

Elektromagnetyzm

Elektromagnetyzm

Budowa materii:

Nazwa	Oznaczenie	Ładunek	Masa
Elektron	e^-	$-e$	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Proton	p	$+e$	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron	n	0	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

ładunek elementarny:

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Oddziaływanie między dwoma ładunkami :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \text{prawo Coulomba}$$

stała dielektryczna: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

stała proporcjonalności: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

A zatem:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Opis pola elektrycznego

1) ładunek – ładunek:

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

2) ładunek - pole – ładunek:

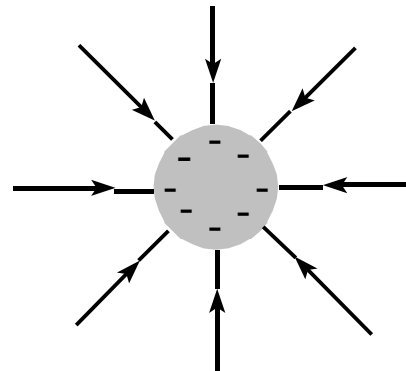
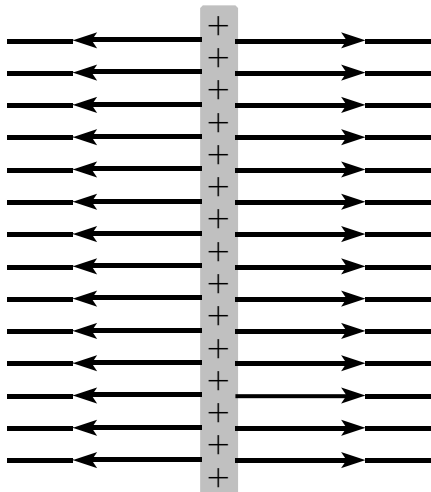
natężenie pola elektrycznego:

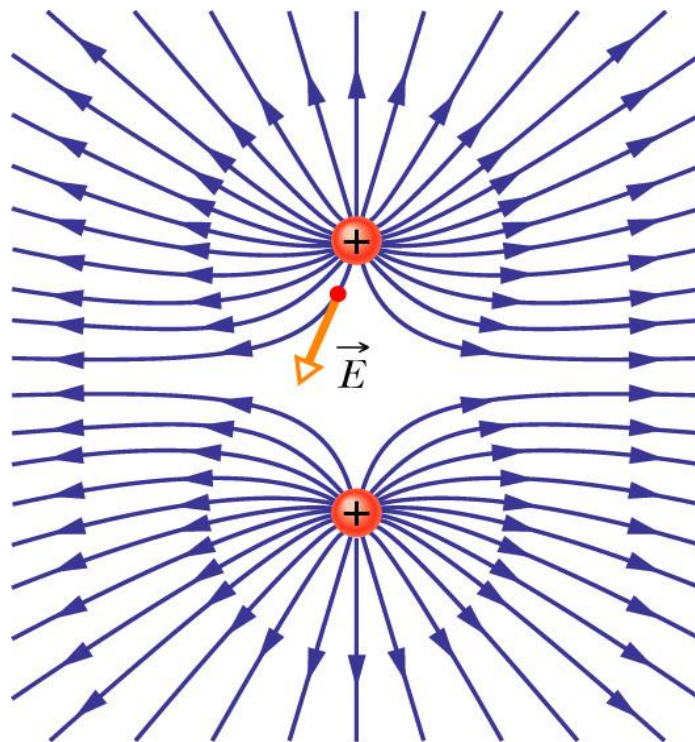
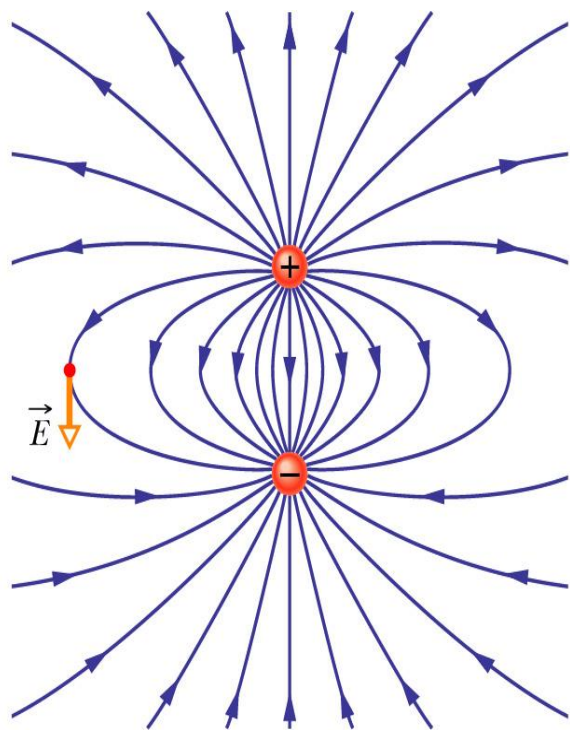
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

Linie sił pola elektrycznego

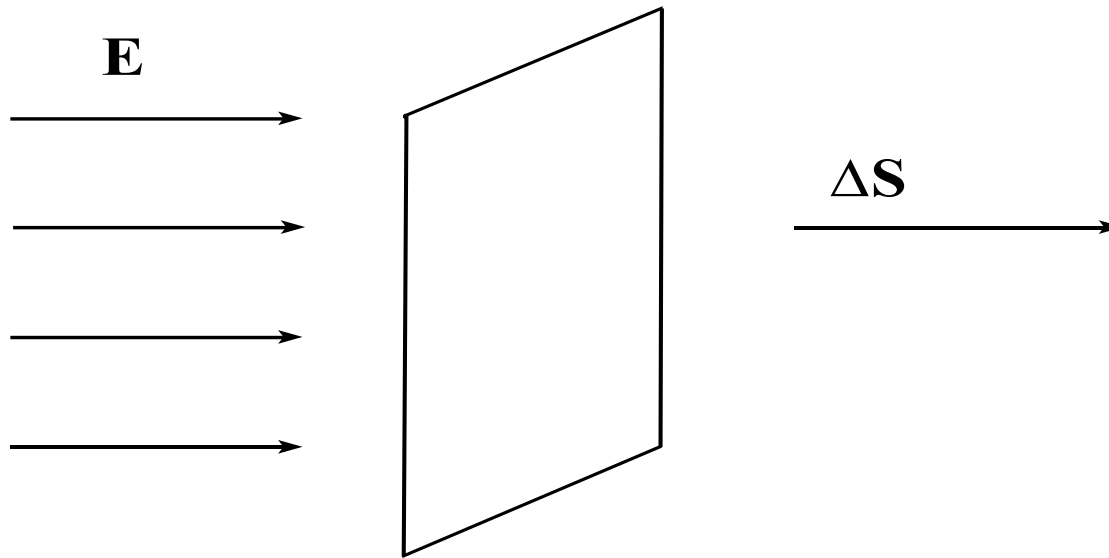
a) $\mathbf{E}$ jest styczne do linii sił

b) Ilość linii na jednostkę powierzchni przekroju poprzecznego jest proporcjonalna do E





Prawo Gaussa

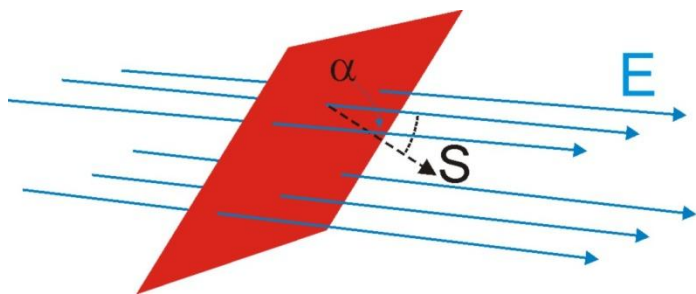


Strumień pola elektrycznego Φ :

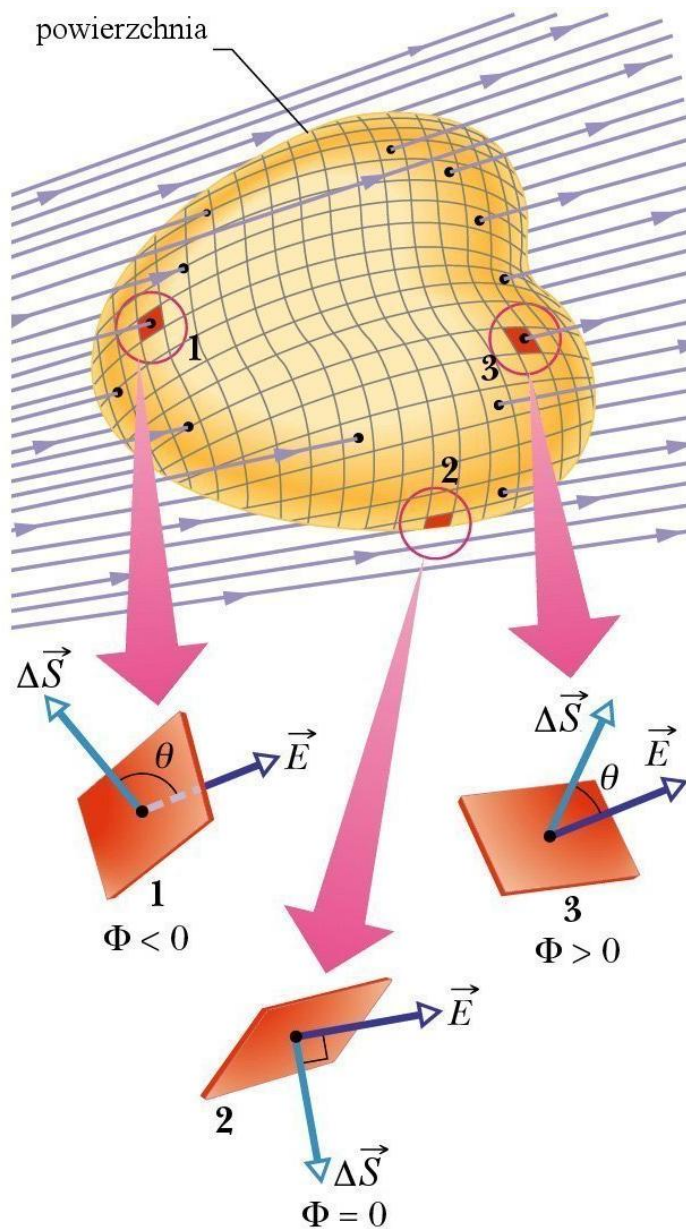
$$\Delta\Phi = \mathbf{E} \bullet \Delta\mathbf{s}$$

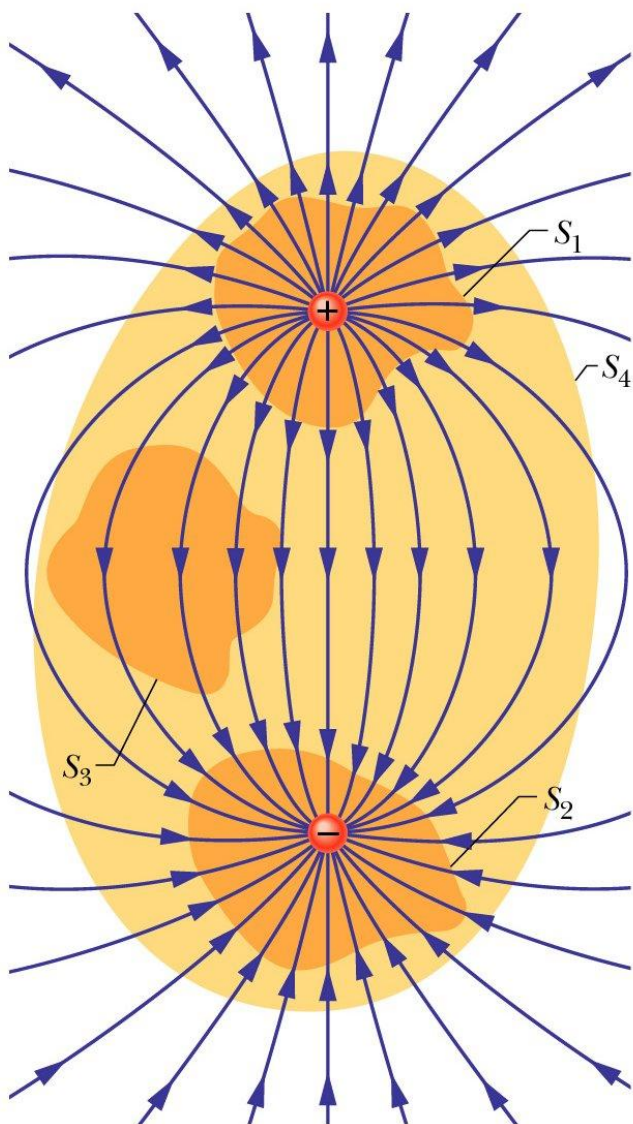
$$\Phi = \sum_i \mathbf{E}_i \bullet \Delta\mathbf{s}_i$$

$$\Phi = \int_{S_0} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S}$$



$$\Phi = \int_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

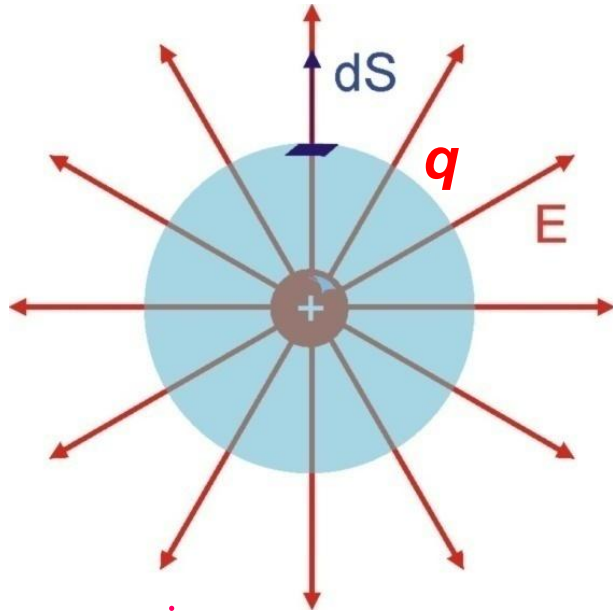




Całkowity strumień przez:
powierzchnię „1” jest dodatni,
powierzchnię „2” jest ujemny,
powierzchnię „3” jest równy zero,
powierzchnię „4” jest równy zero.

Przykład: Strumień pola od ładunku punkowego przechodzący przez kulę

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_o}{r^2} \cdot \Rightarrow E(r) = \frac{F(r)}{q_o} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot$$



$$\Phi = E(r) 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

Dodajemy indeks „E”, aby pamiętać, że to pole elektryczne:

$$\epsilon_0 \Phi_E = q$$

Prawo Gaussa:

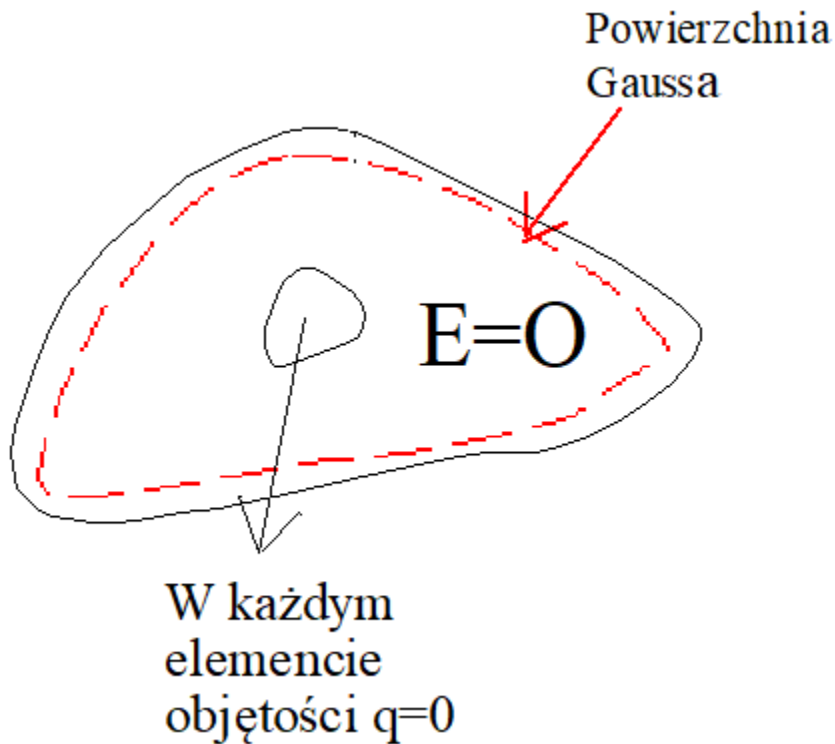
$$\varepsilon_0 \Phi_E = q$$

lub

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q$$

Zastosowania prawa Gausa:

a) Rozkład ładunku w przewodniku izolowanym



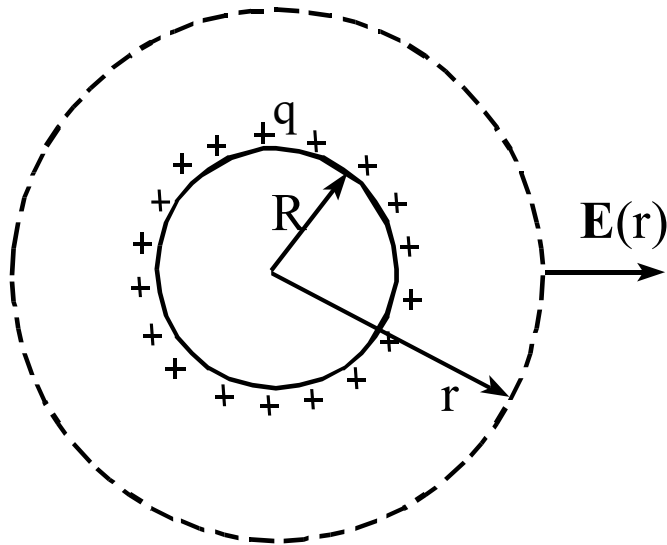
Wewnątrz przewodnika $E = 0$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$q_{\text{wewn}} = 0$$

Cały ładunek gromadzi się na powierzchni przewodnika

b) Pole na zewnątrz naładowanej kuli

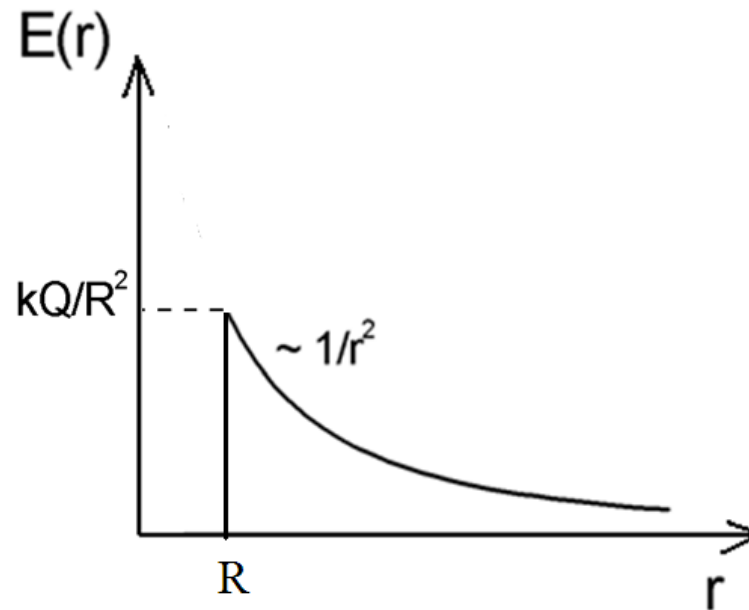


$$\epsilon_0 \Phi_E = q$$

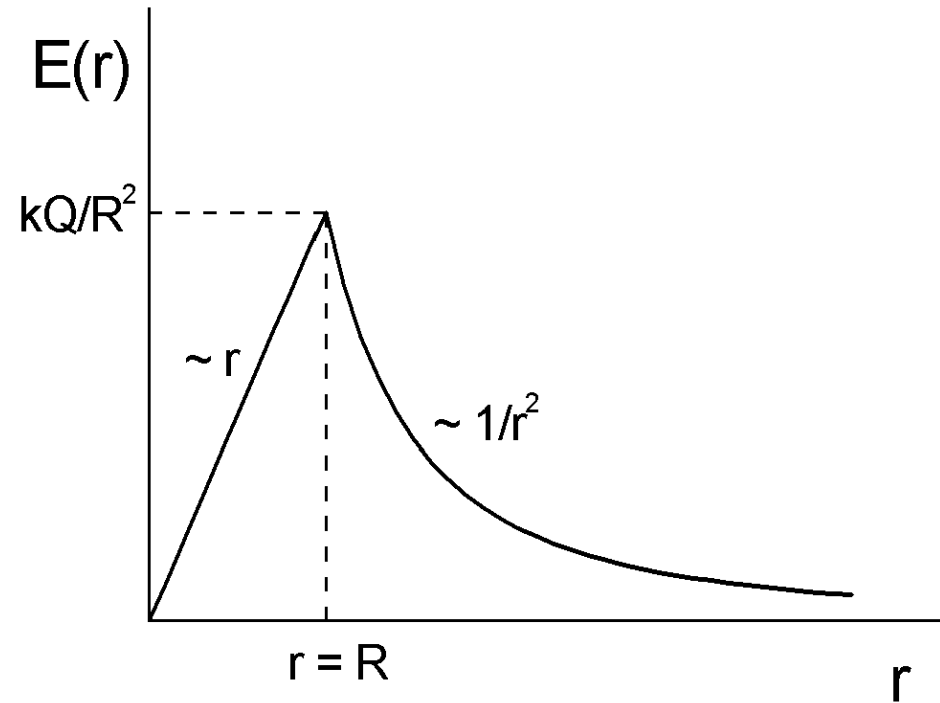
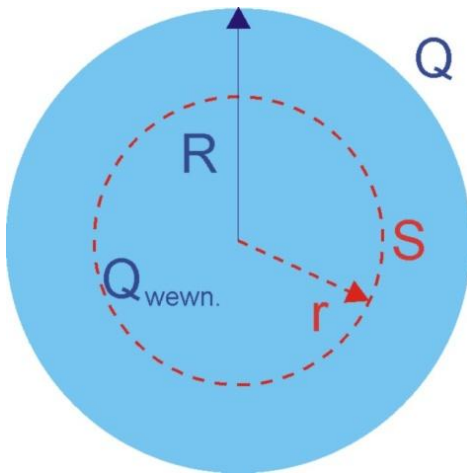
$$\epsilon_0 4\pi r^2 E = q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{lub:}$$

$$E = k \frac{q}{r^2}$$

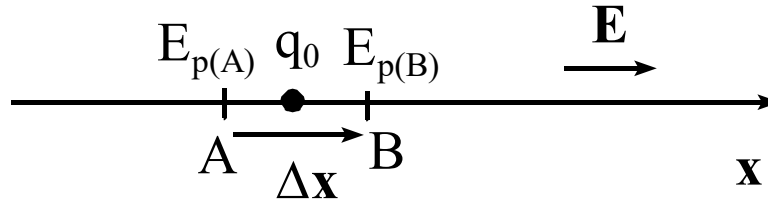


Jednorodnie naładowana kula



Potencjał elektryczny

Wyliczmy pracę, jaką wykonuje pole $\mathbf{E}$, które przemieszcza ładunek q_0 od punktu A do B :



$$E_{p(A)} - E_{p(B)} = \mathbf{F} \bullet \Delta \mathbf{x}$$

Przyrost energii potencjalnej:

$$\Delta E_p = E_{p(B)} - E_{p(A)} = -\mathbf{F} \bullet \Delta \mathbf{x}$$

Potencjał elektryczny:

$$V = \frac{E_p}{q_0}$$

Natężenie pola elektrycznego:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

$$V_B - V_A = -\mathbf{E} \bullet \Delta \mathbf{x}$$

zatem:

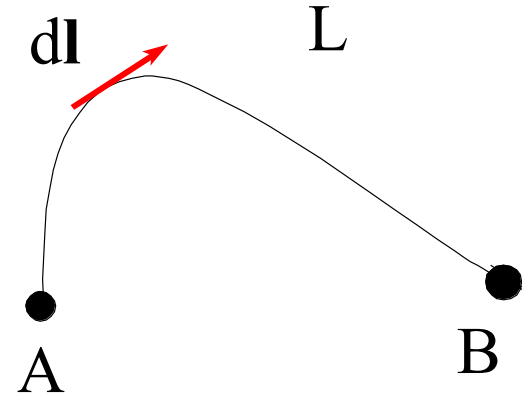
$$\Delta V = -\mathbf{E} \bullet \Delta \mathbf{x}$$

lub:

$$dV = -\mathbf{E} \bullet d\mathbf{x}$$

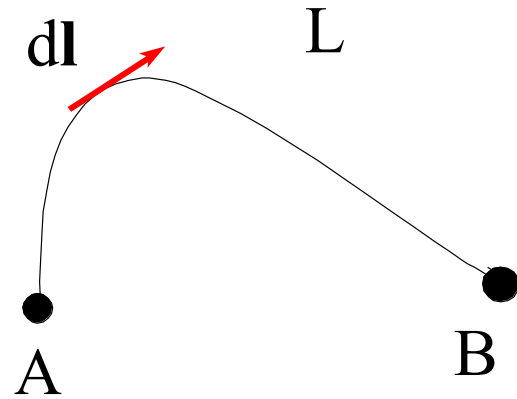
W ogólniejszym przypadku:

$$V_B = V_A + \int_A^B dV$$



$$V_B = V_A - \int_A^B \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l}$$

$$V_B = V_A - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



Jeśli ładunek q_0 został przemieszczony z nieskończoności ($A=\infty$), to zgodnie z konwencją, że $V_\infty=0$, otrzymamy:

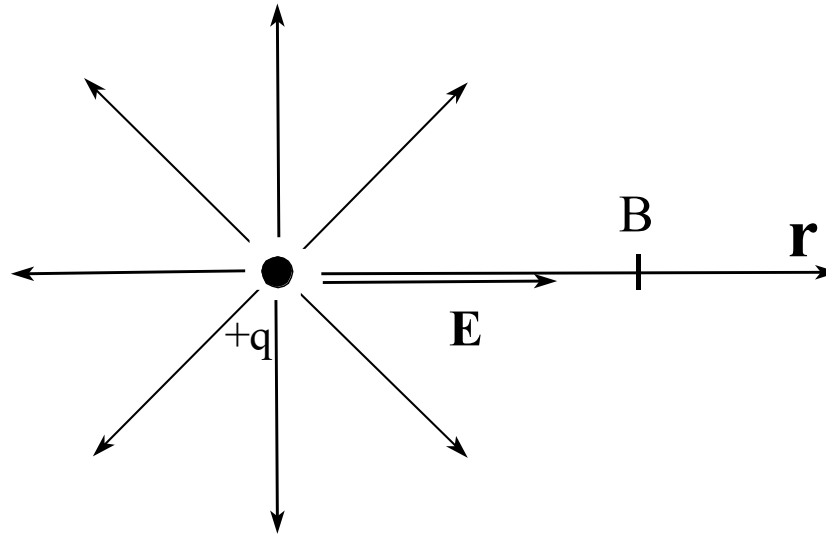
$$V_B = - \int_{\infty}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Potencjał w p. B jest pracą (ze znakiem minus), jaką wykona pole przemieszczając jednostkowy ładunek z nieskończoności do tego punktu

Ogólnie:

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Przykład: potencjał od ładunku punktowego



$$V_B = - \int_{\infty}^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r}$$

$$V_B = \int_B^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r} = \int_B^{\infty} E(r) dr$$

Podstawiając:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

otrzymujemy:

$$V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_B^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_B}^{\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

lub ogólniej:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

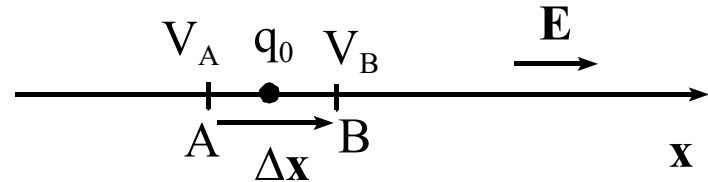
Jeśli pole elektryczne wytwarzane jest przez układ ładunków punktowych to :

$$V = \sum_n V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \frac{q_n}{r_n}$$

Wyliczenie pola $\mathbf{E}$ znając potencjał V

Pamiętamy równanie:

$$\Delta V = -\mathbf{E} \bullet \Delta \mathbf{x}$$



lub:

$$\Delta V = -E_x \Delta x$$

$$E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

I ostatecznie:

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Ogólnie:

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

$$E_y = -\frac{dV}{dy}$$

$$E_z = -\frac{dV}{dz}$$

Dowolne pole E odtwarzamy z jego składowych:

$$\mathbf{E} = xE_x + yE_y + zE_z$$

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{z}\right)$$

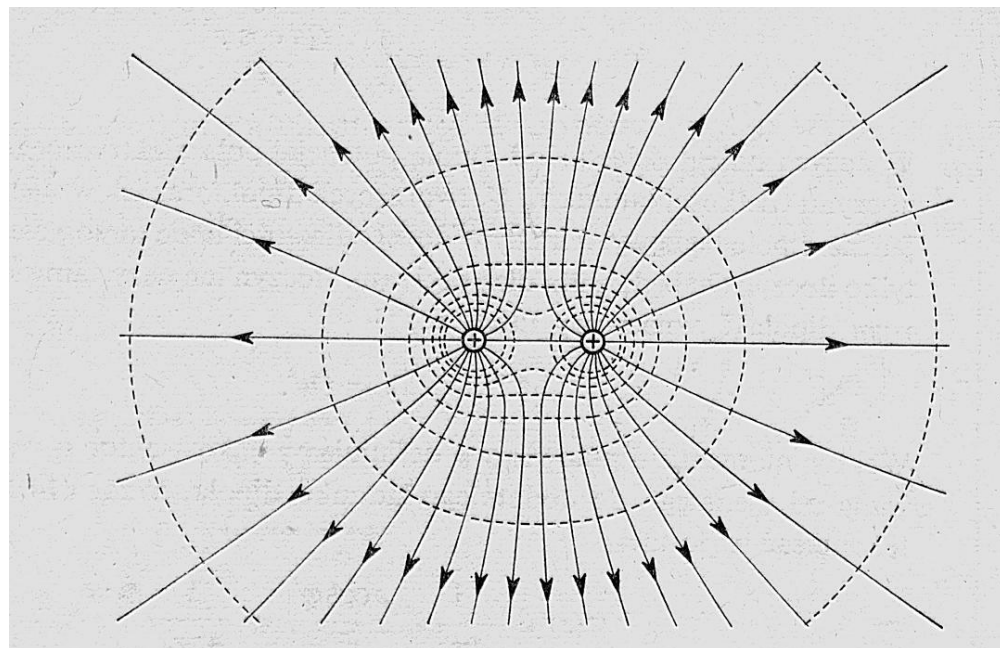
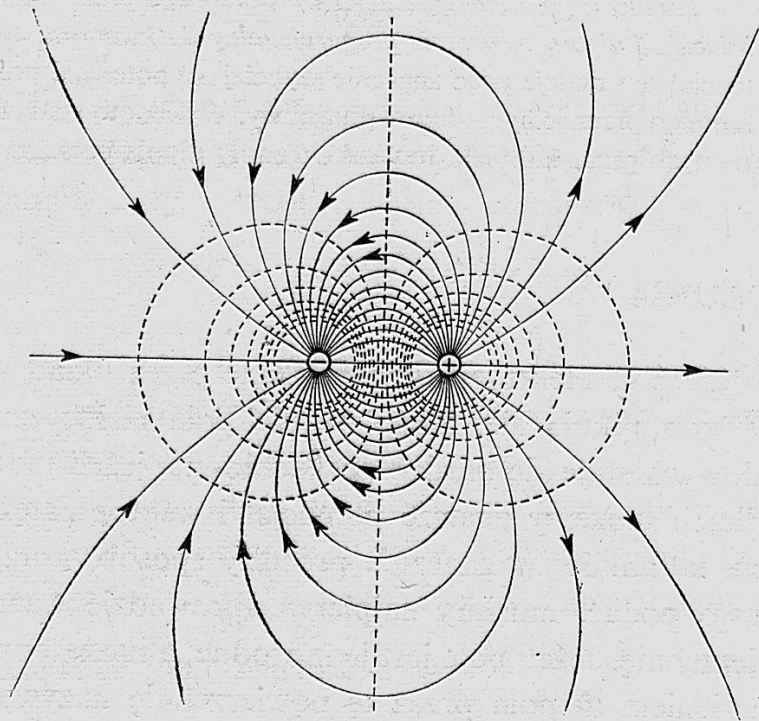
lub:

$$\mathbf{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

lub:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

operator 'nabla': $\nabla = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{y} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{z}\right)$



Zasada superpozycji – potencjał i natężenie

Wypadkowe natężenie pola $\mathbf{E}$, obliczamy dodając wektorowo natężenia pól od pojedynczych ładunków.

Wypadkowy potencjał pola (energię potencjalną), obliczamy dodając skalarnie potencjały pól od pojedynczych ładunków.

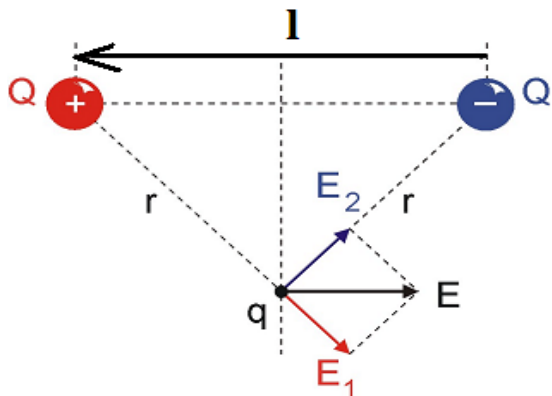
dla N ładunków punktowych

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^N k \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i$$

oraz:

$$V = \sum_{i=1}^N V_i = \sum_{i=1}^N k \frac{Q_i}{r_i}$$

Przykład : dipol elektryczny



dipol elektryczny: $p = Q l$

$$\frac{E}{E_1} = \frac{l}{r}$$

$$E = \frac{l}{r} E_1 = \frac{l}{r} \left(k \frac{Q}{r^2} \right) = k \frac{Ql}{r^3} = k \frac{p}{r^3}$$

oraz

$$V = k \frac{Q}{r} - k \frac{Q}{r} = 0$$

Kondensatory i dielektryki

Pojemność elektryczna odosobnionego przewodnika :

$$C = \frac{q}{V}$$

Przykład 1: Pojemność elektryczna odosobnionej kuli metalowej

potencjał na powierzchni naładowanej kuli: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$

Zatem:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Przykład 2: Pojemność elektryczna kondensatora płaskiego

Dla układu dwóch przewodników:

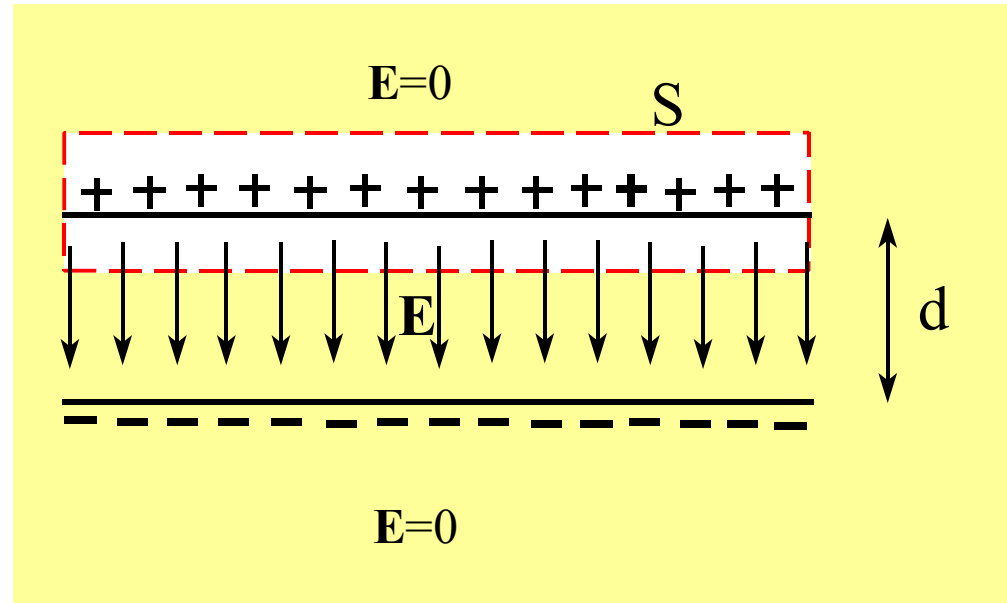
$$C = \frac{q}{U} \quad \text{gdzie: } U = \Delta V$$

$$\Phi_E = ES$$

Z prawa Gaussa:

$$\varepsilon_0 \Phi_E = \varepsilon_0 ES = q$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$



$$U = \Delta V = V_A - V_B = Ed$$

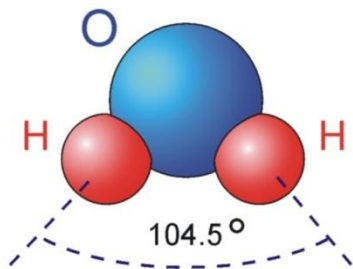
bo: $(\Delta V = -\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{x})$

Pojemność kondensatora płaskiego:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

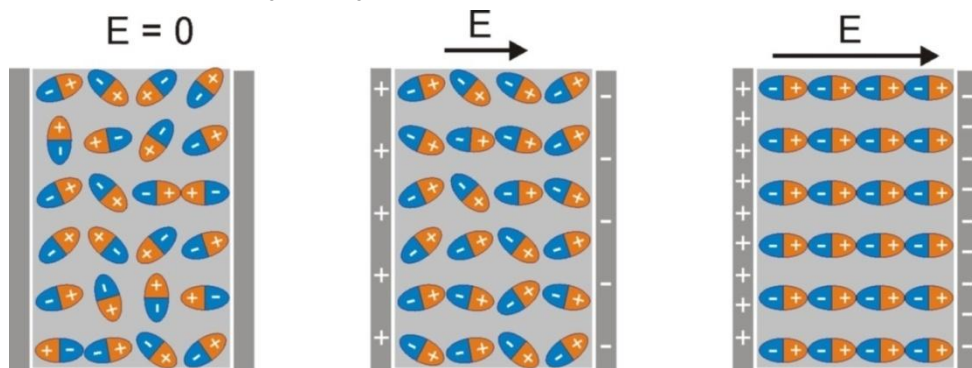
Polaryzacja dielektryków

1. Istnieją cząsteczki, w których środek ładunku dodatniego jest trwale przesunięty względem środka ładunku ujemnego. Takie cząsteczki mają trwały elektryczny moment dipolowy p .



w cząsteczce wody ładunek ujemny jest przesunięty w stronę atomu tlenu, a środek ładunku dodatniego jest bliżej atomów wodoru

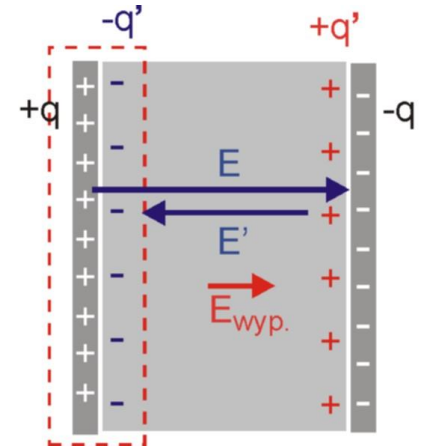
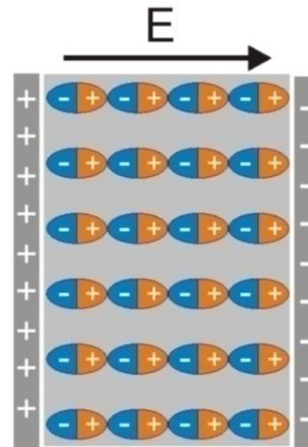
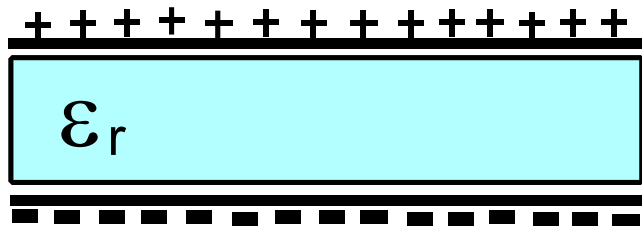
2. Moment dipolowy p może być wyindukowany przez umieszczenie atomów w zewnętrznym polu elektrycznym.



- W zerowym polu trwałe momenty dipolowe są zorientowane przypadkowo

- Po umieszczeniu w polu elektrycznym trwałe elektryczne momenty dipolowe dążą do ustawienia zgodnie z kierunkiem pola, czyli materiał w polu E zostaje spolaryzowany.

Kondensator z dielektrykiem



$$E_{\text{wyp}} < E$$

$$U_d < U_0$$

$$U_d = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

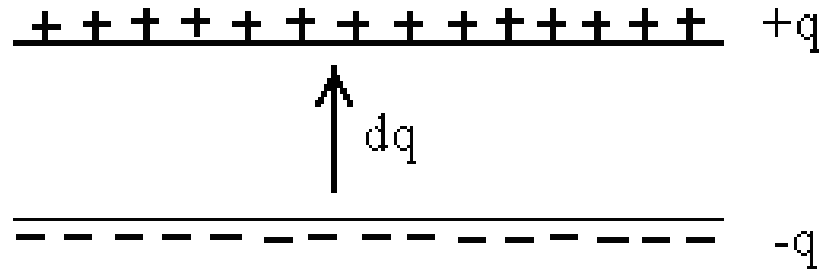
ϵ_r - jest przenikalnością względną ośrodka

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d}$$

Przykładowe względne przenikalności elektryczne

	ϵ_r
Próżnia	1,00000
Powietrze	1,00054
Woda	78
Szkło pyreksowe	4,5
Porcelana	6.5
Dwutlenek tytanu	100
Ceramika tytanowa	130
Tytanian strontu	310

Energia pola elektrycznego



W – praca ładowania kondensatora:

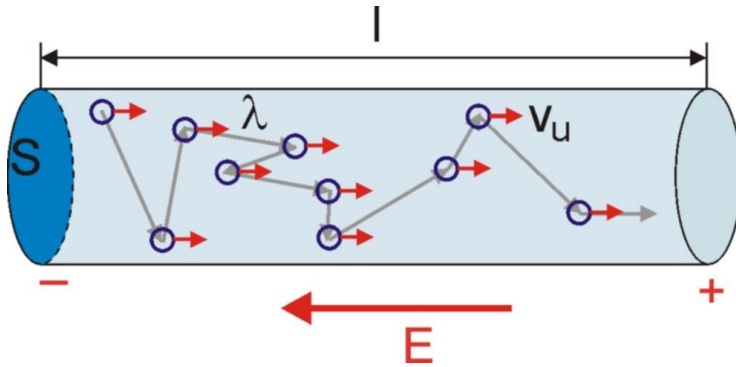
$$dW = U dq$$

$$W = \int_0^Q U dq = \int_0^Q \left(\frac{q}{C} \right) dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} U^2 C$$

lecz: $U = Ed$ $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ $W = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 V$

$$u = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2$$

Natężenie i opór prądu elektrycznego



Natężenie prądu elektrycznego : $i = \frac{q}{t}$

lub :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$q = (nSl)e$$

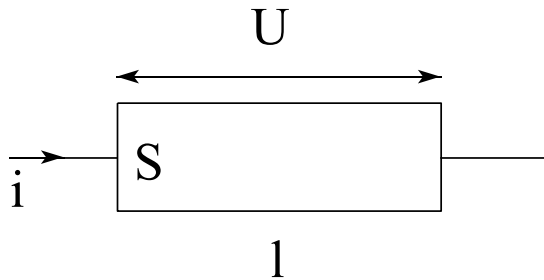
$$i = \frac{q}{t} = \frac{nSle}{\frac{1}{v_u}} = nSev_u$$

gęstość prądu:

$$j = \frac{i}{S}$$

$$j = \frac{i}{S} = nev_u$$

Opór elektryczny



$$R = \frac{U}{i}$$

prawo Ohma

$$1\Omega = \frac{V}{A}$$

$$\rho = \frac{E}{j}$$

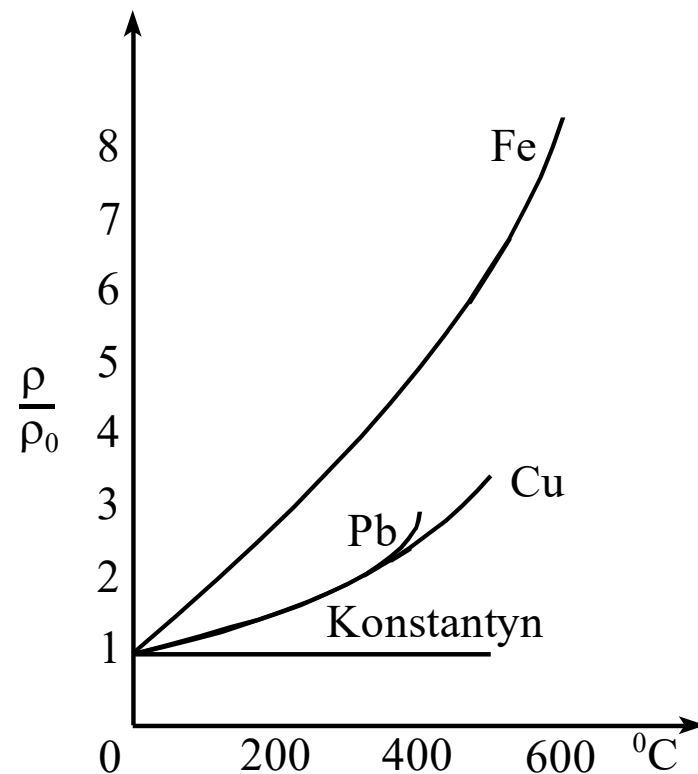
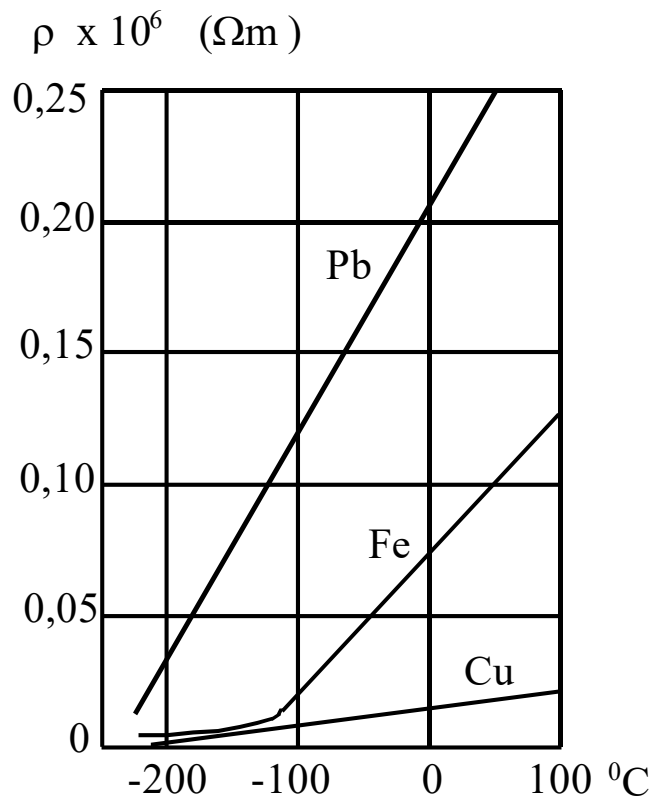
Opór właściwy

$$U = \Delta V = El \Rightarrow E = \frac{U}{l} \quad j = \frac{i}{S}$$

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{US}{li} = \frac{RS}{l}$$

$$R = \frac{\rho l}{S}$$

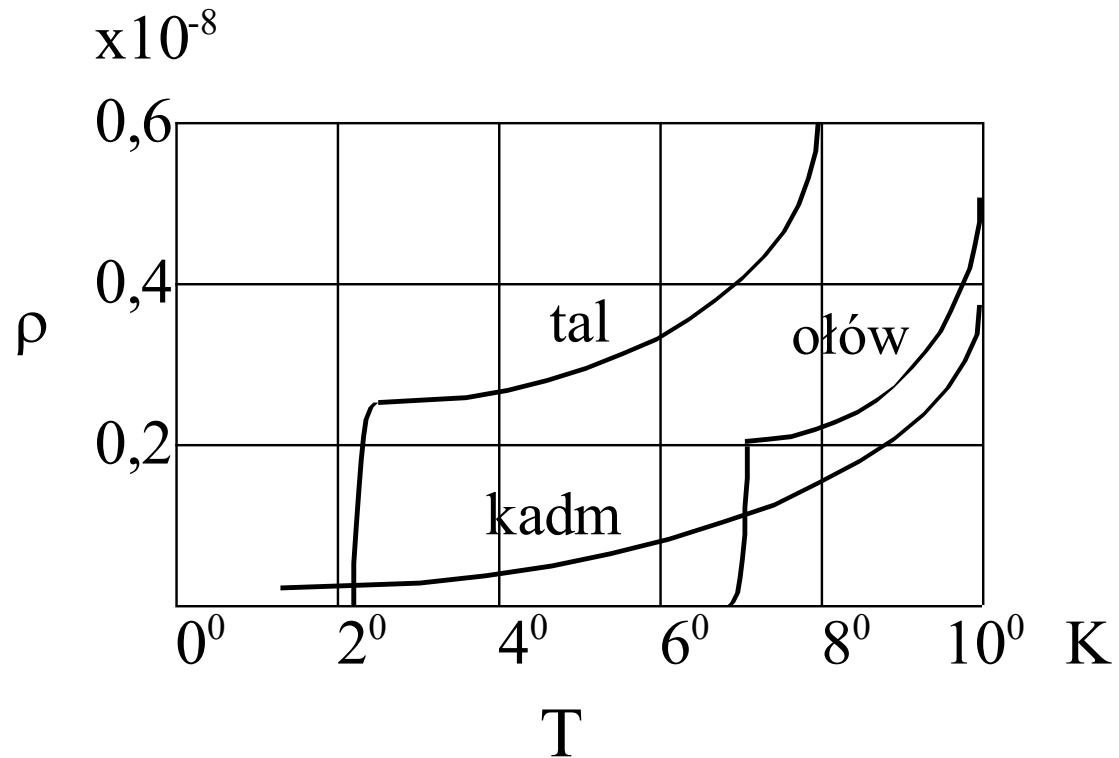
Zmiana oporu właściwego z temperaturą



$$\Delta\rho = \rho_0 \bar{\alpha} \Delta T$$

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho = \rho_0 (1 + \bar{\alpha} \Delta T)$$

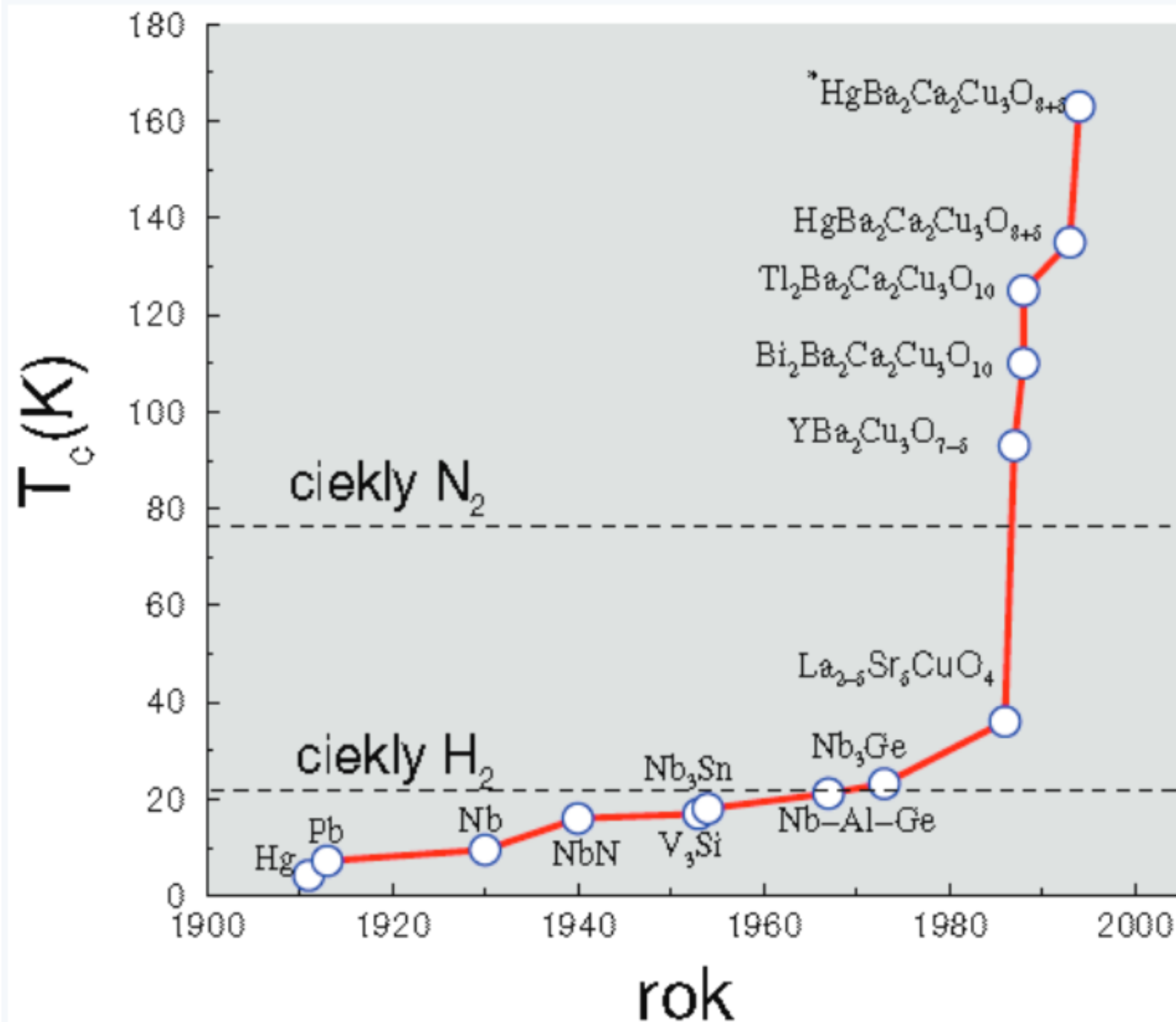
NADPRZEWODNICTWO



Oporność właściwa w funkcji temperatury dla zwykłego przewodnika (kadm) i dla nadprzewodników (tal, ołów)

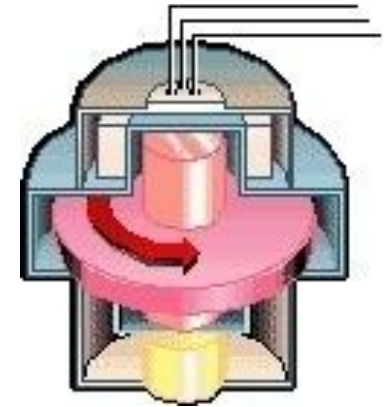
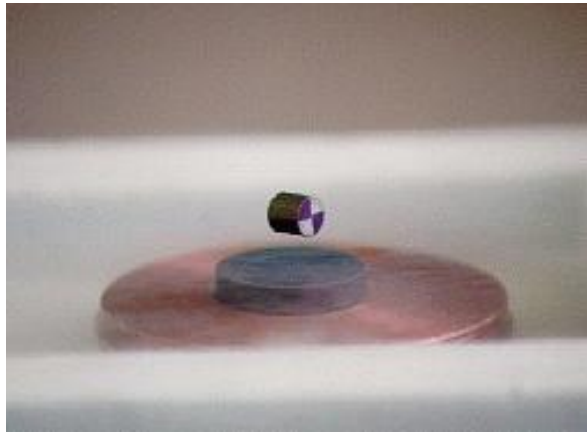
IA																	0
H	IIA											IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	He
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
Fr	Ra	Ac	Unq	Unp	Unh	Uns	Uno	Une	Uun	Uuu	Uub						
			La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
			Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr

Historia
odkryć...



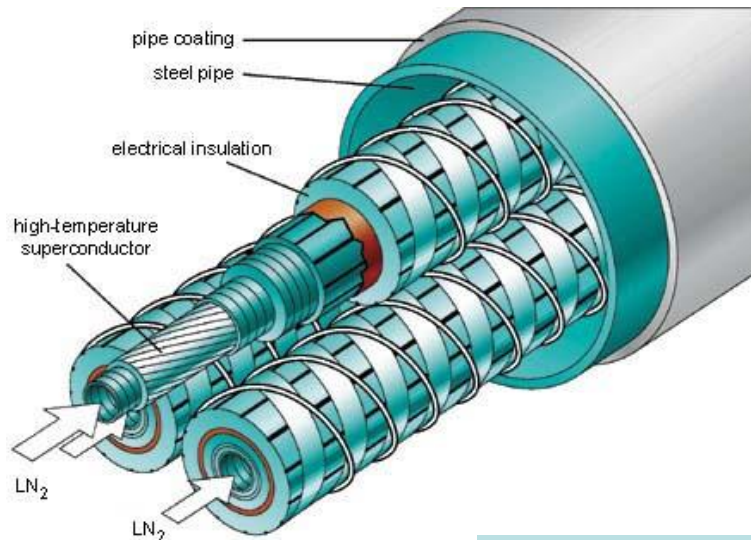
Nadprzewodnictwo

Łożyska Magnetyczne
z nadprzew. wysokotemp.



Rotor (a flywheel) w próżni
jako zbiornik energii

Prądy wzbudzone w stanie
nadprzewodzącym utrzymują się
bez zasilania zewnętrznego



nadprzewodzący kabel



MagLev – Pociąg (magnetic
levitation)

Podsumowanie: Prawo Ohma

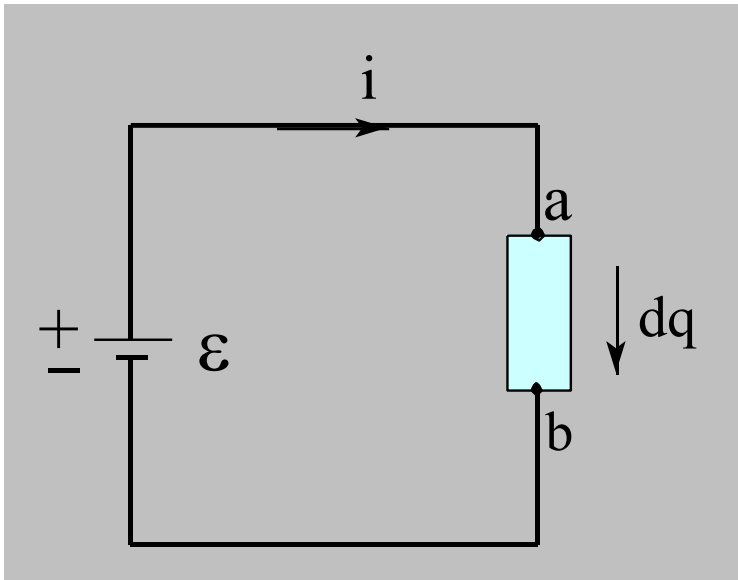
$$U = iR$$

lub równoważnie:

$$E = j\rho$$

Przemiany energii w obwodzie elektrycznym

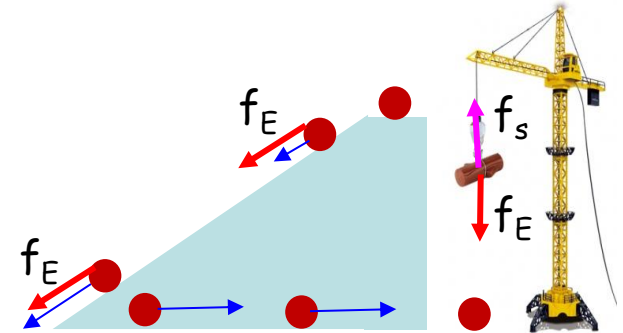
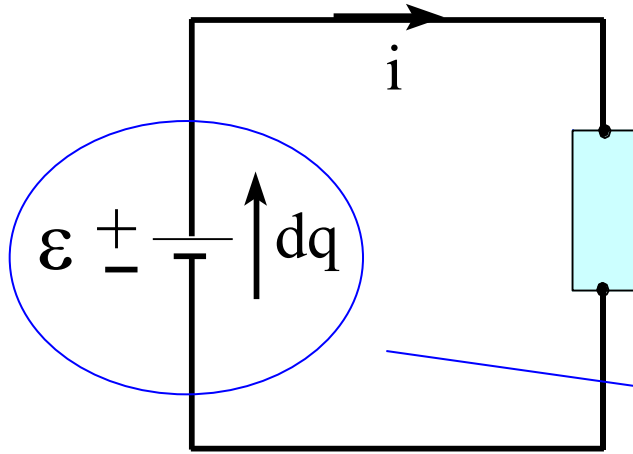
$$dW = dq U_{ab} = i dt U_{ab}$$



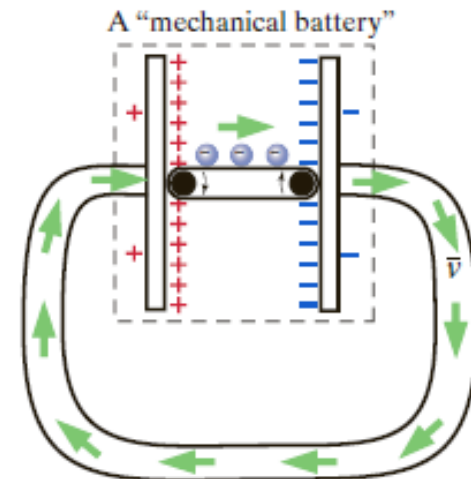
$$P = \frac{dW}{dt} = i U_{ab}$$

$$P = iU$$

Siła elektromotoryczna (SEM)



$$dW = \varepsilon dq$$



Obliczanie obwodów elektrycznych

a) I prawo Kirchoffa:

W dowolnym węźle obwodu algebraiczna suma prądów musi być równa zero:

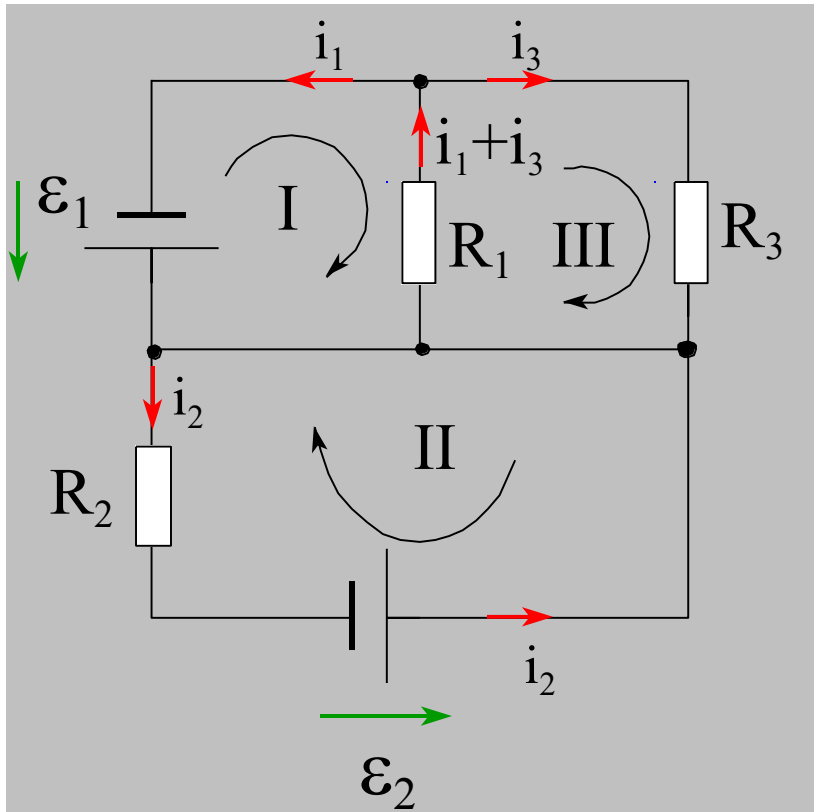
$$\sum_k i_k = 0$$

b) II Prawo Kirchoffa:

Suma zmian potencjału (napięć) napotykanym przy okrążeniu dowolnego zamkniętego konturu (oczka) jest równa zero:

$$\sum_k U_k + \sum_i \varepsilon_i = 0$$

Przykład: obliczenie obwodu zawierającego trzy oczka



$$(i_3 + i_1)R_1 - \varepsilon_1 = 0 \quad \text{oczko I}$$

$$i_2 R_2 - \varepsilon_2 = 0 \quad \text{oczko II}$$

$$-i_3 R_3 - (i_1 + i_3)R_1 = 0 \quad \text{oczko III}$$

Pole magnetyczne

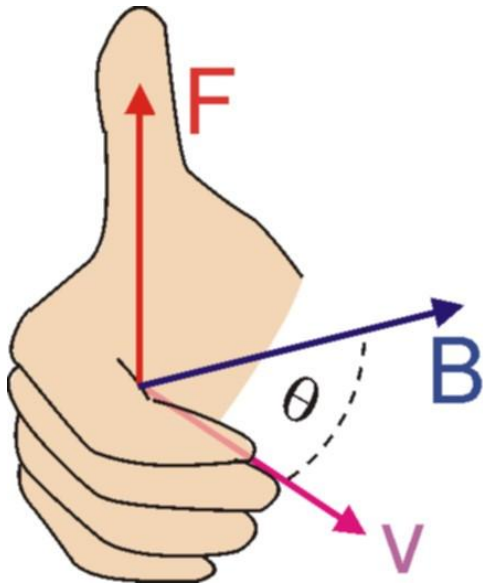
Pole magnetyczne definiujemy poprzez siłę działającą na poruszający się ładunek:

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Siła Lorentza

Jednostka indukcji B to tesła (T) :

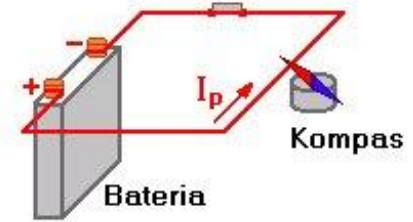
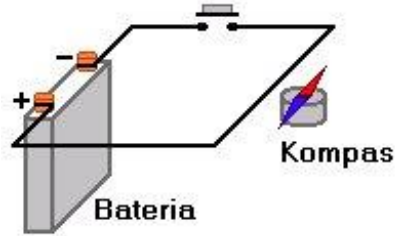
$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}}$$



Źródło pola B	$B_{\text{maks.}} [\text{T}]$
Pracujący mózg	10^{-13}
Ziemia	$\approx 4 \cdot 10^{-5}$
Elektromagnes	2
Cewka nadprzewodząca	20
Cewka impulsowa	70
Gwiazda neutronowa	$\approx 10^8$

POLE MAGNETYCZNE I JEGO ŹRÓDŁA

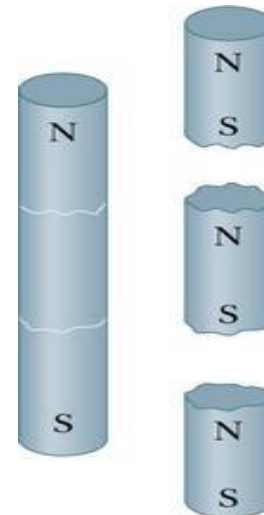
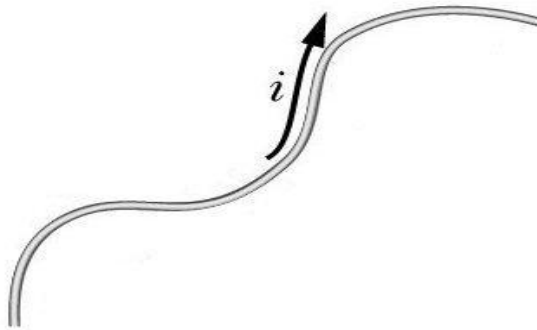
Doświadczenie Oersteda (1820)



Oddziaływanie pomiędzy prądem i magnesem opisujemy wprowadzając pojęcie pola magnetycznego.

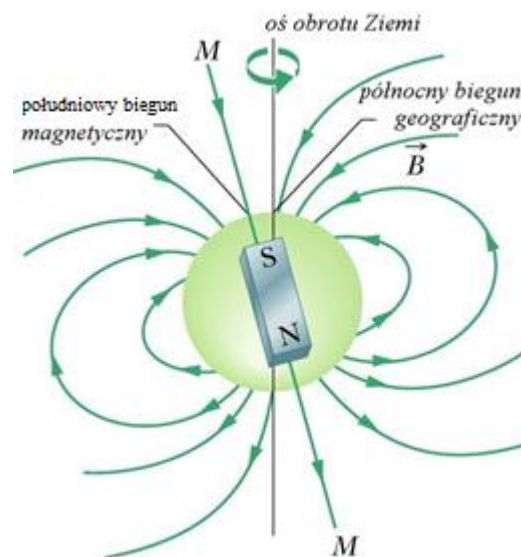
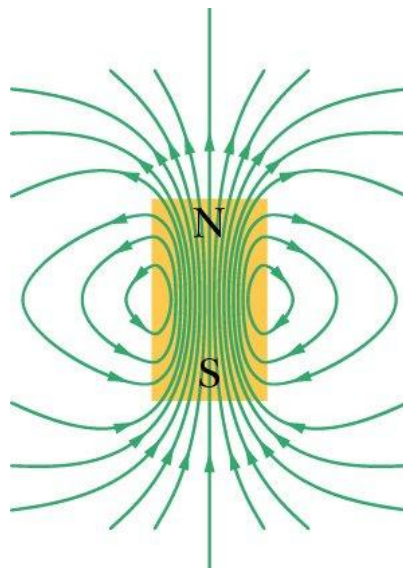
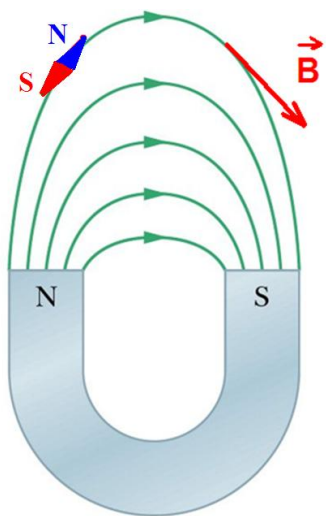
Za oddziaływania magnetyczne odpowiedzialne są ładunki elektryczne w ruchu.

Źródła pola magnetycznego



Linie pola magnetycznego, kierunek pola

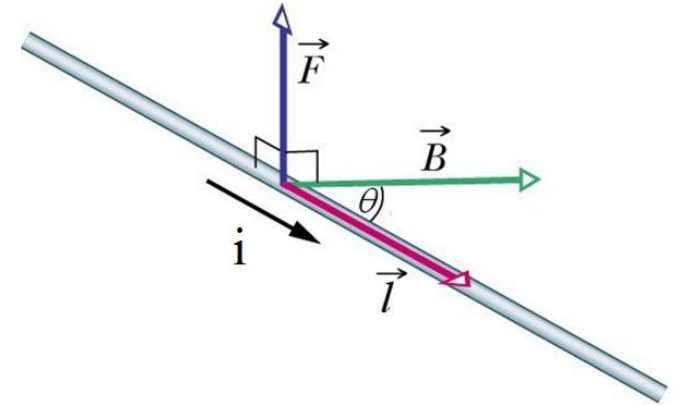
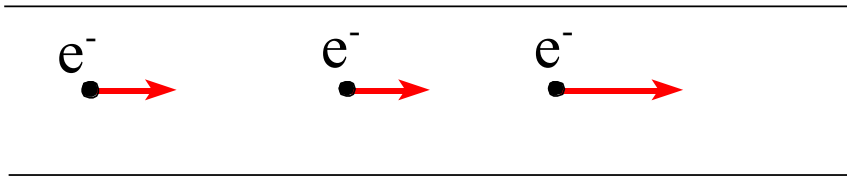
Pole magnetyczne prezentujemy graficznie rysując linie **pola magnetycznego**. Wektor $\mathbf{B}$ jest do nich styczny w każdym punkcie. Kierunek linii pola można wyznaczyć za pomocą kompasu (lub opiłków żelaza).



Linie pola magnetycznego tworzą zamknięte pętle.



Przewodnik z prądem w polu magnetycznym



Na każdy elektron działa siła:

$$F' = ev_u B$$

Na przewodniku o długości l liczba elektronów:

$$N = n l S$$

gdzie: n jest koncentracją elektronów,
 S polem przekroju poprzecznego

Całkowita siła działająca na przewodnik:

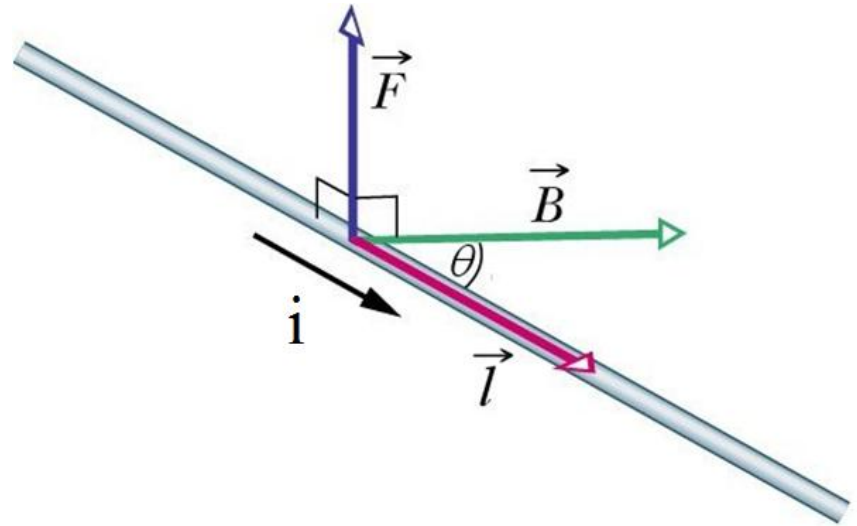
$$F = N F' = n e v_u S l B$$

$$F = j S l B = i l B$$

$$F = i l B$$

Po zapisaniu w postaci iloczynu wektorowego:

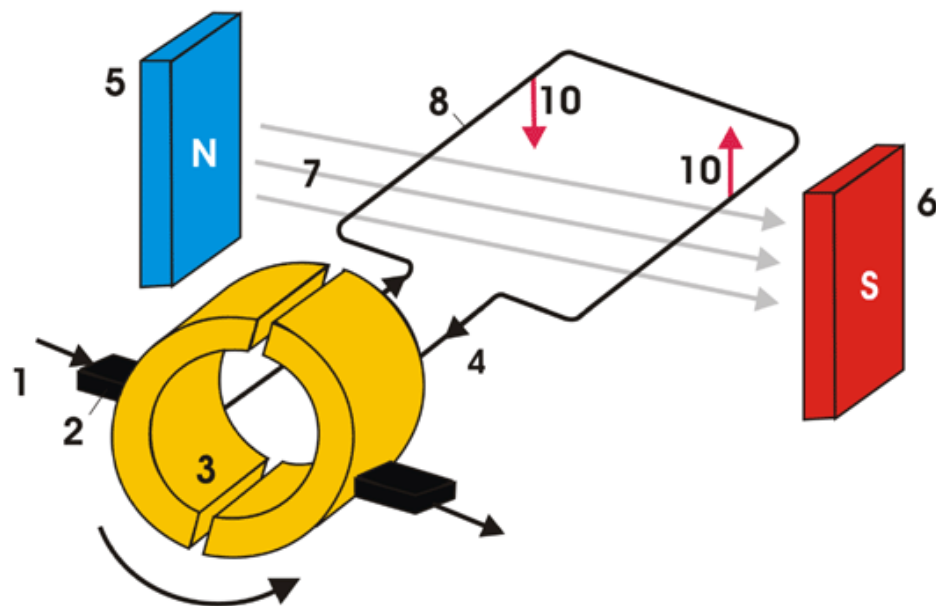
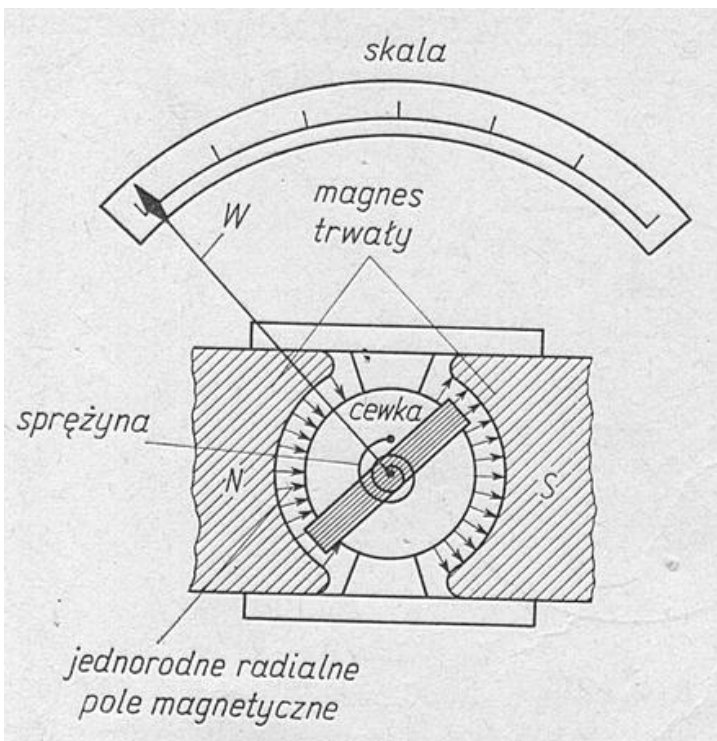
$$\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$



lub na element długości przewodnika $d\mathbf{l}$:

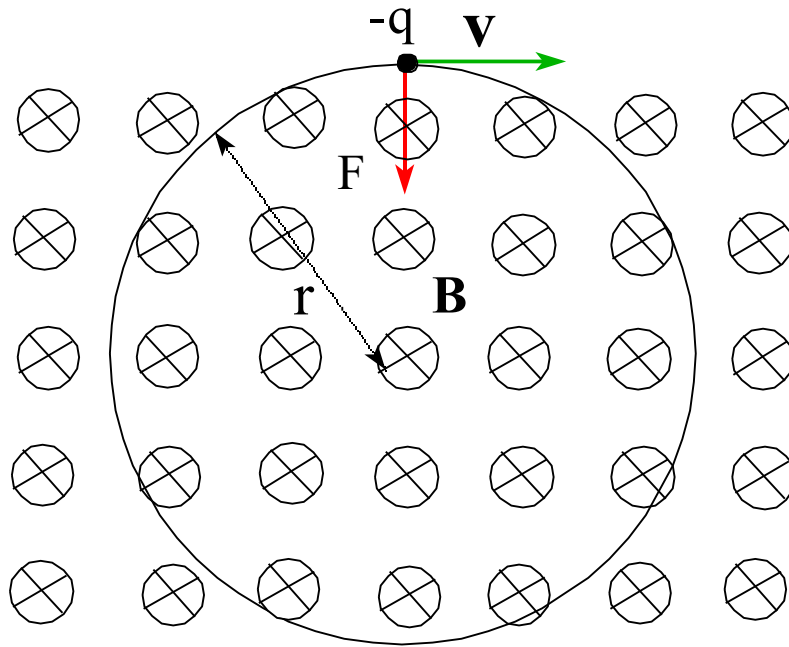
$$d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

**siła
elektrodynamiczna**



Zasada działania amperomierza (po lewej) oraz silnika prądu stałego (po prawej)

Ładunki krążące po orbitach



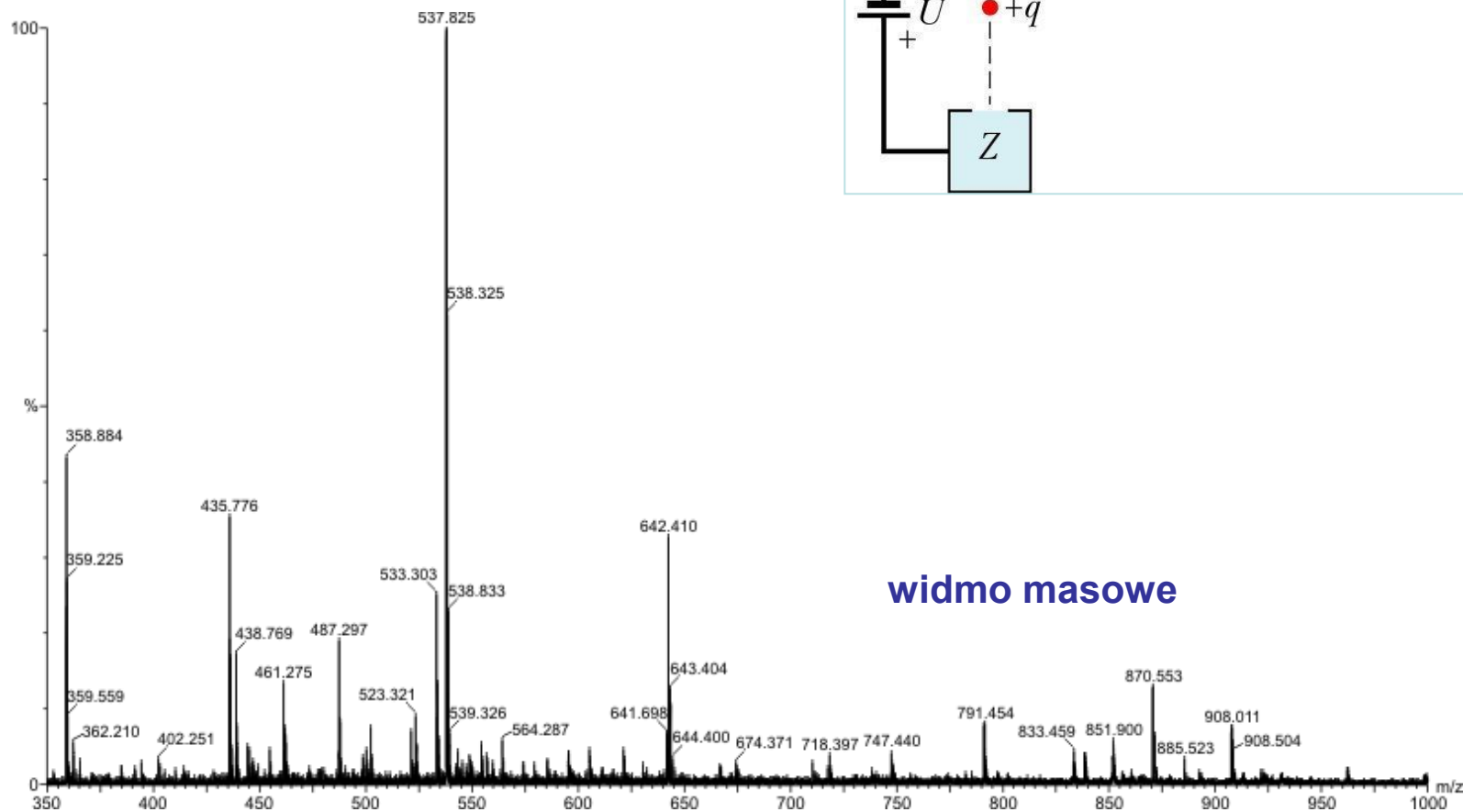
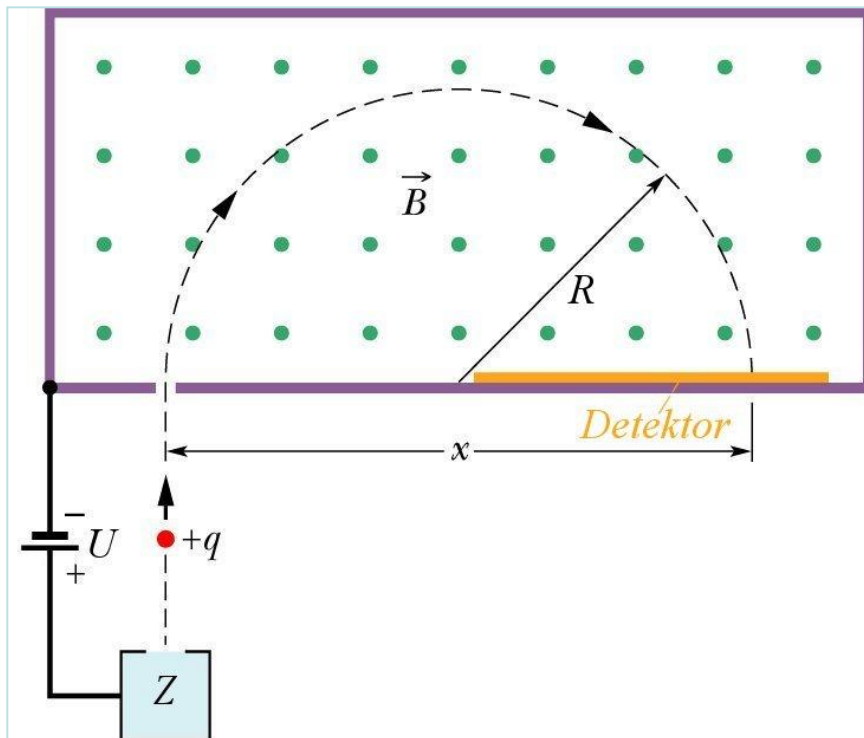
$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$\rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

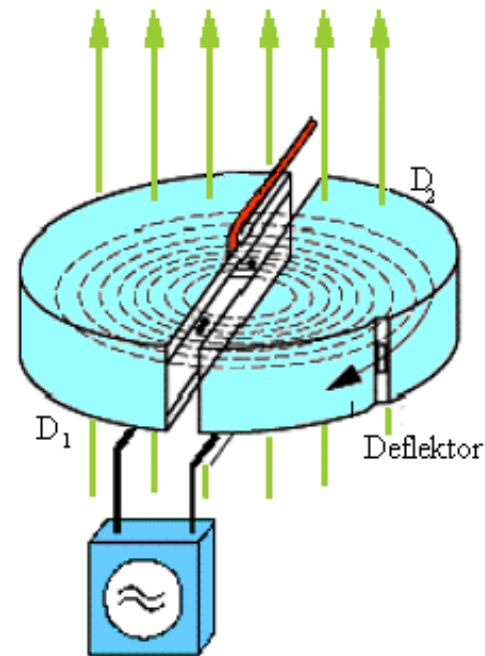
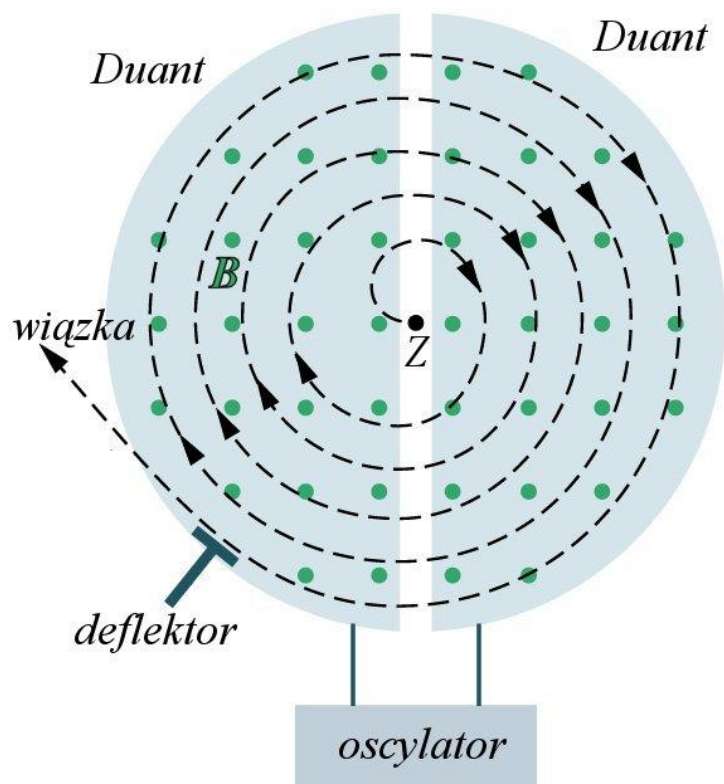
Przykład 1: Spektrometr masowy

$$r = \frac{mv}{qB}$$



widmo masowe

Przykład 2: Akceleratory



Przykładem akceleratora cyklicznego jest **cyklotron**.

Generator cyklicznie zmienia kierunek pola elektrycznego w szczelinie między duantami.

Cząstki (w polu *B*) poruszają się po spirali. Po osiągnięciu maksymalnego promienia cząstki są wyprowadzane poza cyklotron.



Centrum Cyklotronowe Bronowice



Cyklotron AIC-144



Przyspieszone protony w postaci skolimowanej wiązki o optymalnych parametrach dla tego typu cyklotronu:

- energia 60MeV
- intensywność 80nA
- stabilność prądu wiązki 5%

AIC-144 jest cyklotronem izochronicznym. Służy do przyspieszania lekkich cząstek (protony, deuterony, cząstki alfa).

Cyklotron AIC-144 został zaprojektowany i zbudowany w Instytucie Fizyki Jądrowej PAN w Krakowie. Obecnie cyklotron AIC-144 jest wykorzystywany do produkcji izotopów oraz na potrzeby stanowiska radioterapii protonowej nowotworów oka.

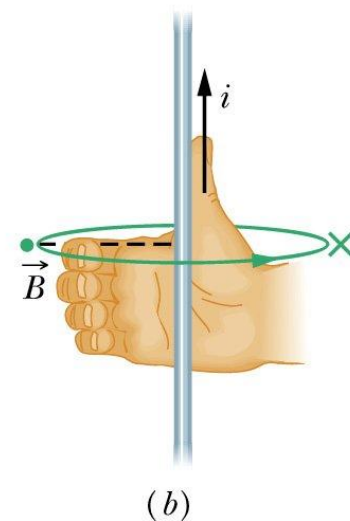
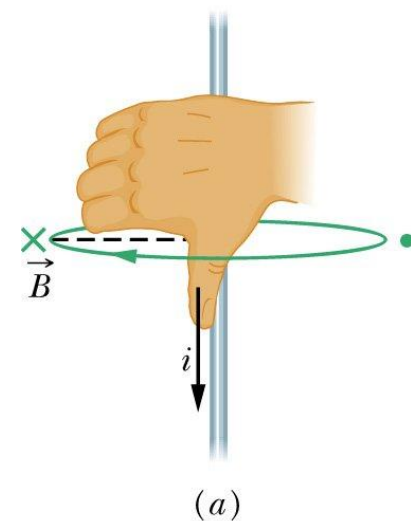
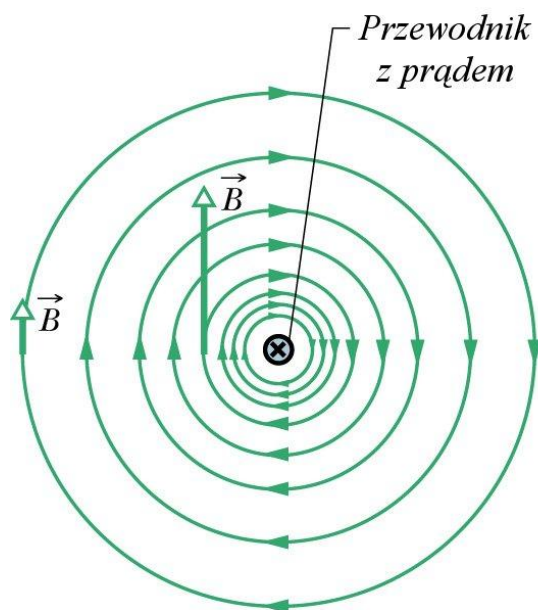
Isochroniczny cyklotron Proteus C-235 firmy Ion Beam Applications, Belgia, przyspieszający protony do energii maksymalnej 230 MeV.

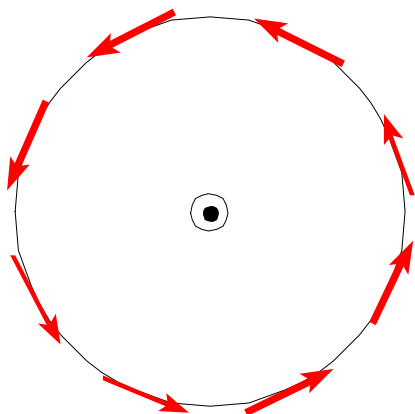


PRAWO AMPERE'a



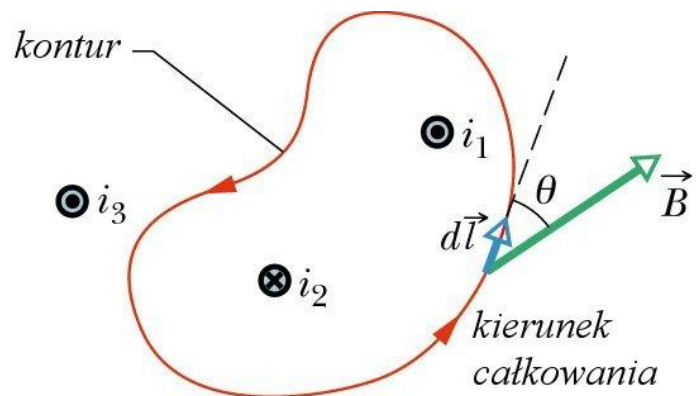
Opiłki żelaza rozsypane na powierzchni kartki umieszczonej prostopadle do przewodnika z prądem odzwierciedlają kształt linii pola magnetycznego





$$2\pi r B = \mu_0 i$$

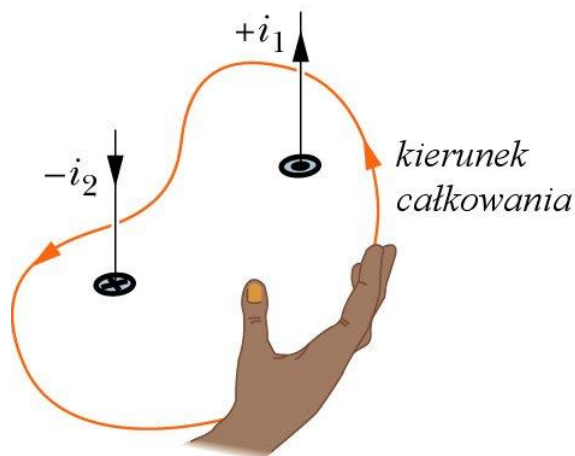
$\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$
 przenikalność magnetyczna próżni



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

PRAWO AMPERE'a

(1826)



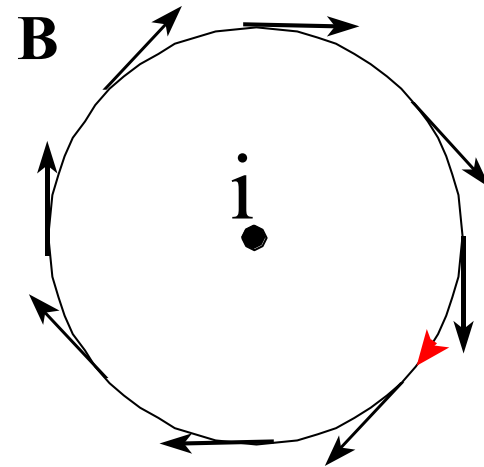
Przykłady zastosowania prawa Ampère'a

Przykład 1: indukcja magnetyczna $\mathbf{B}$ w otoczeniu długiego drutu

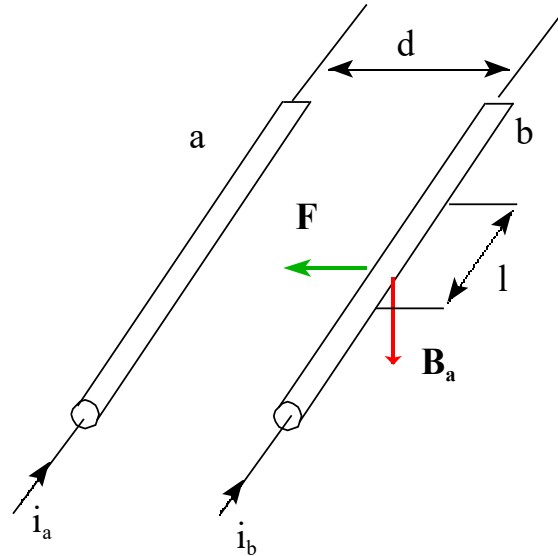
Z prawa Ampère'a wynika, że:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$



Przykład 2: oddziaływanie dwóch przewodników równoległych



$$\mathbf{F} = i \mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

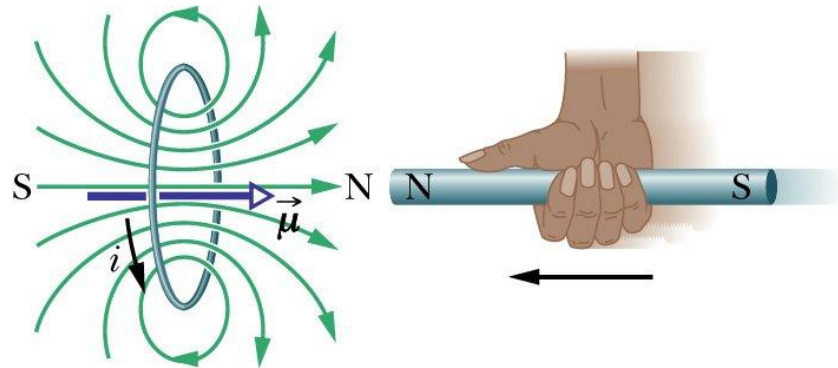
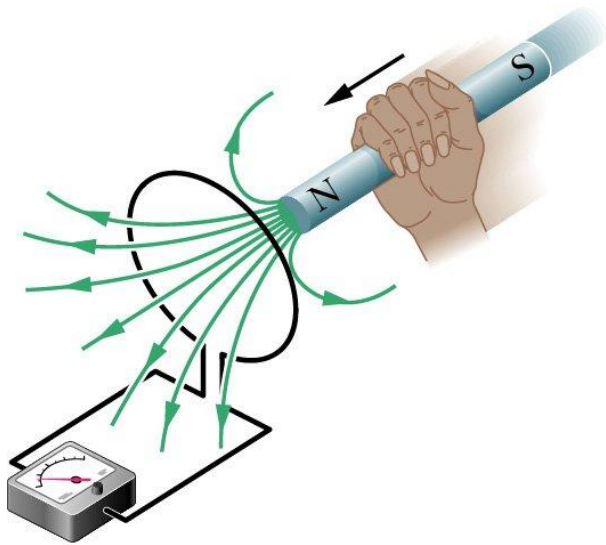
Przewodnik *a* wytwarza w miejscu, gdzie znajduje się przewodnik *b* pole o indukcji B_a :

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

Na odcinek l przewodnika *b* działa siła:

$$F_b = i_b l B_a = \frac{\mu_0 l i_a i_b}{2\pi d}$$

Indukcja elektromagnetyczna



Jeśli przez pętlę przewodnika przechodzi zmienne pole magnetyczne, to w tej pętli indukuje się siła elektromotoryczna.

PRAWO FARADAY'a

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = |\varepsilon|$$

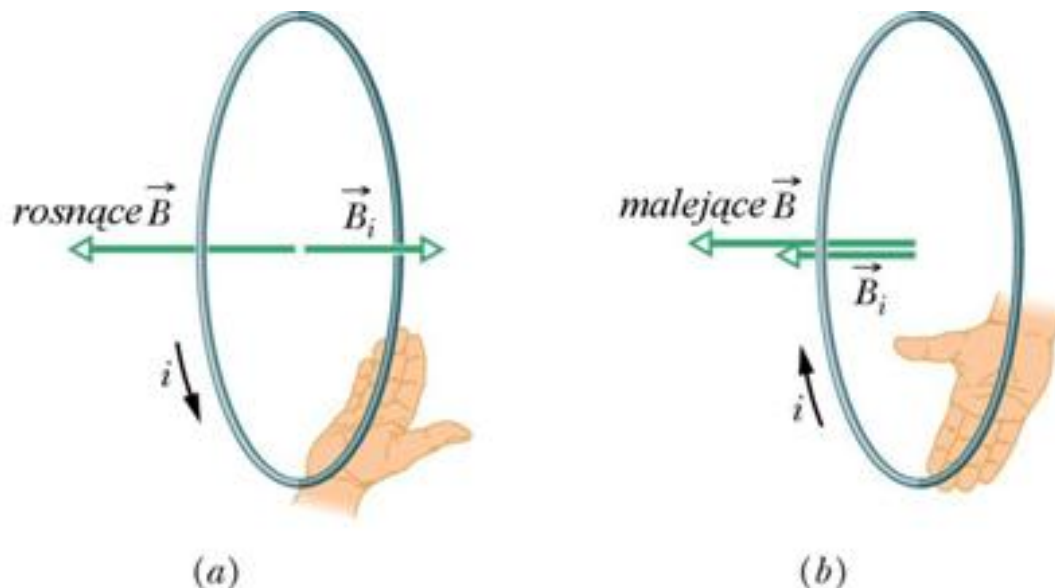
a dokładniej:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

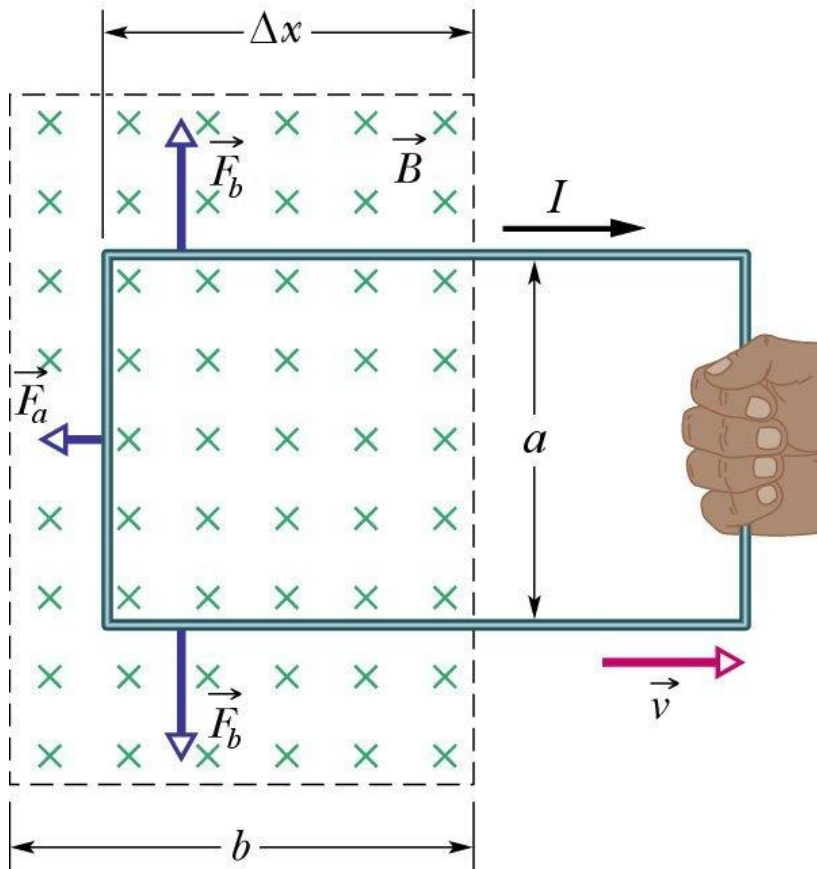
Reguła Lenza

Prąd indukowany ma taki kierunek, że wytwarzany przez niego własny strumień magnetyczny przeciwdziała pierwotnym zmianom strumienia, które go wywołały.

W równaniu przedstawiającym prawo Faradaya występuje znak minus.



Wyliczmy teraz siłę elektromotoryczną indukowaną w ramce:

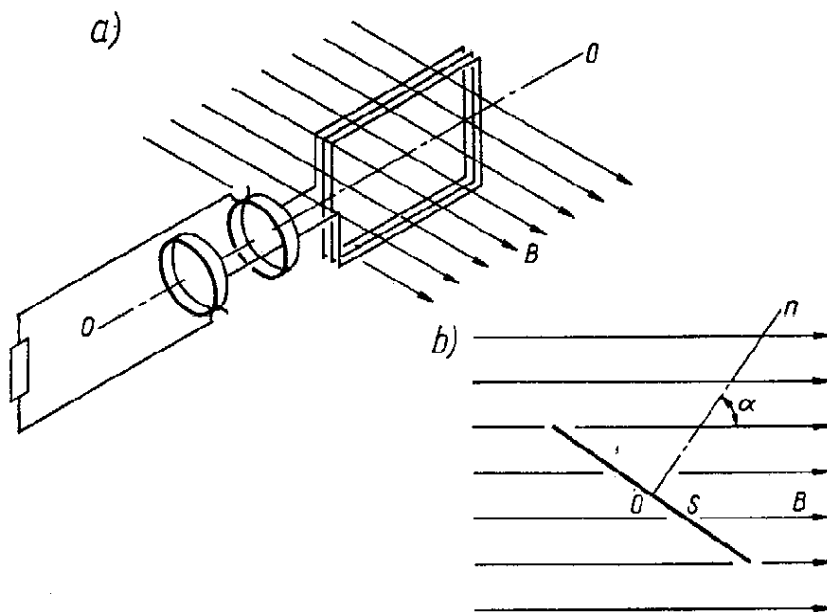
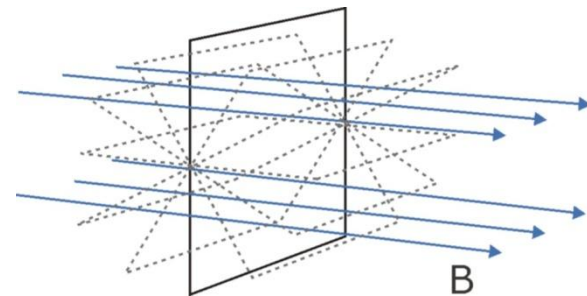


$$\frac{d\Phi_B}{dt} = |\varepsilon|$$

$$|\varepsilon| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

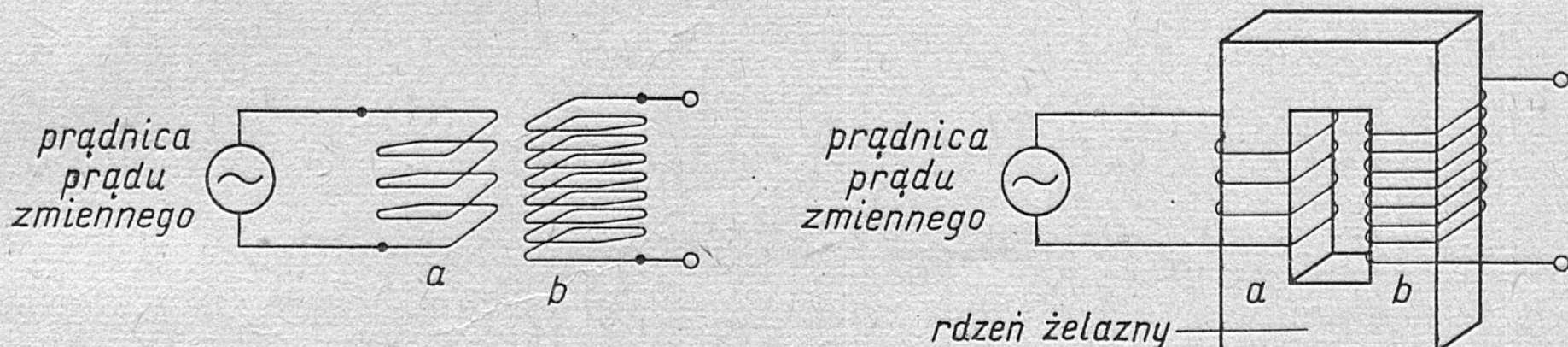
$$|\varepsilon| = B \frac{a \Delta x}{\Delta t} = B a v$$

Działanie prądnicy prądu zmiennego



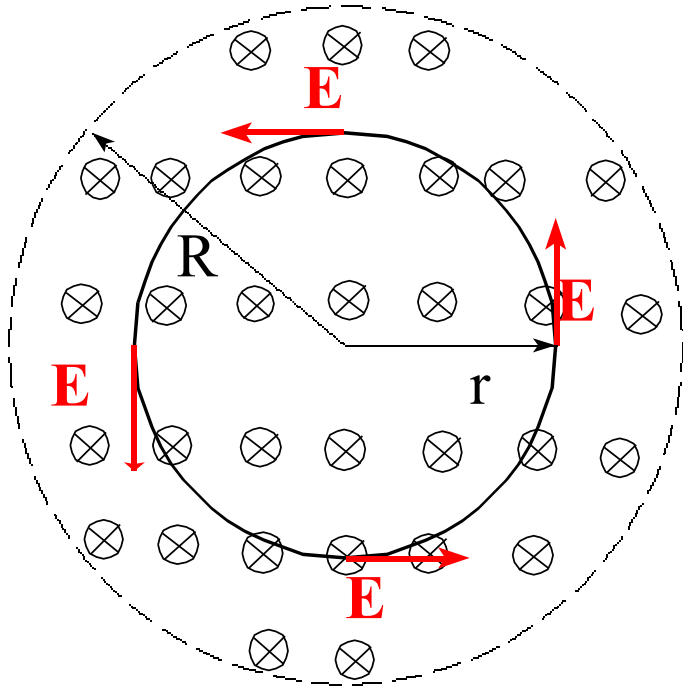
$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Działanie transformatora



$$\frac{U_{2(m)}}{U_{1(m)}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Przykład : Pole elektryczne indukowane w zmiennym polu magnetycznym



$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E \cdot 2\pi r$$

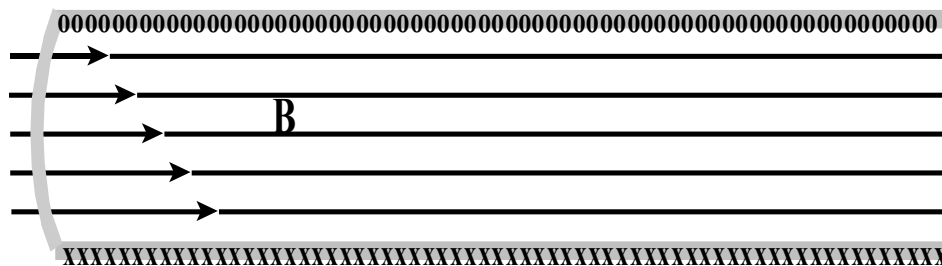
Zgodnie z prawem Faraday'a:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Z dwóch powyższych równań otrzymujemy:

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Indukcyjność



Gdy w cewce płynie prąd o zmiennym natężeniu wytwarza on zmienne pole magnetyczne, które z kolei generuje w cewce siłę elektromotoryczną:

$$\varepsilon = - \frac{d(N\Phi_B)}{dt} \quad (*)$$

jest oczywiste, że: $\Phi_B \propto i$

Definicja:

$$N\Phi_B = Li$$

L - jest indukcyjnością cewki

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad (**)$$

Podstawiając (**) do Równ. (*) otrzymujemy:

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$$

$$[L] = \text{H (henr)}$$

$$1\text{H} = \frac{V}{\frac{A}{s}} = \frac{Vs}{A}$$

Przy okazji zestawmy wyrażenia na napięcie na trzech biernych elementach obwodów elektrycznych:

na oporniku: $U_R = Ri$ (prawo Ohma)

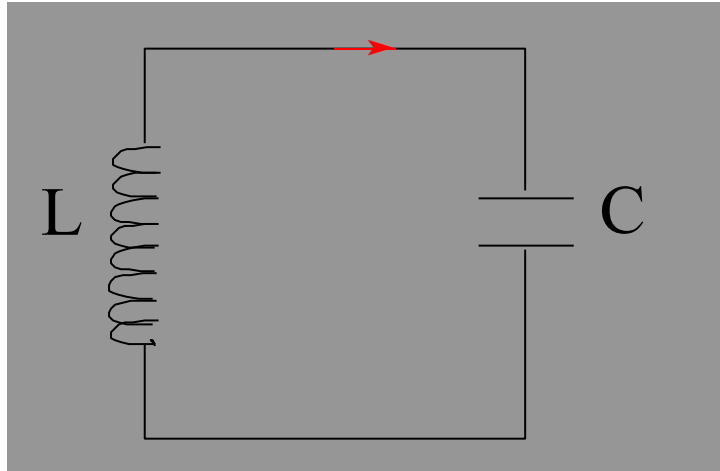
na cewce indukcyjnej: $U_L = L \frac{di}{dt}$

na kondensatorze: $U_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$

Drgania elektromagnetyczne

Widzieliśmy, że w kondensatorze zgromadzona jest energia pola elektrycznego, zaś w cewce indukcyjnej – energia pola magnetycznego. Energie te mogą nawzajem w sobie przechodzić.

Rozważmy obwód LC:

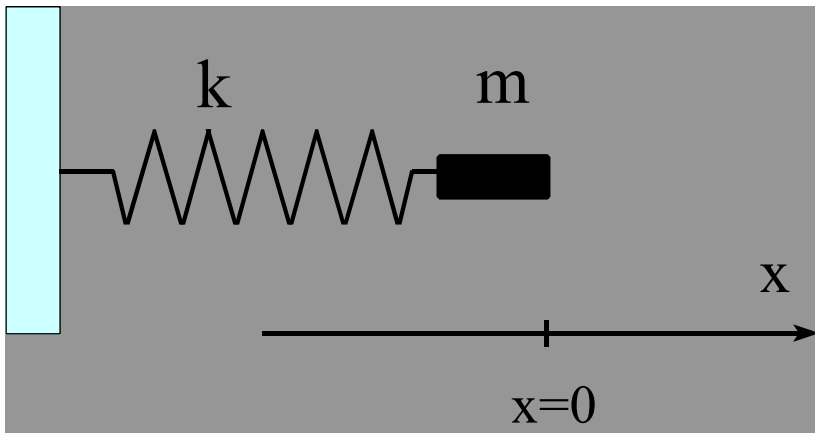


$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

lub pamiętając, że: $i = \frac{dq}{dt}$, otrzymamy:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (*)$$

Jest to równanie obwodu LC. Ma ono dokładnie taką samą postać matematyczną jak równanie drgającej masy na sprężynie:



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

rozwiązanie : $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$

rozwiązaniem Równ. (*) jest :

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (**)$$

Sprawdźmy poprawność rozwiązania:

$$\frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -q_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

podstawiamy $\frac{d^2 q}{dt^2}$ oraz q do naszego równania:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (*)$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (*)$$

$$-L q_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C} q_m \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$-L \omega^2 + \frac{1}{C} = 0$$

otrzymujemy:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Mając rozwiązanie na ładunek:

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Natężenie prądu:

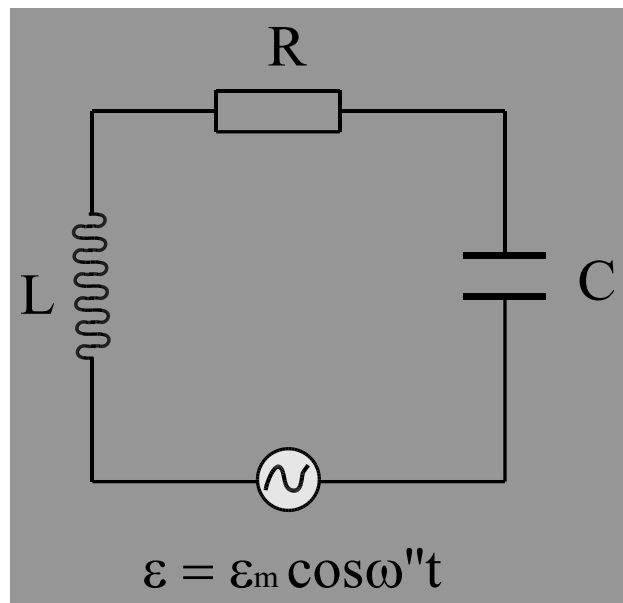
$$i = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i = i_m \sin(\omega t + \Phi)$$

oraz:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Obwód RLC z wymuszeniem



$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos \omega'' t$$

$$U_L + U_C + U_R = \varepsilon$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q + Ri = \varepsilon$$

Wyrażając prąd przez ładunek :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \varepsilon$$

Rozwiązanie:

$$q = q_m \sin(\omega''t - \varphi)$$

lub:

$$i = i_m \cos(\omega''t - \varphi)$$

gdzie:

$$i_m = \frac{\varepsilon_m}{Z}$$

Z – jest impedancją:

$$Z = \sqrt{(\omega''L - \frac{1}{\omega''C})^2 + R^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

A zatem:

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{(\omega''L - 1/\omega''C)^2 + R^2}}$$

Kiedy będzie największa wartość prądu elektrycznego ?

gdy :
$$\omega''L - \frac{1}{\omega''C} = 0$$

czyli gdy :
$$\omega'' = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

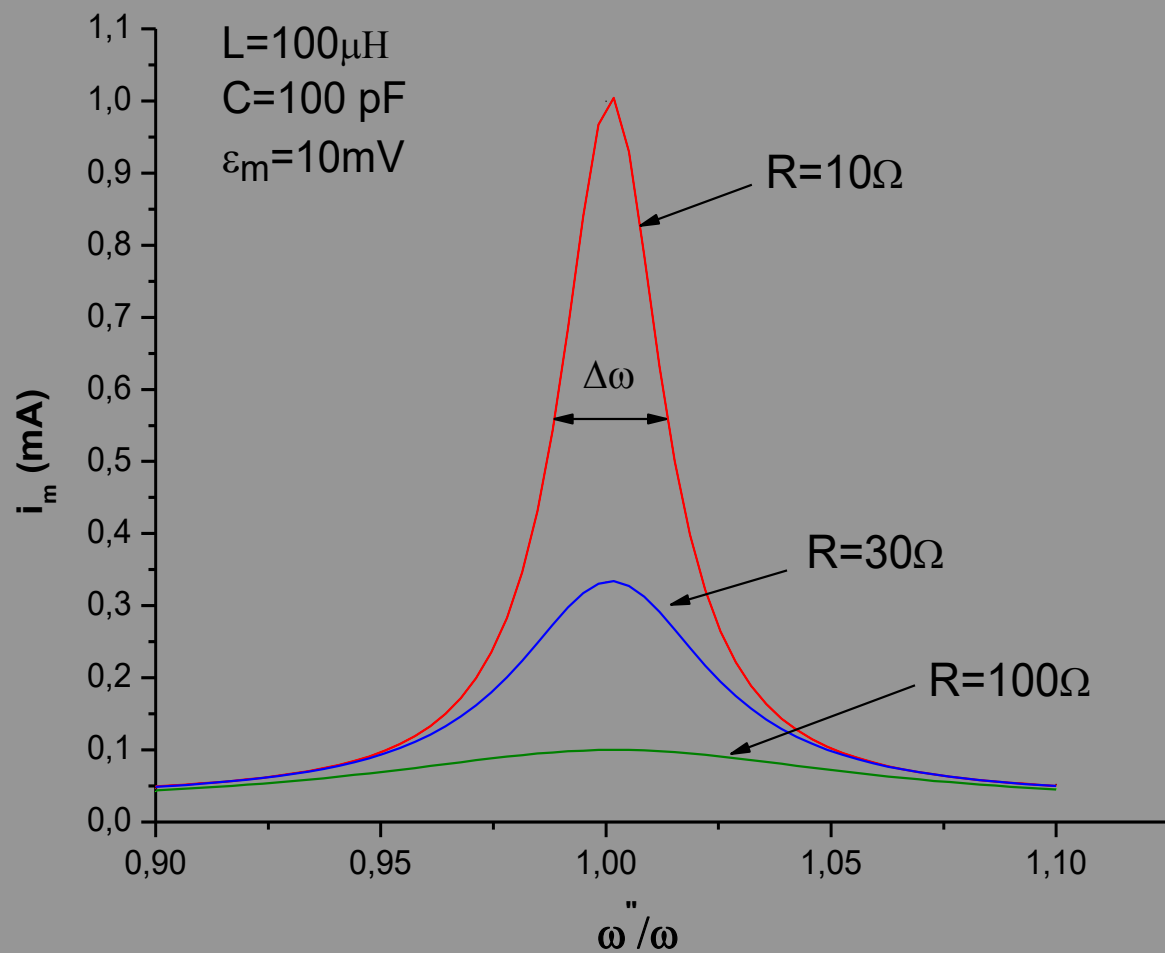
czyli gdy częstość drgań wymuszającej siły elektromotorycznej będzie równa częstości drgań obwodu LC :

$$\omega'' = \omega$$

Efekt rezonansu:

$$\omega'' = \omega$$

REZONANS !!



Obwody prądu sinusoidalnie zmiennego

$$i_{sk} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}$$

$$U_{sk} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Można wykazać, że średnia moc prądu zmiennego :

$$P = U_{sk} I_{sk} \cos \varphi$$

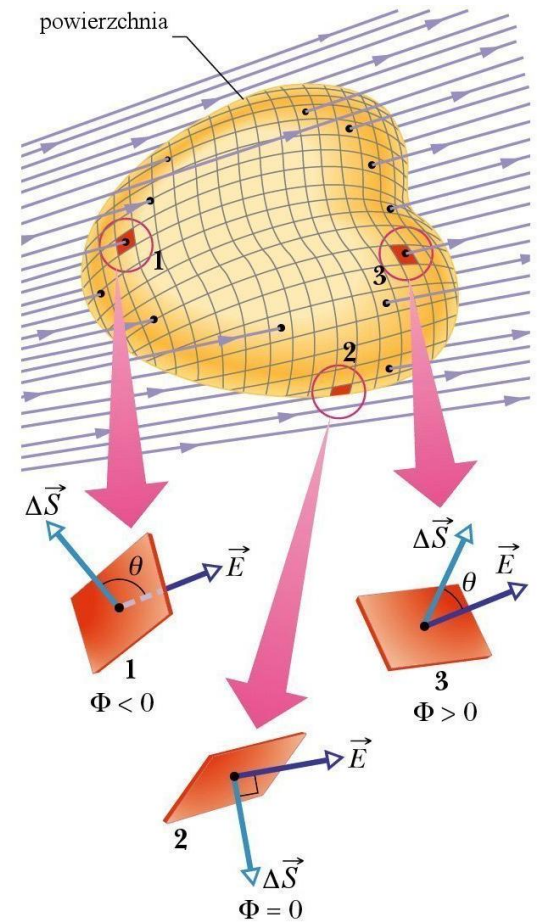
RÓWNANIA MAXWELLA (w próżni)

1) Prawo Gaussa dla elektryczności :

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q$$

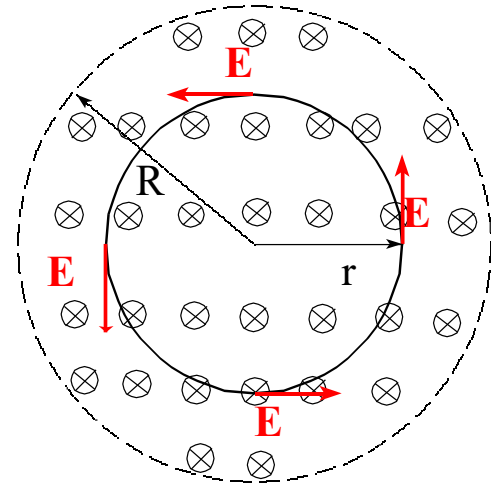
2) Prawo Gaussa dla magnetyzmu :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$



3) Prawo indukcji elektromagnetycznej Faraday'a:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

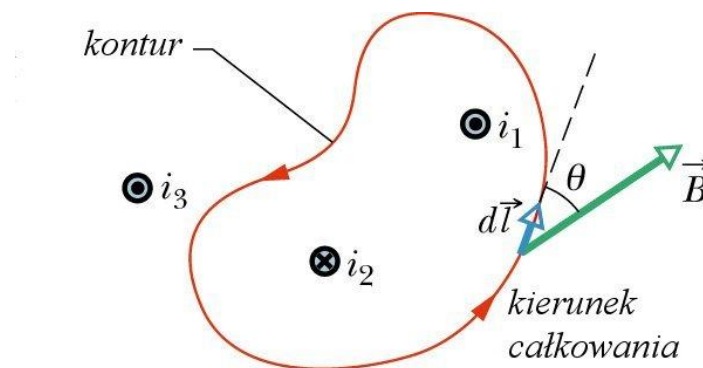


Jeśli na konturze całkowania występują siły elektromotoryczne, to trzeba je włączyć:

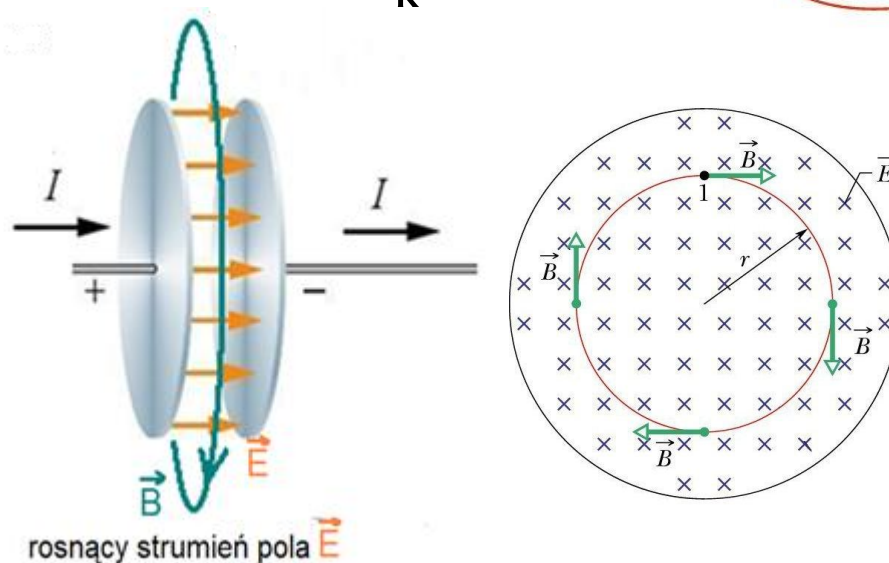
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} + \sum_k \varepsilon_k$$

4) Prawo Ampère'a :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k i_k$$



lecz:



Maxwell rozszerzył prawo Ampère'a dodając człon z pochodną po strumieniu pola elektrycznego (Φ_E):

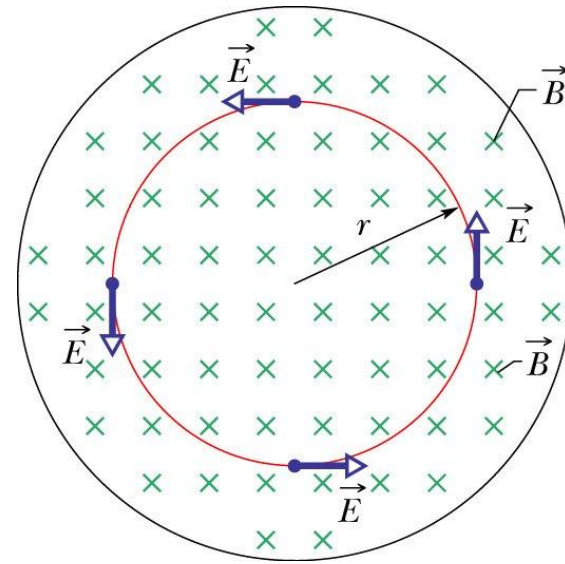
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k i_k + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Pomiędzy stałymi μ_0 oraz ε_0 zachodzi ważny związek:

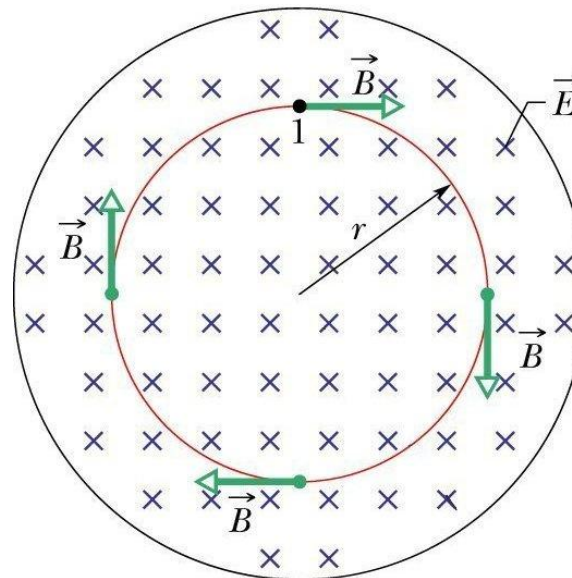
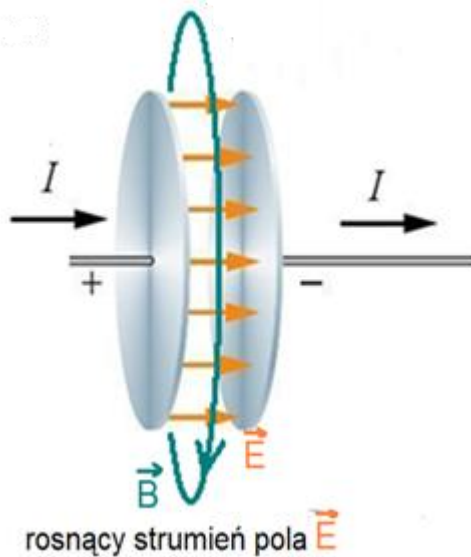
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Porównanie prawa Faraday'a i Amper'a :

Prawo Faraday'a :

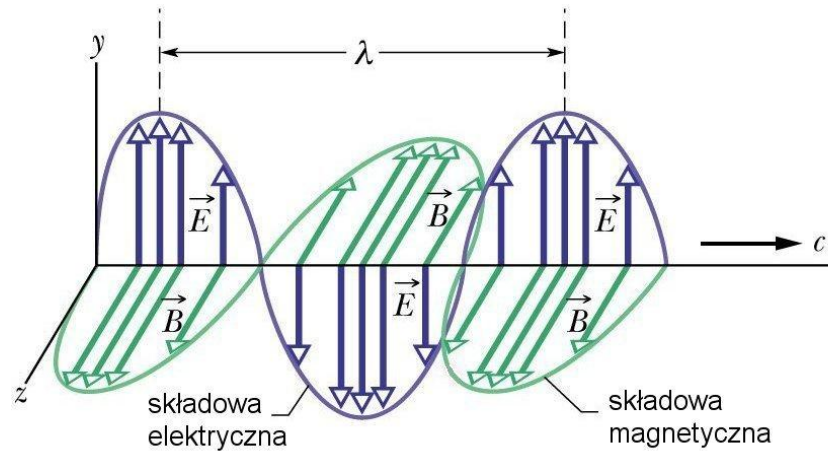


Prawo Ampère'a :



Linie pola, mają kształt okręgów tak jak linie pola wokół przewodnika z prądem.

Fale elektromagnetyczne



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Każda zmienne pole elektrycznego wywołuje zmienne pole magnetyczne, które z kolei indukuje wirowe pole elektryczne itd.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Taki ciąg sprzężonych pól elektrycznych i magnetycznych tworzy falę elektromagnetyczną.

Pamiętamy równanie fali mechanicznej:

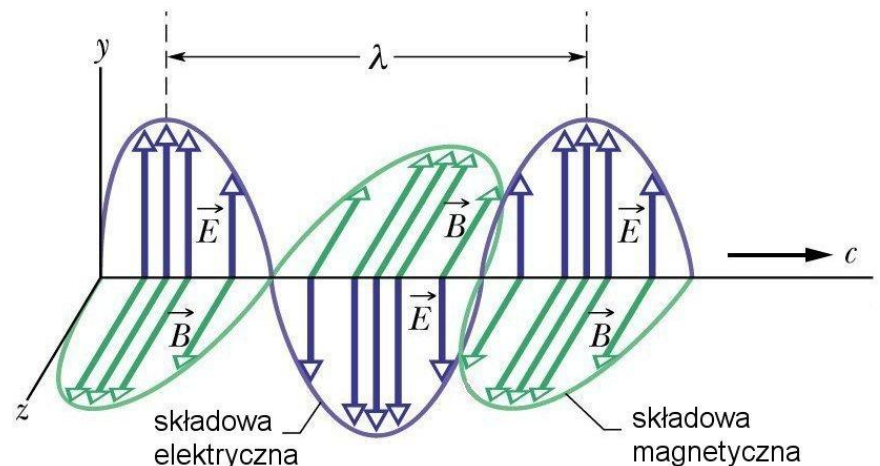
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Z równań Maxwella wyprowadza się równanie różniczkowe fali elektromagnetycznej:

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 E_y}{dt^2}$$

oraz:

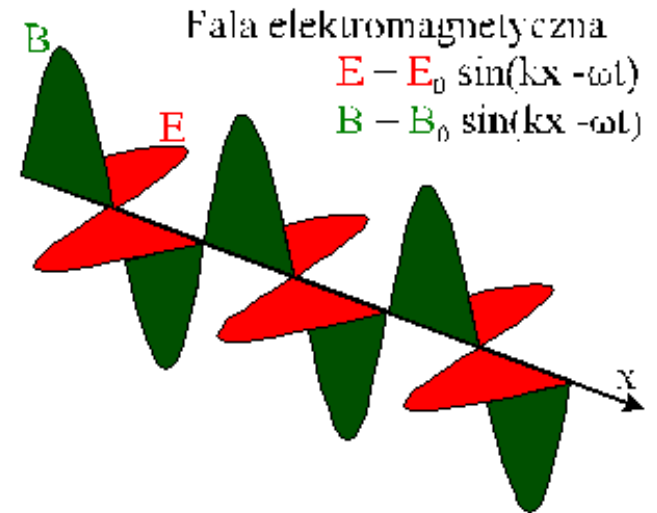
$$\frac{d^2 B_z}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 B_z}{dt^2}$$



Rozwiązania mają postać analogiczną jak w przypadku fali mechanicznej:

$$B_z(x, t) = B_{0z} \sin(kx - \omega t)$$

$$E_y(x, t) = E_{0y} \sin(kx - \omega t)$$



Prędkość fazowa fali elektromagnetycznej:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

prędkość światła w próżni

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}}$$

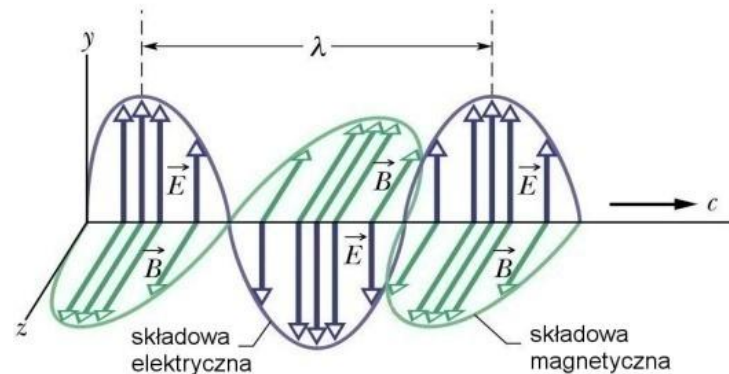
prędkość światła
w ośrodku materialnym

$$c = \frac{E_{0y}}{B_{0z}}$$

z równań Maxwella

Interesującą wielkością charakteryzującą falę elektromagnetyczną jest wektor Poyntinga:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$



Wyraża on szybkość przepływu energii przez jednostkową powierzchnię dla płaskiej fali elektromagnetycznej (natężenie fali).

Przykład : Radiostacja o mocy $P_0 = 30 \text{ kW}$ wysyła fale EM izotropowo.

Obliczmy natężenie sygnału (moc na jednostkę powierzchni) w odległości $r = 10 \text{ km}$ od nadajnika:

$$\bar{S} = \frac{P_0}{4\pi r^2} = 24 \mu\text{W} / \text{m}^2 \quad \text{średnia wartość wektora Poyntinga w odległości } r \text{ od źródła}$$

Obliczmy natężenie pola elektrycznego oraz indukcję magnetyczną:

$$\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} \overline{EB} = \frac{1}{\mu_0 c} \overline{E^2} \quad \text{bo:} \quad E = cB$$

$$\bar{S} = \frac{P_0}{4\pi r^2} = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{E_0^2}{2} \quad \text{bo:} \quad \overline{E^2} = E_0^2 / 2 \quad (\text{fala sinusoidalna})$$

$$E_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu_0 c P_0}{2\pi}} = 0.13 \text{ V} / \text{m}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 4 \cdot 10^{-10} \text{ T}$$

