

10. GRAWITACJA I ZASADA RÓWNOWAŻNOŚCI

Uwagi wstępne

Omawialiśmy już prawo grawitacji, którego sformułowanie matematyczne zawdzięczamy Isaakowi Newtonowi. Mówi ono, że siła przyciągania pomiędzy dwiema masami punktowymi wynosi:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (74)$$

Prawo to opisuje poprawnie siłę przyciągania pomiędzy dwiema masami punktowymi (tzn. małymi w porównaniu z odległością (r) jak również pomiędzy dwiema masami o dowolnym rozmiarze, ale za to w kształcie kul (wtedy jako r musimy przyjąć odległość między środkami tych kul). Natomiast w przypadku dwóch ciał o dużych i nieregularnych kształtach, znajdujących się blisko siebie (np. dwa krzesła), ścisłe wyliczenie siły przyciągania grawitacyjnego wymagałoby podzielenia (w myślach) każdego z tych ciał na nieskończenie małe kawałki i następnie dodanie geometryczne sił przyciągania we wszystkich możliwych parach tych małych elementów. Na szczęście, bardzo rzadko stajemy przed taką koniecznością, gdyż praktyczne znaczenie ma przyciąganie grawitacyjne między dużymi obiektami, takimi jak planety czy gwiazdy, a te są kuliste.

Również siłę przyciągania grawitacyjnego przedmiotów na powierzchni Ziemi obliczamy zgodnie z Równ. 1, gdyż każdy przedmiot jest bardzo mały w porównaniu z promieniem Ziemi i może być zatem traktowany jako punktowy. Co więcej, siłę grawitacji przy powierzchni Ziemi obliczamy w praktyce używając relacji:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \quad (75)$$

gdzie $\mathbf{g}$ jest przyspieszeniem grawitacyjnym przy powierzchni Ziemi (zwane też przyspieszeniem ziemskim). Nie musimy zatem używać ogólnego Równ. 74. Niemniej, przyspieszenie $\mathbf{g}$ wiąże się bezpośrednio z Równ. 74. Z porównania sił grawitacji działających na ciało o masie m na powierzchni Ziemi, wynikających z Równ. 74 i 75:

$$mg = G \frac{mM}{R^2}$$

wynika, że:

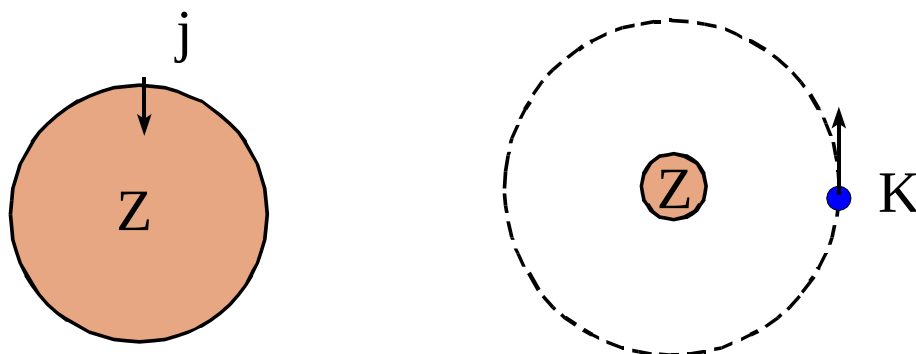
$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (76)$$

W zależności tej M oznacza masę Ziemi, zaś R jej promień.

Dzieło Isaaka Newtona (1643 – 1727)

Isaak Newton, który żył w XVII stuleciu dokonał niewiarygodnego przełomu umysłowego swoimi pracami. Przypomnijmy, że zawdzięczamy mu prawa dynamiki oraz prawo grawitacji. Odtwórzmy przykładowy problem, jaki był przez niego rozważany: „jaki jest

stosunek przyspieszenia grawitacyjnego Księżyca do przyspieszenia jabłka przy powierzchni Ziemi ?”



Przyspieszenie grawitacyjne Księżyca pochodzące od Ziemi, wyliczymy przyrównując siłę grawitacji do siły odśrodkowej (ta ostatnie jest niezbędna, aby zapewnić ruch Księżyca po orbicie kołowej o promieniu r_K):

$$ma = \frac{mv^2}{r_K}; \quad a = \frac{v^2}{r_K} = \omega^2 r_K = \frac{4\pi^2}{T^2} r_K$$

Zauważmy, że w równaniu tym użyto II zasady dynamiki; m oznacza tutaj masę Księżyca, v – jego prędkość liniową w ruchu wokół Ziemi, ω – prędkość kątową, zaś T okres obiegu wokół Ziemi. Widać więc, że znając promień orbity oraz okres obiegu można bez problemu obliczyć przyspieszenie a . Okres obiegu Księżyca wokół Ziemi wynosi $T=27.3$ dnia zaś promień orbity $r_K=3.86 \times 10^5$ km; podstawienie tych wartości do powyższego równania daje $a=2.73 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$.

Z drugiej strony, przyspieszenie grawitacyjne przy powierzchni Ziemi (np. dla spadającego jabłka) wynosi $g=9.81 \text{ m/s}^2$.

Użyjmy teraz Równ. 76. Wynika z niego, że:

$$\frac{a}{g} = \frac{R^2}{r_K^2}$$

Podstawiając wartości promienia Ziemi i promienia orbity Księżyca, uzyskujemy świetną zgodność (oczywiście w granicach błędu) ze stosunkiem wymienionych wcześniej przyspieszeń !!!

Jest to wspaniałe potwierdzenie *poprawności praw dynamiki i grawitacji*. Zauważmy, że w celu tej weryfikacji użyliśmy tylko następujących wartości: T , R , r_K i g . Wszystkie te wartości znane były za życia Newtona.

Zauważmy jeszcze jeden, przełomowy aspekt tego rozumowania. Newton uznał, że siła powodująca spadanie jabłka to ta sama siła, która zakrzywia tor Księżyca wokół Ziemi. W jego czasach był to wielki postęp. Newton dokonał udanego *jednolitego* opisu zjawiska znanego z życia codziennego oraz zjawiska astronomicznego! Oznaczało to mniej więcej tyle: prawa przyrody są uniwersalne, opisują wszystko, a nie tylko nasze lokalne obserwacje na Ziemi.

Dzisiejsza fizyka pełna jest tego typu ogólnych praw, ale Newton był pierwszym, który dokonał przełomu.

Wyniki swoich prac opisał Newton w epokowym dziele „Philosophiae naturalis principia mathematica”, które zostało wydane w roku 1687.

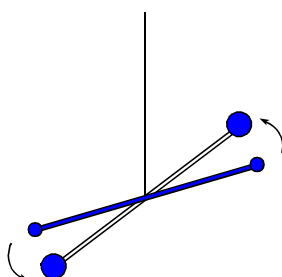
Wyznaczenie stałej G

Z Równ. 76 otrzymujemy następującą formułę na G:

$$G = g \frac{R^2}{M} \quad (77)$$

Znając zatem masę i promień Ziemi oraz przyspieszenie ziemskie można wyliczyć stałą grawitacyjną. Tak też postąpił Newton (przyjął on dość grube założenie, że średnia gęstość Ziemi jest taka sama jak gęstość Ziemi na jej powierzchni, np. ziemi w ogródku).

Pierwszy ścisły pomiar stałej grawitacji został wykonany przez lorda Cavendisha. Idea jego doświadczenia pokazana jest na poniższym rysunku.



Na dwóch cienkich prętach umieszczone są parami znane masy. Jeden z prętów może się obracać, skręcając sprężystą nitkę. Wskutek działania sił przyciągania grawitacyjnego pręt ruchomy skłoni nitkę o pewien kąt, który odczytamy poprzez odbicie promienia światła od lusterka przyklejonego do pręta. Na tej podstawie zmierzmy siłę grawitacyjną i wykorzystując Równ. 74 wyznaczmy stałą grawitacji, G. Ciekawostką jest, że współczesne pomiary stałej G oparte są na zmodyfikowanym doświadczeniu tego typu. Obecnie ustalona wartość G wynosi:

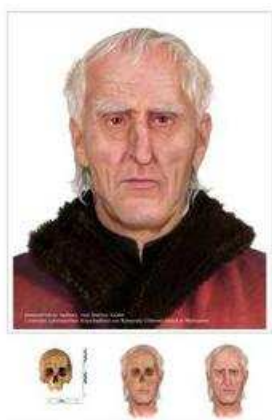
$$G = 6.6754 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$$

Znając stałą grawitacji G i używając prawa grawitacji można „zważyć” Słońce i planety (oczywiście trzeba coś jeszcze znać, np. promień orbity, okres obiegu itp.).

Prawa Keplera ruchu planet

Zanim jeszcze Newton ogłosił swoje słynne prawa, Johannes Kepler (1571 - 1630) dokonał syntezy ówczesnej wiedzy na temat ruchu planet wokół Słońca w postaci trzech prostych praw. Prawa te były w uogólnieniu obserwacji astronoma Tychona de Brache (1546 – 1601). Dodajmy, że poprawny model ruchu planet wokół Słońca stworzył wcześniej polski

astronom Mikołaj Kopernik (1473 – 1543), formułując tzw. model heliocentryczny (opisany w jego dziele: „De revolutionibus orbitum coelestium”, czyli „O obrotach sfer niebieskich” – wydany w roku 1543).



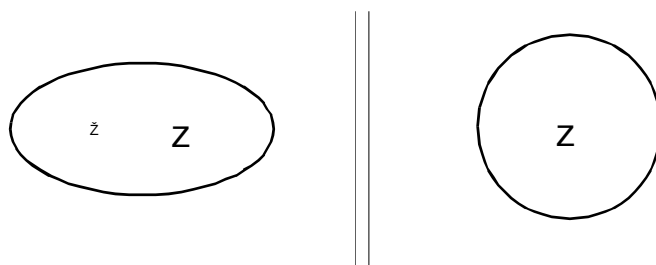
Twarz Mikołaja Kopernika tuż przed śmiercią w roku 1543. Wygląd twarzy uczonego odtworzono na podstawie czaszki znalezionej w roku 2005 w krypcie Katedry we Fromborku.

Newton użył doświadczalnych praw Keplera jako „materiału” do potwierdzenia swoich teorii (zasad dynamiki i grawitacji). Tak więc prawa te odegrały dużą rolę w rozwoju nowożytnej nauki.

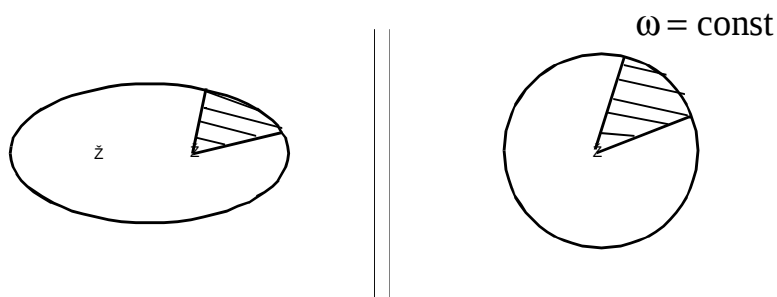
A oto trzy prawa Keplera:

(w lewej części każdego rysunku podano przypadek ogólny, zaś w prawej – przypadek szczególny – czyli ruch po orbicie kołowej)

- 1) Każda planeta krąży po orbicie eliptycznej, ze Słońcem w jednym z ognisk tej elipsy.

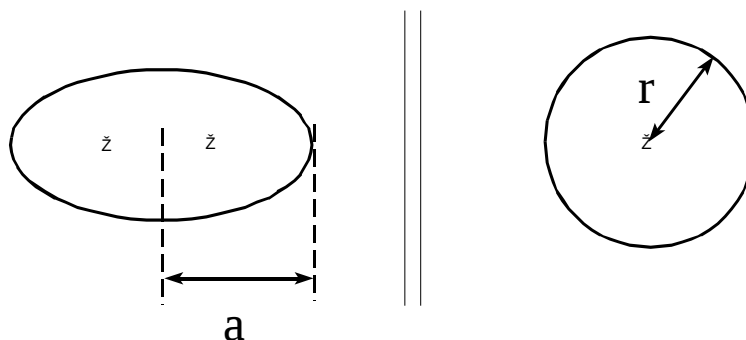


- 2) Linia łącząca Słońce i planetę zakreśla równe pola w równych odstępach czasu (tzw. prędkość polowa jest stała)



- 3) Sześciiany wielkich pólosi orbit dwóch planet mają się do siebie jak kwadraty ich okresów obiegu:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$$



Wszystkie te prawa można wyjaśnić, używając prawa grawitacji oraz zasady zachowania momentu pędu.

Sprawdźmy, czy prawa te są słuszne w szczególnej sytuacji, gdyby orbity planet były kołowe, a nie eliptyczne (jak wiadomo okrąg jest szczególnym przypadkiem elipsy).

Pierwsze prawo jest automatycznie spełnione, gdyż okrąg jest szczególnym przypadkiem elipsy (wtedy oba ogniska elipsy pokrywają się ze sobą i stają się środkiem okręgu).

Drugie prawo także jest spełnione, gdyż planeta krążąca po kołowej orbicie ma stałą prędkość kątową, a zatem i prędkość polową.

Trzecie prawo. Tutaj musimy wykonać proste obliczenie. Rolę siły dośrodkowej w ruchu planety wokół Słońca (po orbicie kołowej) spełnia siła grawitacyjna, zatem przyrównujemy je i wykonujemy proste przekształcenia:

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}; \quad m\omega^2 r = G \frac{mM}{r^2}; \quad \frac{4\pi^2}{T^2} r^3 = GM$$

W powyższych obliczeniach m i M oznaczają masę planety i Słońca, r - promień orbity, ω i T - prędkość kątową i okres obiegu planety wokół Słońca. Z powyższego otrzymujemy:

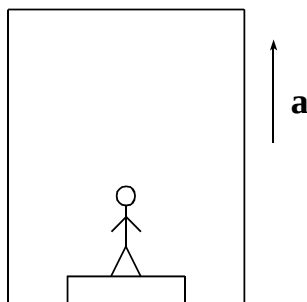
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad \text{a stąd ostatecznie dla dwóch planet:} \quad \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

Oczywiście w naszym szczególnym przypadku role dużych pólosi elipsy spełniają promienie orbit kołowych.

Zasada równowagi

Zauważmy, iż ciężar ciała nie jest tym samym co jego masa. Ciężar ciała definiujemy jako siłę ciężkości działającą na to ciało. Jeśli na powierzchni Ziemi ciężar ciała wynosi $P_Z (=mg)$ to np. na powierzchni Księżyca $P_K = 0.165 P_Z$. (Z prawa grawitacji wynika, że $\frac{P_K}{P_Z} = \frac{M_K}{M_Z} \left(\frac{R_Z}{R_K}\right)^2$).

Pojęcie ciężaru dodatkowo modyfikuje się w nieinercyjnym układzie odniesienia. Wprowadźmy pojęcie ciężaru pozornego; może być on zdefiniowany, np., jako wskazanie wagi sprężynowej, na której ważymy ciało. Wyobraźmy sobie następnie człowieka w ruszającej do góry windzie, stojącego właśnie na wadze sprężynowej.



Winda rusza do góry z przyspieszeniem a , więc ciężar człowieka odczytany na wadze wynosi:

$$P = mg + ma = m(g + a)$$

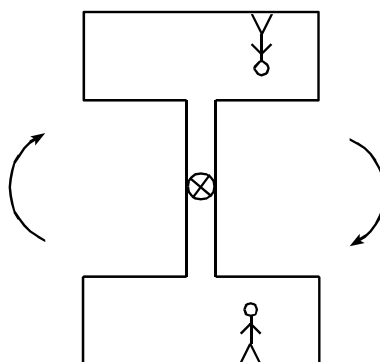
Analogicznie, gdy winda rusza z w dół z przyspieszeniem a , to odczytany ciężar wynosi:

$$P = m(g - a)$$

Łatwo teraz zauważyć, że gdy winda będzie spadała swobodnie z przyspieszeniem $a=g$, to pozorny ciężar człowieka wyniesie:

$$P = 0$$

i człowiek będzie względem windy w stanie nieważkości. Nasuwa się zatem wniosek, że grawitacja może zostać skompensowana spadaniem układu odniesienia (windy), czyli siłą bezwładności. Zauważmy, że gdyby człowiek w ruszającej windzie (załóżmy jeszcze, że w ciemnej i bez okien) nie wiedział, że to ona przyspiesza, mógłby sądzić, że siła grawitacji uległa powiększeniu. Z drugiej strony, można też wytworzyć sztuczne ciężenie (winda przyspieszająca do góry). Sztuczną (pozorną) grawitację można by także wytworzyć w pojeździe kosmicznym przez jego ruch obrotowy; ilustruje to poniższy rysunek.



Ta nierozróżnialność sił bezwładności i grawitacji stanowi istotę **zasady równoważności**, która leży u podstaw ogólnej teorii względności Einsteina. Z zasady tej wynika także:

Równoważność masy grawitacyjnej i bezwładnej

Możemy bowiem wyróżnić pojęciowo dwa rodzaje masy: masę bezwładną i grawitacyjną. Masa bezwładna odpowiada za „opór” ciała przy przyspieszaniu przez siłę (II zasada dynamiki: $F=ma$). Masa grawitacyjna, natomiast, odpowiada za oddziaływanie grawitacyjne ciał, wyrażone prawem powszechnej grawitacji (Równ. 1).

Wracając do poprzednio rozważanego przykładu ze spadającą swobodnie windą, odgadujemy, że dowolne ciało (niezależnie od wartości masy) będzie względem niej w stanie nieważkości. Jest to oczywiście zgodne z doświadczalnie stwierdzonym faktem, że wszystkie ciała spadają (w próżni) z tym samym przyspieszeniem grawitacyjnym, g . Łatwo można wykazać, że jest to możliwe jedynie wtedy gdy:

Masa grawitacyjna równa jest bezwładnej

Równość tych dwu rodzajów masy, sprawdzano na przestrzeni ostatniego stulecia w kolejnych, coraz dokładniejszych eksperymentach; obecnie równość ta stwierdzona jest w granicach względnego błędu pomiarowego rzędu 10^{-10} .

Zauważmy, że równość obu rodzajów mas jest bardzo ciekawym faktem, biorąc pod uwagę, że odpowiadają one za różne własności ciała.