyższym stanie obwodu przesuńmy przełącznik do położenia b. Równanie obwodu przyjmuje teraz postać:

$$iR + \frac{q}{C} = 0 \quad (107)$$

lub równoważnie:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (108)$$

Znów otrzymaliśmy równanie różniczkowe. Jego rozwiązanie ma postać:

$$q = q_0 e^{-t/RC} \quad (109)$$

gdzie $q_0 = C\varepsilon$ jest ładunkiem na kondensatorze w stanie pełnego naładowania (czyli w stanie ustalonym, gdy przełącznik był w pozycji *a*).

Wyciągając z powyższego natężenie prądu ($i = \frac{dq}{dt}$), otrzymujemy:

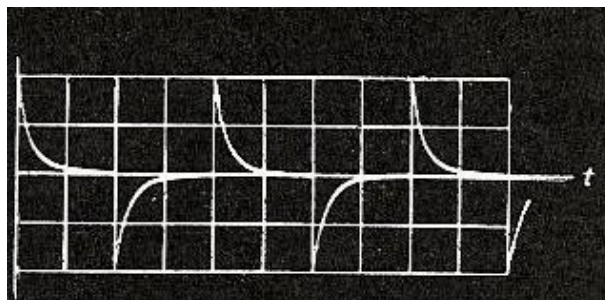
$$i = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} \quad (110)$$

Zauważ, że teraz prąd ma przeciwny znak niż w poprzedniej sytuacji; jest to zrozumiałe, gdyż teraz odbywa się rozładowanie kondensatora. Uwzględniając, że $q_0 = \varepsilon C$, wynik powyższy możemy przepisać:

$$i = -\frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \quad (111)$$

Wykres powyższej zależności jest lustrzanym odbiciem (względem osi czasu) krzywej z Rys. 25.

Poprawność uzyskanych rozwiązań możemy zaobserwować doświadczalnie na ekranie oscyloskopu, jeśli podamy na niego sygnał reprezentujący natężenie prądu *i* i jeśli będziemy w omawianym obwodzie RC cyklicznie przestawiać przełącznik z położenia *a* na *b*. Wynik takiej obserwacji pokazano na poniższym rysunku. Zgadza się on z kształtem uzyskanych rozwiązań na natężenie prądu.



Rys. 29. Zmiany prądu przy cyklicznym przestawianiu przełącznika z położenia *a* do *b* (wynik zaczerpnięty z podręcznika D. Holliday, R. Resnick „Fizyka”, PWN, tom 2, 1972)

V. Pole magnetyczne

Pole magnetyczne wytwarzają magnesy trwałe oraz obwody z prądem elektrycznym. W gruncie rzeczy powstawanie pola magnetycznego zawsze można sprowadzić do ruchu cząstek naładowanych (najczęściej elektronów) i ponadto do ich tzw. momentu spinowego (czyli momentu pędu własnego).

Pole magnetyczne \mathbf{B} definiujemy przez siłę działającą na poruszający się ładunek:

Jeżeli dodatni ładunek próbny q_0 porusza się w stronę punktu P z prędkością \mathbf{v} i jeżeli na ten ładunek działa odchylająca siła \mathbf{F} , to w punkcie P istnieje pole magnetyczne o indukcji \mathbf{B} , zdefiniowane następującym równaniem:

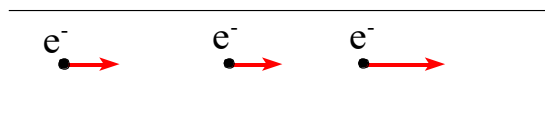
$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (112)$$

Siłę zdefiniowaną powyżej nazywamy siłą Lorentza.

W istocie swej, pole magnetyczne jest poprawką relatywistyczną do pola elektrycznego i w związku z tym, można by go nie definiować jako osobnego pojęcia. Niemniej, byłoby to wysoce niewygodne w licznych praktycznych zastosowaniach. Dlatego też, pole magnetyczne definiujemy poprzez siłę Lorentza.

Przewodnik z prądem w polu magnetycznym

Pole magnetyczne odchyła poruszający się ładunek. Ponieważ prąd jest zbiorem takich ładunków to spodziewamy się, że będzie ono również odchylało przewodnik, w którym płynie prąd i .



Stwierdza się, że na taki przewodnik działa siła:

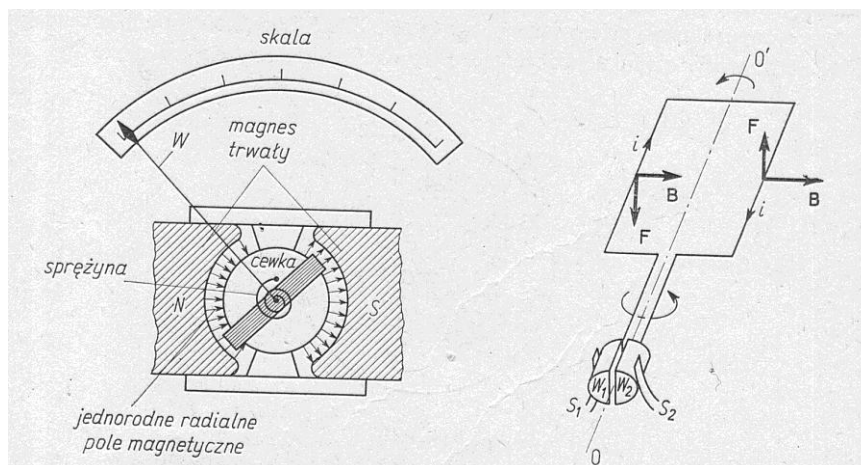
$$\mathbf{F} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (113)$$

gdzie \mathbf{l} jest wektorem skierowanym zgodnie z kierunkiem prądu elektrycznego i o długości równej długości przewodnika.

Jeśli przewodnik nie jest prostoliniowy, to siłę działającą na element jego długości $d\mathbf{l}$ wyliczamy zgodnie z relacją:

$$d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (114)$$

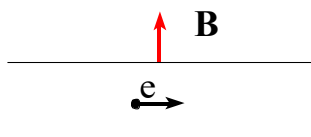
Zauważmy, że na występowaniu siły działającej na przewodnik z prądem w polu magnetycznym oparte jest działanie mierników elektrycznych (np. amperomierzy) oraz silników elektrycznych - Rys. 30.



Rys. 30. Zasada działania amperomierza (po lewej) oraz silnika prądu stałego (po prawej).

Wyprowadzenie Równ. 113:

Prąd w metalowym przewodniku jest przenoszony przez swobodne elektrony. Jeśli przez n oznaczymy liczbę elektronów w jednostce objętości przewodnika, to wielkość średniej siły działającej na pojedynczy elektron dana jest wzorem (załóżmy, że wektor indukcji pola magnetycznego jest prostopadły do przewodnika):



$$F'_e = ev_u B$$

Korzystając ze wzoru na gęstość prądu:

$$j = nev_u$$

wyliczamy v_u i podstawiamy do poprzedniego równania:

$$F'_e = eB \frac{j}{ne} = \frac{jB}{n}$$

Drut o długości l zawiera nSl swobodnych elektronów (gdzie Sl jest objętością części przewodnika o przekroju S i długości l), czyli całkowita siła działająca na swobodne elektrony w przewodniku to:

$$F = (nSl)F'_e = nSl \frac{jB}{n}$$

Ponieważ: $i = jS$, więc:

$$F = i l B \quad (115)$$

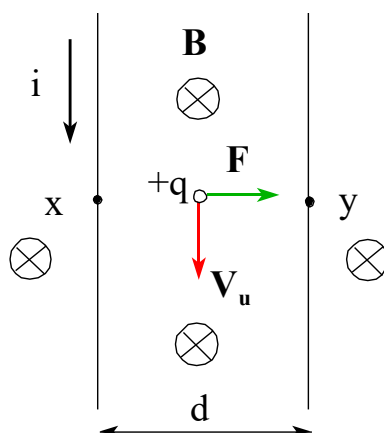
co jest równoważne z Równ.113 w przypadku pola B skierowanego prostopadle do przewodnika.

Efekt Halla

W roku 1879 E. H. Hall przeprowadził doświadczenie, które pozwala określić znak ładunku

płynącego w przewodniku.

Miedziany pasek, w którym płynie prąd o natężeniu i umieszczamy w polu magnetycznym o indukcji \mathbf{B} prostopadłej do płaszczyzny paska.



Pole magnetyczne działa na poruszające się umowne ładunki dodatnie siłą \mathbf{F} skierowaną w prawą stronę:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Pod wpływem tej siły ładunki jednego znaku gromadzą się na jednym brzegu blaszki. Jeżeli mamy ustalony kierunek płynięcia prądu, to niezależnie od tego czy jest on spowodowany ruchem ładunków dodatnich lub ujemnych, będą one odchylane w prawą stronę (jeśli q jest ujemne, to równocześnie znak \mathbf{v}_u zmienia się na przeciwny i w efekcie siła Lorentza ma taki sam zwrot).

W ten sposób wytwarza się różnica potencjałów między punktami x i y . W zależności od znaku ładunków, będących nośnikami prądu, znak natężenia pola \mathbf{E} będzie różny. Jeżeli między punktami x i y powstanie napięcie U_{xy} , to wartość wyidukowanego natężenia pola elektrycznego wynosi:

$$E_H = \frac{U_{xy}}{d}$$

Jednak przemieszczanie się ładunków w kierunku brzegu paska w końcu ustaje, ponieważ powstające pole elektryczne \mathbf{E}_H przeciwdziała dalszemu rozsuwaniu ładunków. Gdy odchylająca ładunki siła Lorentza zostanie zrównoważone przez przeciwnie skierowane pole elektryczne, osiągniemy stan równowagi :

$$q\mathbf{E}_H + q(\mathbf{v}_u \times \mathbf{B}) = 0$$

czyli:

$\mathbf{E}_H = -\mathbf{v}_u \times \mathbf{B}$	(116)
--	-------

To doświadczenie pokazuje, że nośniki prądu w zdecydowanej większości ciał mają ładunek ujemny, czyli, że są to elektrony.

Ponieważ w omawianym doświadczeniu: $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}_u$, więc wartość indukowanego pola elektrycznego wynosi:

$$E_H = v_u B \quad (117)$$

Ponieważ: $\mathbf{j} = nev_u$, więc natężenie indukowanego pola elektrycznego wynosi:

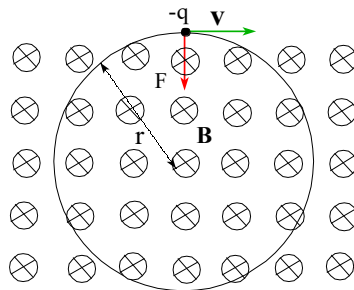
$E_H = \frac{Bj}{ne}$	(118)
-----------------------	-------

Możemy stąd wyznaczyć koncentrację elektronów:

$$n = \frac{jB}{eE_H} \quad (119)$$

Wielkość $\frac{1}{ne}$ nazywana jest współczynnikiem Halla. Łączy ona przyłożone pole magnetyczne, gęstość prądu i natężenie indukowanego pola elektrycznego (Równ. 118). Wyznaczywszy go z doświadczenia, znajdujemy znak ładunku nośników prądu oraz koncentrację ładunków. Z kolei, ważnym technicznie zastosowaniem efektu Halla jest możliwość pomiaru indukcji \mathbf{B} nieznanego pola magnetycznego.

Ładunki krążące po orbitach



Rys. 31. Naładowana cząstka o prędkości prostopadłej do pola magnetycznego, porusza się po okręgu.

Jeśli naładowaną cząstkę (np. o ładunku ujemnym) o prędkości \mathbf{v} wprowadzimy w jednorodne pole magnetyczne o indukcji \mathbf{B} (zakładając że \mathbf{v} jest prostopadłe do \mathbf{B}), to działa na nią siła Lorentza o wartości bezwzględnej qvB . Zakrzywia ona tor cząstki, czyli spełnia rolę siły dośrodkowej:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

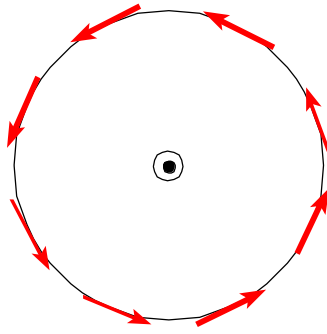
Cząstka porusza się po torze kołowym o promieniu r ze stałą prędkością kątową ω :

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad (120)$$

Częstość ω , z którą cząstka obiega kołowy tor w polu magnetycznym, nazywana jest *częstością cyklotronową*.

PRAWO AMPERE'ą

Jeśli umieścimy zespół igieł magnetycznych w odległości r od przewodnika z prądem to igły dążą do ustawienia się z polem magnetycznym wytwarzanym przez przewodnik z prądem. Jak widać na poniższym rysunku linie tego pola są okręgami.



Na podstawie doświadczeń uogólniono powyższą obserwację i otrzymano zależność pomiędzy polem indukcji magnetycznej \mathbf{B} wytwarzanej przez przewodnik i natężeniem prądu przez niego płynącego:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \quad (121)$$

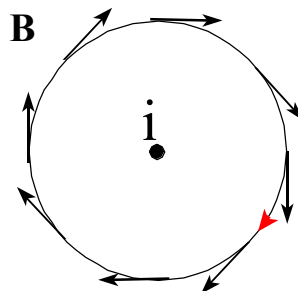
Jest to **prawo Ampère'a**. Mówi ono, że wokół przewodnika z prądem indukuje się wirowe pole magnetyczne, takie, że całka po *dowolnym konturze* zamkniętym z pola indukcji magnetycznej \mathbf{B} jest proporcjonalna do prądu (a ogólniej do sumy prądów) przecinających ten kontur. Stała μ_0 nazywa się przenikalnością magnetyczną próżni:

$$\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$$

Przykłady zastosowania prawa Ampère'a

Przykład 1: indukcja magnetyczna \mathbf{B} w otoczeniu długiego drutu

Jako kontur całkowania wybieramy okrąg o promieniu r , przez którego środek, prostopadłe do płaszczyzny okręgu, przechodzi przewodnik z prądem o natężeniu i . Natężenie prądu skierowane jest nad płaszczyznę rysunku; zwrot wirowego pola magnetycznego wyznacza reguła śruby prawoskrętnej.



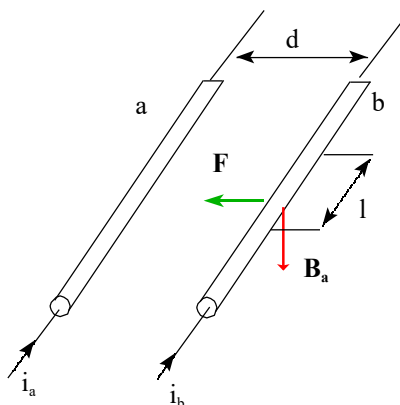
Ze względu na symetrię zagadnienia, wartość bezwzględna indukcji magnetycznej musi być stała wszędzie na okręgu o promieniu r . Ponieważ \mathbf{B} i $d\mathbf{l}$ są równoległe, to z prawa Ampère'a wynika, że:

$$B \oint dl = 2\pi r B = \mu_0 i$$

gdzie oczywiście stałą wartość B wyłączyliśmy przed całkę. Znajdujemy, zatem, że indukcja magnetyczna w odległości r od przewodnika z prądem wynosi:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (122)$$

Przykład 2: oddziaływanie dwóch przewodników równoległych



Rys. 32. Oddziaływanie wzajemne dwóch przewodników z prądem

Dwa długie równoległe przewodniki, w których płyną prądy w tym samym kierunku, przyciągają się. Załóżmy, że w obu przewodnikach (oznaczonych jako a i b) płyną prądy o natężeniach i_a i i_b , oraz że są one rozsunięte na odległość d . Zgodnie z Równ.122, przewodnik a wytwarza w miejscu, gdzie znajduje się przewodnik b pole o indukcji B_a :

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

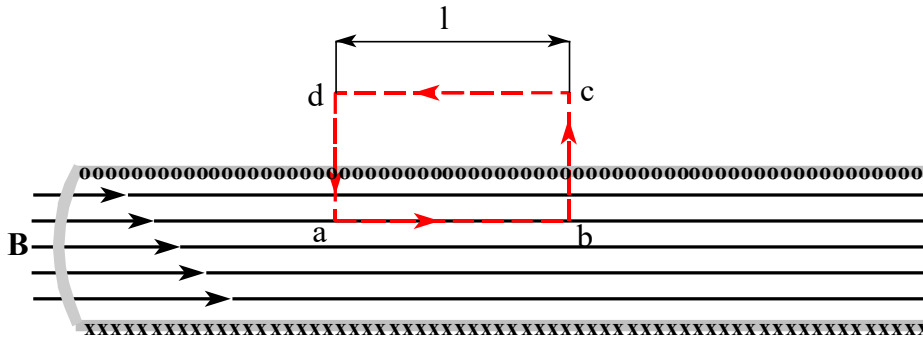
Na odcinek l przewodnika b działa, więc, siła (por. Równ.113):

$$F_b = i_b l B_a = \frac{\mu_0 l i_a i_b}{2\pi d} \quad (123)$$

Oczywiście, zgodnie z III zasadą dynamiki, taka sama siła, lecz skierowana przeciwnie, działa na przewodnik a . Na podstawie powyższej zależności skonstruowany jest wzorec natężenia prądu – amper (A).

Przykład 3: indukcja magnetyczna B wewnątrz cewki

Cewka indukcyjna (zwana też solenoidem) utworzona jest z długiego drutu metalowego, zwiniętego w spiralę o przylegających zwojach; założmy, że podłączona jest ona do źródła napięcia i przepływa przez nią prąd i .



Rys. 33. Przekrój przez cewkę; na czerwono zaznaczono kontur do zastosowania prawa Ampère'a.

Aby znaleźć indukcję magnetyczną wewnątrz cewki, stosujemy prawo Ampera dla konturu zaznaczonego przerywaną czerwoną linią:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

(1) (2) (3) (4)

Całki (2) i (4) są równe zero, ponieważ na odpowiadających im odcinkach elementy drogi są prostopadłe do \mathbf{B} . Natomiast całka (3) jest równa zero, bo zakładamy, że mamy do czynienia z idealną cewką, a w takim przypadku pole na zewnątrz niej nie istnieje (patrz Rys. 32a). Natomiast pole indukcji magnetycznej jest jednorodne wewnątrz cewki. Tak, więc ostatecznie:

$$Bl = \mu_0 i$$

Jako prąd i musimy wziąć całkowity prąd, który przecina kontur Ampère'a:

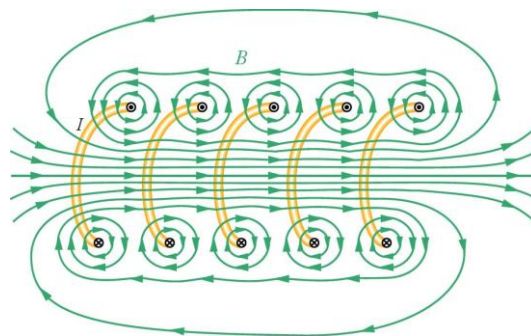
$$i = i_0 n l$$

gdzie n jest gęstością nawinięcia zwojów, czyli liczbą zwojów na jednostkę długości. Otrzymujemy:

$$Bl = \mu_0 i_0 n l$$

A zatem, indukcja magnetyczna wewnątrz solenoidu wynosi:

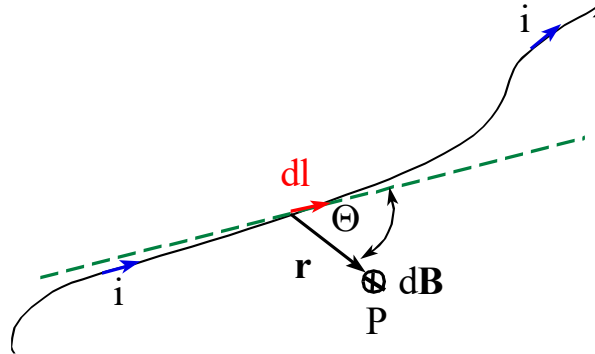
$$\mathbf{B} = \mu_0 i_0 n$$
(124)



Rys. 34 a. Linie pola \mathbf{B} w rzeczywistej cewce (o skończonej długości)

Prawo Biota – Savarta

Prawo Ampère'a możemy stosować do znajdowania indukcji magnetycznej, gdy rozkład prądów jest symetryczny i pozwala na łatwe obliczenie całki krzywoliniowej $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$.



W ogólnym przypadku, gdy przewód ma niesymetryczny kształt – stosujemy prawo Biota – Savarta. Prawo to mówi, że przyczynek $d\mathbf{B}$ do indukcji magnetycznej w punkcie P, pochodzący od odcinka przewodnika $d\mathbf{l}$ i odległy od niego o r wynosi:

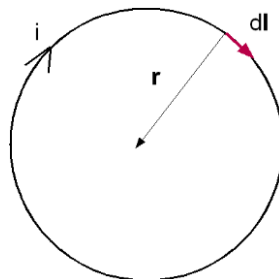
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \sin \theta}{r^2} \quad (125)$$

gdzie i jest natężeniem prądu płynącego przez przewód, zaś θ jest kątem między wektorami r i $d\mathbf{l}$. Powstające pole \mathbf{B} jest prostopadłe do płaszczyzny utworzonej przez te wektory. Ogólniejszą formą powyższego równania, w której mamy automatycznie zawartą także informację o kierunku powstającego pola indukcji magnetycznej jest:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (126)$$

Jest to właśnie prawo Biota – Savarta. Można wykazać, że prawa Ampère'a i Biota – Savart'a są ze sobą zgodne (jedno wynika z drugiego).

Przykład: obliczenie \mathbf{B} w środku kołowego przewodnika z prądem i



Zgodnie z prawem Biota – Savart'a, powstające pole \mathbf{B} jest prostopadłe do płaszczyzny okręgu; przyczynek do tego pola pochodzący od odcinka $d\mathbf{l}$ kołowego przewodnika wynosi:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} dl$$

Wartość pola w środku koła wyniesie:

$$B = \int dB$$

czyli:

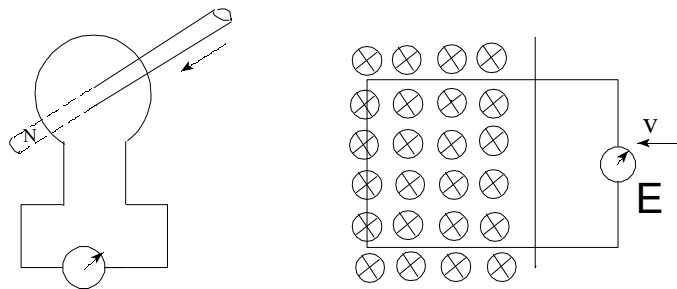
$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \int dl = \frac{\mu_0 i 2\pi r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 i}{2r}$$

A zatem wartość indukcji magnetycznej w środku kołowego przewodnika wynosi:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2r} \quad (127)$$

PRAWO FARADAY'a

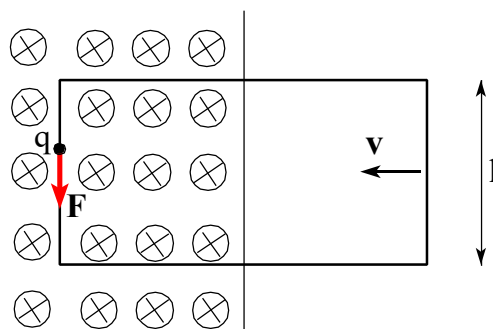
Doświadczenie uczy, że gdy wsuwamy ramkę wykonaną z przewodnika w pole magnetyczne (lub też magnes w pętlę przewodnika kołowego), to w przewodniku tym indukuje się siła elektromotoryczna ε .



Rys. 35. Jeśli przez pętlę przewodnika przechodzi zmienne pole magnetyczne, to w pętli tej indukuje się siła elektromotoryczna.

Powstającą siłę elektromotoryczną (SEM) wyliczymy z zasady zachowania energii. Jeśli wsuwamy ramkę prostokątną w obszar pola magnetycznego (patrz rysunek poniżej), to na ładunek q w ramce działa siła Lorentza. Praca, jaką ona wykonuje przy przemieszczeniu ładunku wzdłuż boku ramki, o długości l wynosi:

$$W = Fl = qvBl$$



Z drugiej strony, pracę tą możemy przyrównać do pracy wykonanej przez pole elektryczne, wytworzone przez SEM:

$$W_{el} = qEl = q\varepsilon$$

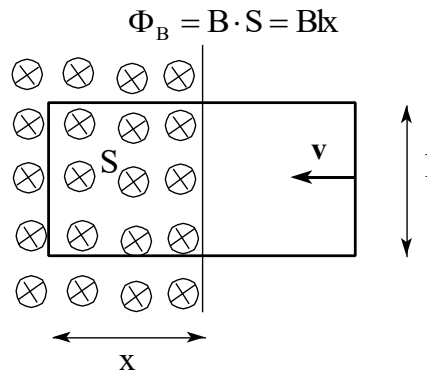
A zatem: $W=W_{el}$, czyli:

$$qvBl = q\varepsilon$$

skąd znajdujemy:

$$\varepsilon = Blv \quad (128)$$

Wyliczmy teraz strumień pola magnetycznego, przechodzący przez ramkę:



Zmiana w czasie strumienia magnetycznego:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv \quad (129)$$

Porównując Równ. 128 i 129, znajdujemy, że:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = |\varepsilon| \quad (130)$$

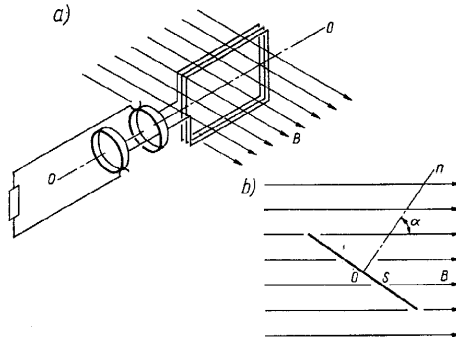
Wyprowadziliśmy w ten sposób prawo Faraday'a, które mówi, że:

indukowana w obwodzie siła elektromotoryczna jest równa co do wartości szybkości zmiany strumienia indukcji magnetycznej obejmowanej przez obwód.

Poza tym, stwierdza się, iż znak indukowanej SEM (ε) jest przeciwny do tego, jaki wyniknąłby z reguły śruby prawoskrętnej. Znak SEM jest, bowiem taki, aby dodatkowy strumień, wytwarzany przez prąd z nią związany, sprzeciwiał się zmianom strumienia pierwotnego. Dlatego też ostatecznie prawo Faraday'a zapiszemy:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (131)$$

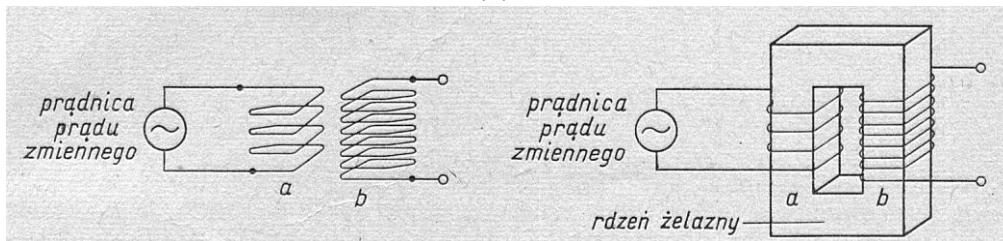
Prawo Faraday'a wyjaśnia działanie wielu urządzeń elektrycznych, jak np. transformatora czy też prądnicy prądu zmiennego (patrz poniżej). Wewnątrz prądnicy w polu magnetycznym obracana jest ramka. Przechodzący przez nią strumień pola magnetycznego, zmienia się w funkcji czasu sinusoidalnie, a więc generowana w niej siła elektromotoryczna – ma podobną zmienność.



Rys. 36. Działanie prądnicy prądu zmiennego

Na prawie indukcji elektromagnetycznej Faraday'a oparte jest także działanie transformatora (Rys. 37). Służy on do zmiany amplitudy napięcia sinusoidalnie zmiennego. Pierwotne napięcie podpięte jest do cewki indukcyjnej posiadającej n_1 zwojów (uzwojenie *a*), zaś na wyjściu cewki wtórnej o n_2 zwojach odbierane jest napięcie wyjściowe (uzwojenie *b*). W celu bezstratnego prowadzenia strumienia magnetycznego, obie cewki nawinięte są wokół rdzenia żelaznego (prawa część rysunku), tworzącego zamknięty tor. Oczywiście:

$$\frac{U_{2(m)}}{U_{1(m)}} = \frac{n_2}{n_1}$$

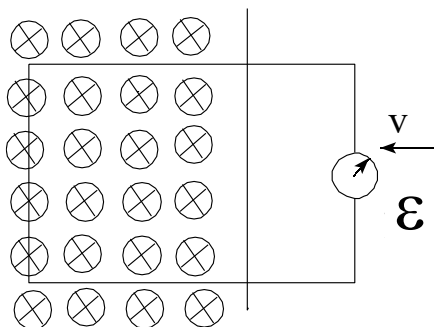


Rys. 37. Zasada działania transformatora

Przykład 1: SEM indukowana w ramce poruszającej się prostopadle do pola magnetycznego z prędkością v .

Ten przykład rozważyliśmy już przed chwilą, wyprowadzając prawo Faraday'a. Otrzymaliśmy, że:

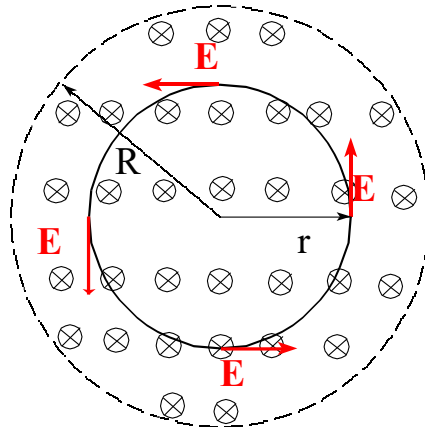
$$\varepsilon = Blv$$



Przykład 2 : Pole elektryczne indukowane w zmiennym polu magnetycznym

Tym razem rozważmy nieruchomy kołowy przewodnik (o promieniu r), umieszczony w płaszczyźnie prostopadłej do zmiennego pola \mathbf{B} . Zmieniające się pole magnetyczne powoduje powstanie na całej długości kołowego przewodnika siły elektromotorycznej ε , która wytwarza wewnątrz przewodnika pole elektryczne \mathbf{E} . Pamiętając, że siła elektromotoryczna (ε) jest różnicą potencjałów, zgodnie z Równ. 28, możemy napisać:

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E \cdot 2\pi r \quad (132)$$



Rys. 38. Wirowe pole elektryczne powstające w zmiennym polu indukcji magnetycznej \mathbf{B} .

Z kolei, zgodnie z prawem Faraday'a:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Z dwóch powyższych równań otrzymujemy:

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (133)$$

Zauważmy, że w przykładzie tym obecność kołowego przewodnika nie jest konieczna (użyliśmy go tylko dla łatwiejszego wyprowadzenia powyższej zależności). Wirowe pole elektryczne powstanie w zmiennym polu magnetycznym również w próżni.

W przykładzie niniejszym otrzymaliśmy przy okazji **ogólny zapis prawa Faraday'a**:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (134)$$

Indukcyjność

Jeśli przez cewkę przechodzi zmienny strumień pola magnetycznego, to według prawa Faraday'a w cewce tej powstaje indukowana SEM. Podobna sytuacja powstaje, gdy w cewce płynie prąd o zmiennym natężeniu; wytwarza on, bowiem zmienne pole magnetyczne, które z kolei generuje w cewce siłę elektromotoryczną:

$$\varepsilon = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} \quad (135)$$

wielkość $N\Phi_B$ jest wypadkowym strumieniem magnetycznym (przechodzi on przez wszystkie N zwojów cewki). Jest on oczywiście proporcjonalny do prądu płynącego przez cewkę:

$$N\Phi_B = Li \quad (136)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności, L , jest *indukcyjnością* cewki. Jest to ważny parametr, występujący w opisie obwodów elektrycznych. Indukcyjność definiujemy, zatem jako:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad (137)$$

Podstawiając Równ. 136 do Równ. 135, otrzymujemy:

$$\varepsilon = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (138)$$

Otrzymaliśmy ważną zależność, wiążącą prąd i i napięcie (czyli indukowaną SEM) na cewce:

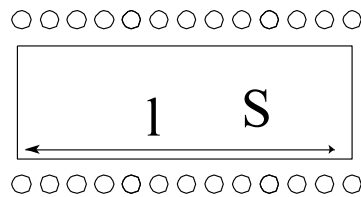
$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt} \quad (139)$$

Znak minus w powyższym równaniu oznacza, że przy rosnącej wartości natężenia prądu, SEM jest skierowana przeciwnie do zwrotu prądu. Jednostką indukcyjności jest henr (H):

$$1\text{H} = \frac{\text{V}}{\text{A/s}} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

Obliczanie indukcyjności

Rozważmy ściśle nawiniętą cewkę indukcyjną:



Ma ona długość l oraz pole przekroju poprzecznego S . Jej wypadkowy strumień magnetyczny wynosi:

$$N\Phi_B = n l B S$$

gdzie podstawiliśmy: $N=nl$ (n jest gęstością nawinięcia zwojów). Indukcja magnetyczna wewnątrz cewki, przez którą płynie prąd o natężeniu i_0 wynosi (por. Równ. 124):

$$B = \mu_0 i_0 n$$

Z dwóch ostatnich równań otrzymujemy:

$$N\Phi_B = \mu_0 n^2 l i_0 S$$

Zatem zgodnie z Równ. 137, indukcyjność cewki wynosi :

$$L = \frac{N\Phi_B}{i_0} = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 n^2 v$$

gdzie $v = lS$ jest objętością cewki. Ostatecznie:

$$L = \mu_0 n^2 v \quad (140)$$

Indukcyjność cewki jest proporcjonalna do jej objętości oraz kwadratu gęstości nawinięcia zwojów.

Podobnie jak wprowadzenie dielektryka między okładki kondensatora zwiększało jego pojemność elektryczną, tak też wprowadzenie rdzenia (np. z materiału ferromagnetycznego) powiększa indukcyjność cewki:

$$L' = \mu L \quad (141)$$

gdzie μ jest tzw. magnetyczną przenikalnością względną danego materiału. Dzieje się tak, ponieważ w rdzeniu wypadkowa indukcja magnetyczna (B) jest powiększona μ razy w porównaniu z jej wartością w próżni (B_0):

$$B = \mu B_0 \quad (142)$$

Gęstość energii pola magnetycznego

Widzieliśmy, że pole elektryczne posiada energię o gęstości: $u_E \sim E^2$, a dokładniej:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2$$

W polu magnetycznym także zgromadzona jest energia. Wykażemy za chwilę, że jej gęstość jest proporcjonalna do B^2 i wynosi ona:

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (143)$$

Wyprowadzenie wyrażenia na gęstość energii pola magnetycznego

Rozważmy energię elektryczną (E_B), związaną ze wzbudzeniem w cewce prądu i w konsekwencji – z wytworzeniem pola magnetycznego \mathbf{B} . W tym celu scałkujemy po czasie moc prądu elektrycznego (P):

$$E_B = \int P dt = \int \epsilon i dt = L \int i \frac{di}{dt} dt = L \int_0^i i di = \frac{1}{2} Li^2$$

gdzie ϵ jest napięciem indukowanym na cewce i (zgodnie z Równ. 139 jego wartość wynosi: $\epsilon = L \frac{di}{dt}$). A zatem na energię zgromadzoną w cewce otrzymaliśmy:

$$E_B = \frac{1}{2} Li^2 \quad (144)$$

Prąd płynący przez cewkę możemy wyrazić (Równ. 136):

$$i = \frac{N\Phi_B}{L} = \frac{NSB}{L} = \frac{nISB}{L} = \frac{nBV}{L}$$

gdzie $v = IS$ jest objętością cewki. Podstawiając ten rezultat do Równ. 144 i wyliczając gęstość energii pola magnetycznego ($u_B = E_B/V$), otrzymujemy:

$$u_B = \frac{E}{V} = \frac{Li^2}{2V} = \frac{Ln^2B^2V^2}{2L^2V} = \frac{n^2B^2v}{2L}$$

Lecz: $L = \mu_0 n^2 v$ (Równ. 140), więc:

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{n^2 B^2 v}{\mu_0 n^2 v} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Przepiszmy ten wynik:

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (145)$$

Czyli udowodniliśmy relację wyrażoną Równ. 143.

Przy okazji nadmienimy, iż oprócz wektora indukcji magnetycznej (\mathbf{B}), używa się także wektora natężenia pola magnetycznego:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (146)$$

Nasz wynik na gęstość energii pola magnetycznego można, zatem zapisać:

$$u_B = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (147)$$

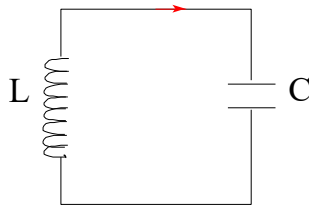
W ten sposób uzyskaliśmy zapis w formie analogicznej, jak w przypadku pola elektrycznego ($u_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$).

VI. Drgania elektromagnetyczne

Widzieliśmy poprzednio, że w kondensatorze zgromadzona jest energia pola elektrycznego, zaś w cewce indukcyjnej – energia pola magnetycznego. Energie te wynoszą:

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad \text{oraz} \quad U_B = \frac{1}{2} Li^2 \quad (148)$$

Rozważmy obwód zawierający tylko kondensator i cewkę (obwód LC), w którym kondensator był początkowo naładowany (obwód nasz nie zawiera źródła siły elektromotorycznej). Oczywiście kondensator będzie się rozładowywał, wywołując przepływ prądu. Z kolei, płynący prąd będzie wytwarzał pole magnetyczne w cewce i związaną z nim energię.



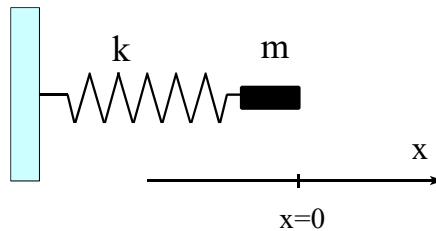
W obwodzie LC będzie następowało będzie, zatem cykliczne „przelewanie” energii pola elektrycznego w energię pola magnetycznego, i na odwrot. Napiszmy równanie tego obwodu:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (149)$$

lub pamiętając, że: $i = \frac{dq}{dt}$, otrzymamy:

$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (150)$

Jest to równanie obwodu LC. Ma ono dokładnie taką samą postać matematyczną jak równanie drgającej masy na sprężynie:



$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (151)$$

gdzie: $\omega^2 = k/m$. Jak pamiętamy, rozwiązaniem tego równania jest:

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (152)$$

Z podobieństwa matematycznego równań dla oscylatora mechanicznego i dla obwodu LC (Równ. 150 i 151), wynika, że rozwiązanie Równ. 150 ma postać:

$q = q_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (153)$
--

Jest to zależność na ładunek elektryczny zgromadzony na kondensatorze. Natomiast zależność od czasu prądu elektrycznego jest następująca:

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

czyli:

$i = i_m \sin(\omega t + \Phi) \quad (154)$

gdzie $\Phi = \pi + \varphi$.

Widzimy, zatem, że zarówno ładunek na kondensatorze jak i prąd w obwodzie zmieniają się okresowo, zgodnie z funkcją sinus lub cosinus.

Podstawmy rozwiązanie na ładunek (Równ. 153) do Równ. 150. Po wyliczeniu drugiej pochodnej ładunku po czasie:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -q_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

otrzymujemy:

$$-Lq_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C} q_m \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

a stąd:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (155)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób częstość drgań własnych obwodu LC. (Jest ona odpowiednikiem częstości drgań własnych oscylatora mechanicznego: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$).

Jak wspomnieliśmy, w obwodzie LC energia elektryczna zamienia się na magnetyczną i na odwrót. Odbywa się to z okresem: $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}$. Możemy powiedzieć, że pole elektryczne \mathbf{E} (w kondensatorze) i magnetyczne \mathbf{B} (w cewce indukcyjnej) generują się nawzajem.

Obwód RLC z wymuszeniem

W praktyce nie możemy uzyskać idealnego obwodu LC, gdyż zawsze wystąpi jakiś opór R . Jest to pełna analogia do mechanicznego oscylatora harmonicznego z tłumieniem.

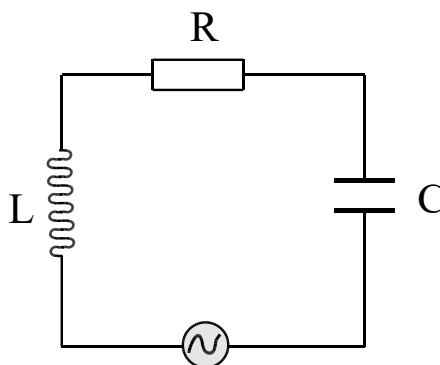
Pamiętamy, że aby podtrzymać jego drgania, trzeba było zastosować siłę wymuszającą ($F = F_m \cos \omega t$). Podobnie jest w obwodzie elektrycznym RLC. Chcąc zapewnić w nim drgania niegasnące musimy przyłożyć do niego siłę elektromotoryczną sinusoidalnie zmienną:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos \omega'' t \quad (156)$$

gdzie ω'' jest częstością pulsacji podłączonego źródła napięcia.

Napiszmy równanie tego obwodu:

$$U_L + U_C + U_R = \varepsilon \quad (157)$$



$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega'' t$$

Rys. 39. Obwód RLC z wymuszeniem

lub bardziej szczegółowo:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q + Ri = \varepsilon \quad (158)$$

Wyrażając prąd przez ładunek ($i = \frac{dq}{dt}$):

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \varepsilon \quad (159)$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe na ładunek zgromadzony na kondensatorze. Równanie to ma identyczną postać matematyczną jak równanie mechanicznego oscylatora harmonicznego z tłumieniem i z siłą wymuszającą. Jego rozwiązanie ma, zatem analogiczną postać:

$$q = q_m \sin(\omega''t - \varphi) \quad (160)$$

Na ogół bardziej interesuje nas prąd ($i = \frac{dq}{dt}$):

$$i = i_m \cos(\omega''t - \varphi) \quad (161)$$

Po podstawieniu proponowanego rozwiązania (Równ. 160) do Równ. 159, otrzymuje się, że:

$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} \quad (162)$$

gdzie:

$$Z = \sqrt{(\omega''L - \frac{1}{\omega''C})^2 + R^2} \quad (163)$$

A zatem:

$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(\omega''L - 1/\omega''C)^2 + R^2}} \quad (164)$$

Wielkość Z zwana jest **impedancją** i odgrywa ona rolę analogiczną jak oporność elektryczna (por. Równ. 162). Impedancja jest wielkością, która zastępuje „całkowity opór” w obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego.

Można łatwo się przekonać, że napięcia na cewce indukcyjnej (L), kondensatorze (C) i na oporniku (R) nie są w tej samej fazie. Rozważmy najpierw napięcie na oporniku:

$$U_R = Ri = Ri_m \cos(\omega''t - \varphi) = U_{Rm} \cos(\omega''t - \varphi) \quad (165)$$

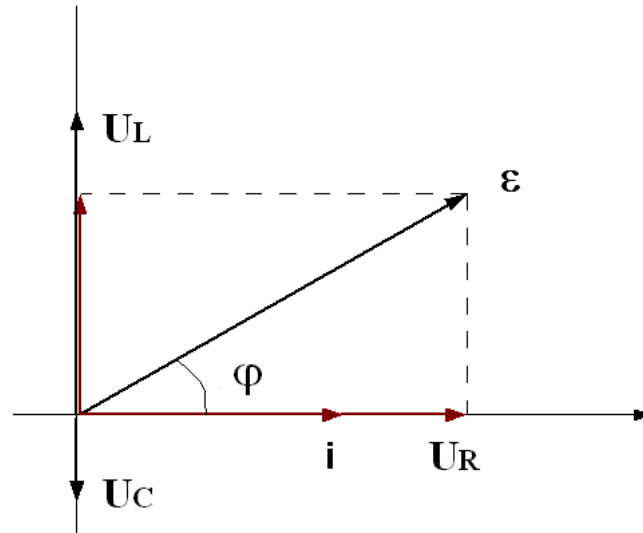
A zatem, napięcie na oporniku (a także prąd) jest opóźnione w fazie (o kąt φ) za napięciem siły elektromotorycznej ε (Równ. 156). Wyliczmy teraz napięcie na cewce indukcyjnej (U_L):

$$U_L = L \frac{di}{dt} = -L\omega''i_m \sin(\omega''t - \varphi)$$

Biorąc pod uwagę tożsamość: $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha$, napięcie na cewce możemy zapisać:

$$U_L = L\omega''i_m \cos(\omega''t - \varphi + \frac{\pi}{2}) = U_{Lm} \cos(\omega''t - \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad (166)$$

Widzimy, że napięcie na cewce (U_L) jest przesunięte w fazie o $\frac{\pi}{2}$ do przodu względem napięcia na oporniku (U_R). Podobnie można wykazać, że napięcie na kondensatorze (U_C) jest przesunięte o $\frac{\pi}{2}$ do tyłu względem U_R . I co najważniejsze, prąd i (mający tą samą fazę co U_R) jest opóźniony w fazie w stosunku do napięcia siły elektromotorycznej ε o kąt φ . Wyniki te przedstawiamy schematycznie:



Rys. 40. Przesunięcia fazowe między prądem i napięciami w obwodzie RLC

Z Równań 162, 165 i 166 wynika, że napięcia maksymalne wynoszą:

$$\begin{aligned}\varepsilon_m &= U_m = Z i_m \\ U_{R(m)} &= R i_m \\ U_{L(m)} &= \omega'' L i_m\end{aligned}$$

gdzie U_m jest amplitudą całkowitego napięcia w obwodzie (na wszystkich elementach biernych), a zatem równe sile elektromotorycznej ε_m . Podobnie, wykazuje się, że:

$$U_{C(m)} = (1/\omega'' C) i_m$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, na podstawie powyższego rysunku możemy napisać:

$$(Z i_m)^2 = (R i_m)^2 + (\omega'' L - \frac{1}{\omega'' C})^2 i_m^2$$

lub też:

$$Z^2 = R^2 + (\omega'' L - \frac{1}{\omega'' C})^2$$

co odtwarza nam definicję całkowitej impedancji Z . Możemy ją rozdzielić na składowe związane z elementami L , C i R :

$$Z^2 = R^2 + (Z_L - Z_C)^2 \quad (167)$$

gdzie:

$$Z_C = \frac{1}{\omega'' C} \quad \text{i} \quad Z_L = L \omega''$$

są impedancjami kondensatora i cewki oraz oczywiście: $L_R = R$.

Przesunięcie fazowe φ między napięciem na źródle siły elektromotorycznej a prądem, odgrywa ważną rolę w obwodach prądu sinusoidalnie zmiennego. Możemy je wyznaczyć na

podstawie powyższego rysunku:

$$\cos \varphi = \frac{U_{R(m)}}{U_m} = \frac{Ri_m}{Zi_m} = \frac{R}{Z} = R / \sqrt{R^2 + (\omega''L - 1/\omega''C)^2}$$

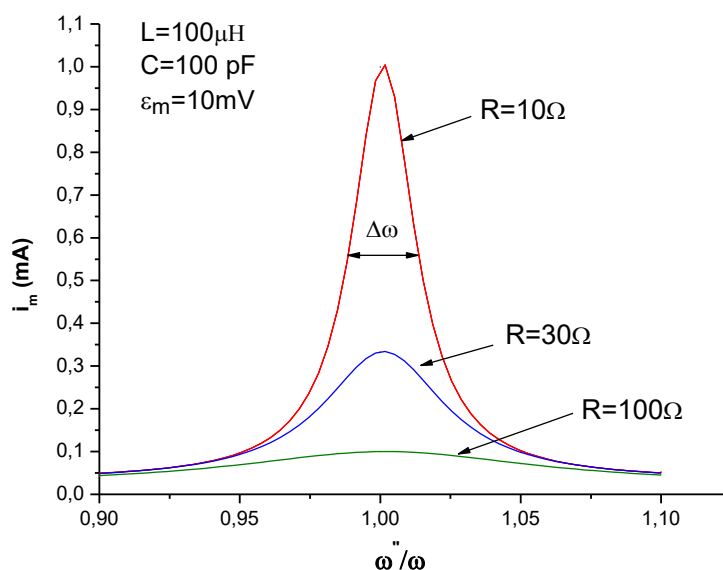
Ostatecznie:

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega''L - 1/\omega''C)^2}} \quad \text{lub też:} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad (168)$$

Wróćmy teraz do rozwiązania w układzie RLC z wymuszeniem. Wymuszeniem jest siła elektromotoryczna $\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega''t$, zaś odpowiedzią układu jest prąd elektryczny $i = i_m \cos(\omega''t - \varphi)$. Prąd (odpowiedź) ma taką samą częstotliwość jak wymuszenie, ale jest przesunięty w fazie o φ . Jak pamiętamy, częstotliwością własną układu LC była $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Z Równ. 168 wynika, że jeśli częstota wymuszenia równa jest częstotliwości własnej, czyli $\omega'' = \omega$

to wtedy impedancja osiąga wartość minimalną $Z=R$. Jest to warunek REZONANSU. Prąd płynący w obwodzie osiąga wtedy wartość maksymalną (Równ. 162). Zauważmy, że gdyby w układzie nie było w ogóle oporności, to impedancja wręcz wyniosłaby zero ($Z = 0$), co spowodowałoby przepływ nieskończenie wielkiego prądu.

W ogólnym przypadku amplituda prądu w obwodzie zależy od relacji częstotliwości przyłożonego napięcia (ω'') do częstotliwości własnej układu LC (ω). Zależność tą przedstawiono poniżej.



Rys. 41. Zależność amplitudy prądu w obwodzie RLC od częstotliwości pulsacji przyłożonego napięcia. Przy $\omega''=\omega=10^7$ rad/s występuje rezonans.

Jak pamiętamy, rezonans pojawia się także w oscylatorze mechanicznym z siłą wymuszającą.

Obwody prądu sinusoidalnie zmiennego

Zdecydowana większość urządzeń, z którymi mamy do czynienia w życiu codziennym, zasilana jest napięciem sinusoidalnie zmiennym, a zatem także płyną w nich prądy sinusoidalnie zmienne. Dla prądów tych definiuje się praktyczne w zastosowaniach pojęcia

wielkości skutecznych.

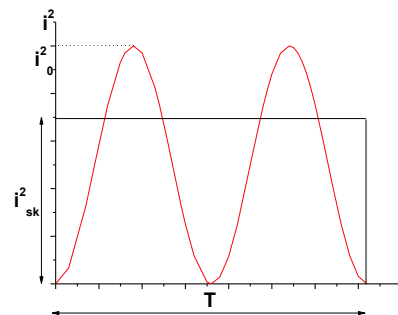
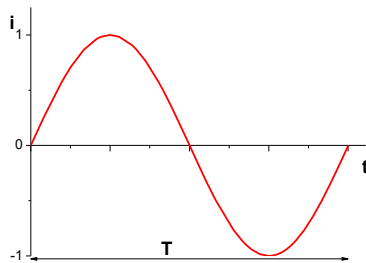
1. Natężenie i napięcie skuteczne

Natężeniem skutecznym prądu zmiennego, i_{sk} , nazywamy takie natężenie prądu stałego, które daje tę samą moc średnią (czyli tę samą energię elektryczną w jednostce czasu). Przypomnijmy, że moc prądu elektrycznego: $P = i^2/R$. Chcemy zatem znaleźć takie i_{sk} , aby pole prostokąta $i_{sk}^2 T$ było równe polu pod krzywą i^2 (gdzie: $i = i_m \sin \omega t$, zaś T jest okresem sinusoidy - patrz rysunek poniżej), czyli:

$$\int_0^T i^2 dt = \int_0^T i_m^2 \sin^2 \omega t dt = i_{sk}^2 T$$

lub:

$$\int_0^T i_m^2 \sin^2 \omega t dt = i_m^2 \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \omega t) dt = \frac{i_m^2}{2} \int_0^T dt - \frac{i_m^2}{2} \underbrace{\int_0^T \cos 2 \omega t dt}_0 = \frac{i_m^2}{2} T$$



Zatem: $\frac{i_m^2 T}{2} = i_{sk}^2 T$, czyli:

$$i_{sk} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \quad (169)$$

Podobnie definiuje się napięcie skuteczne:

$$U_{sk} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (170)$$

Można łatwo wykazać, że średnia moc prądu zmiennego:

$$P = U_{sk} I_{sk} \cos \varphi \quad (171)$$

Iloczyn $U_{sk} I_{sk}$ - nazywamy mocą pozorną, zaś $\cos \varphi$ - współczynnikiem mocy.

Impedancja

Jak już mówiliśmy, impedancja (Z) jest wielkością równoważną oporowi, ale w obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego:

$$U_{sk} = Z i_{sk} \quad \text{oraz} \quad U_m = Z i_m \quad (172)$$

Jak widzieliśmy, impedancję składamy wektorowo z jej składowych: Z_L, Z_C, Z_R

Podsumowanie równań opisujących pola elektryczne i magnetyczne

VII. RÓWNANIA MAXWELLA

Zbierzemy teraz i uogólnimy poznane już prawa dla próżni (lub w bardzo dobrym przybliżeniu dla powietrza):

1) Prawo Gaussa dla elektryczności :

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (173)$$

2) Prawo Gaussa dla magnetyzmu :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (174)$$

Prawo to wyraża fakt, że linie pola magnetycznego tworzą zawsze zamknięte kontury. Nie ma „ładunków” magnetyzmu, w takim sensie jak ładunki elektryczne. Pole magnetyczne jest wytwarzane przez obwody z prądem (makroskopowe lub mikroskopowe) oraz przez spinowe momenty magnetyczne cząstek elementarnych.

3) Prawo indukcji elektromagnetycznej Faraday’a:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (175)$$

Jeśli na konturze całkowania w powyższym równaniu występują siły elektromotoryczne (ε_k), to trzeba je włączyć do bilansu zmiany potencjału:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} + \sum_k \varepsilon_k \quad (176)$$

4) Prawo Ampère’a :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k i_k \quad (177)$$

gdzie i_k są prądami przecinającymi zamknięty kontur całkowania. Porównując powyższe równanie z prawem Faraday’a, zauważymy pewne ich podobieństwo, a także brak jednego członu po prawej stronie. Kierując się wyjściowo tą intuicją, Maxwell rozszerzył prawo Ampère’a dodając człon z pochodną po strumieniu pola elektrycznego (Φ_E):

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k i_k + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (178)$$

Ten dodatkowy człon opisuje doświadczalnie obserwowany efekt, że zmienne pole elektryczne wytwarza wirowe pole magnetyczne (uzasadnienie rozszerzenia powyższego równania podane jest w Dodatku, poniżej). Mamy tu pełną analogię z prawem Faraday’a

(zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne). Zauważmy, że prawa Ampère'a i Faraday'a (Równ. 177 i 178) wykazują formalne podobieństwo matematyczne lub inaczej – symetrię (z wyjątkiem znaku minus w Równ. 176).

Fale elektromagnetyczne

Zmienne pola elektryczne i magnetyczne generują się nawzajem. Jeśli zatem wytworzymy, np. zmienne pole magnetyczne, to w wyniku tego powstanie fala elektromagnetyczna. Równanie jej wyprowadza się oczywiście z równań Maxwella (czego tu nie będziemy robić). W fali elektromagnetycznej drganiom podlegają wektory \mathbf{B} i \mathbf{E} ; fala ta nie wymaga ośrodka materialnego do swojej propagacji. Równanie różniczkowe fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w kierunku osi x opisuje zależność na amplitudy pola magnetycznego i elektrycznego::

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \quad (179)$$

oraz

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (180)$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni ($c=3 \cdot 10^8$ m/s).

Pola E i B są prostopadłe do siebie oraz do kierunku rozchodzenia się fali. Zauważmy, że powyższe równania mają analogiczną postać do poznanego przez nas wcześniej równania fali mechanicznej:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Rozwiązaniem Równ. 179 i 180 ma także postać analogiczną jak w przypadku fali mechanicznej:

$$\begin{aligned} B_z(x, t) &= B_{z(m)} \sin(kx - \omega t) \\ E_y(x, t) &= E_{y(m)} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (181)$$

Pomiędzy stałymi μ_0 i ϵ_0 zachodzi fundamentalny związek, który otrzymuje się przy wprowadzeniu równania na falę elektromagnetyczną; jest on następujący:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (182)$$

Ponadto otrzymuje się następująca zależność:

$$\frac{E_m}{B_m} = c \quad (182)$$

Interesującą wielkością charakteryzującą falę elektromagnetyczną jest wektor Poyntinga:

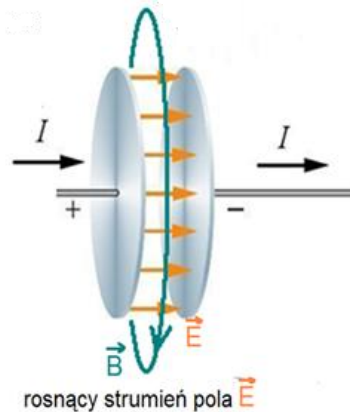
$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (183)$$

Wyraża on szybkość przepływu energii przez jednostkową powierzchnię dla płaskiej fali elektromagnetycznej.

Częstotliwości ($f=\omega/2\pi$) poznanych fal elektromagnetycznych rozciąga się w bardzo szerokim zakresie: od 10^3 Hz (fale radiowe długie) do 10^{20} Hz (promieniowanie jądrowe gamma). Dodamy, że częstotliwości radiowe UKF oraz telewizyjne to 10^8 Hz, światło widzialne mieści się pomiędzy 10^{14} i 10^{15} Hz, zaś częstotliwości promieniowania rentgenowskiego są w zakresie 10^{17} - 10^{19} Hz.

DODATEK: Uzasadnienie rozszerzenia prawa Ampère'a

Rozważmy kondensator, na którego okładki wpływa prąd elektryczny i (czyli kondensator jest ładowany).



Natężenie pola elektrycznego między okładkami kondensatora: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$, zaś jego strumień:

$$\Phi_E = ES = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Wyliczmy wielkość $\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$:

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 \frac{dQ}{dt} = \mu_0 i$$

Wyrażenie to jest dokładnie równe prawej stronie Równ. 177. A zatem, gdy w prawie Ampère'a dodamy ten człon:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (181)$$

to rozszerzone równanie jest zawsze spełnione, niezależnie od tego jaki kształt ma powierzchnia rozpięta na konturze całkowania O . Oczywiście poszerzona postać prawa Ampère'a jest prawdziwa w dowolnej ogólnej sytuacji, a nie tylko w modelowym rozważaniu przedstawiony powyżej. Sens fizyczny tego rozszerzenia jest następujący:

Przewodniki z prądem oraz zmiennie pola elektryczne wytwarzają wirowe pole magnetyczne.