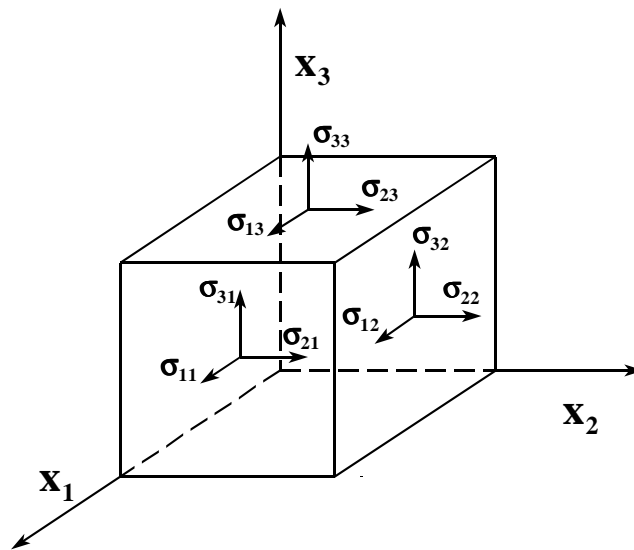


NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

Wstęp: Pojęcia te występują w opisie procesu odkształcenia – tzn. są to zmiany wymiarów ciała pod wpływem przyłożonych sił. Siły powinny być znormalizowane względem wymiarów ciała, a odkształcenie powinno być wyrażone względnie, przy czym translacja i obrót ciała (jako całości) nie są brane pod uwagę przy definicji odkształcenia.

I. Naprężenie (ang. stress)

Rozważmy najpierw tensor naprężenia, którego składowe definiują siły przypadające na jednostkową powierzchnię. W tym celu zdefiniujemy bardzo mały (jednostkowy) sześcian wewnątrz materiału.



σ_{ij}

określa do której osi równoległa jest
składowa siły

określa do której osi prostopadła jest
płaszczyzna ścianki

Siły działające na ścianki jednostkowego sześcianu definiują składowe tensora naprężenia σ_{ij} . Pierwszy wskaźnik (i) definiuje kierunek, wzdłuż którego działa siła, zaś drugi (j) – oś do której jest prostopadła płaszczyzna ścianki, w której działa siła.

Składowe σ_{ij} tworzą tensor naprężeń drugiego rzędu.

Rozróżniamy składowe normalne i ścinające tensora naprężeń, przy czym:

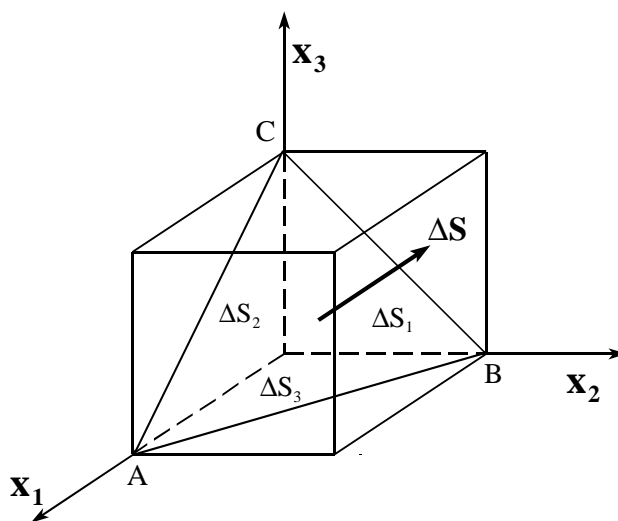
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ – są składowymi normalnymi, zaś

$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ – są składowymi ścinającymi.

Znajomość tensora naprężeń umożliwia nam wyliczenie całkowitej siły działającej na dowolny płat powierzchni. Załóżmy, że chcemy znaleźć siłę działającą na powierzchnię ABC na poniższym rysunku. Powierzchnia ta reprezentowana jest przez wektor normalny $\Delta\mathbf{S}$ (którego wartość równa się polu tej powierzchni). Składowymi wektora $\Delta\mathbf{S}$ są rzuty powierzchni ABC, czyli: $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$.

Przykładowo, składowa F_2 całkowitej siły działającej na powierzchnię $\Delta\mathbf{S}$ wynosi:

$$F_2 = \sigma_{21}\Delta S_1 + \sigma_{22}\Delta S_2 + \sigma_{23}\Delta S_3 \quad (1)$$



Powierzchnia $\Delta\mathbf{S}$ (ABC) i jej rzuty: $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$.

Możemy to zapisać krócej:

$$F_2 = \sigma_{2j}\Delta S_j \quad (2)$$

Podobnie, dowolna składowa tej siły wynosi:

$$F_i = \sigma_{ij}\Delta S_j \quad (3)$$

Czyli siła działająca na płat powierzchni $\Delta\mathbf{S}$ wynosi:

$$[F] = [\sigma] \cdot [\Delta S] \quad (4)$$

gdzie: siła i powierzchnia przedstawione zostały jako macierze kolumnowe, zaś tensor naprężenie - jako macierz kwadratowa o wymiarze 3x3 (reprezentacja tensora jako macierz omówiona będzie za chwilę).

Zauważmy także (patrz Równ.3), iż dowolną składową naprężenia można przedstawić jako:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial (\Delta S_j)} \quad (5)$$

Równowaga statyczna – równowaga momentów

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow 6 \text{ składowych spośród 9 jest niezależnych}$$

Zależność ta ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) redukuje liczbę niezależnych składowych naprężeń do sześciu (3 normalne i 3 styczne). Tensor naprężeń możemy zatem przedstawić jako kwadratową macierz symetryczną o wymiarze 3x3. Jednak nie każda macierz symetryczna jest tensorem (o czym będzie za chwilę).

Stan naprężeń może być niejednorodny $\Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, np. może istnieć zmienność naprężeń w głąb walcowanej próbki. W ogólności warunek równowagi elementów wewnątrz materiału prowadzi do zależności:

:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \sigma_{ij,j} = 0 \quad (6)$$

W równaniu powyższym występuje sumowanie po powtarzającym się wskaźniku (j). Przykładowo dla i=1, równanie to ma postać:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \sigma_{1j,j} = 0 \quad (7)$$

Podobne dwa równania trzeba napisać dla i=2 oraz i=3.

Transformacja wektora i tensora do nowego układu współrzędnych

❖ Transformacje wektora:

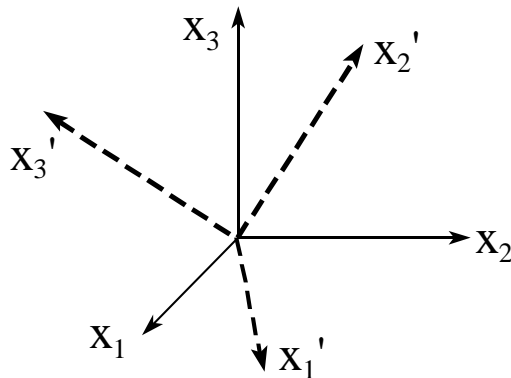
Rozważmy przykładowo transformację wektora siły:

$$F'_i = a_{ik} \cdot F_k \quad (8)$$

a_{ik} są kosinusami kierunkowymi, które definiują orientację układu „nowego” względem „starego”. W równaniu powyższym zastosowano konwencję sumowania po powtarzającym się wskaźniku (w tym wypadku k).

szczegółowo:

$$\begin{aligned} F'_1 &= a_{11} \cdot F_1 + a_{12} \cdot F_2 + a_{13} \cdot F_3 \\ F'_2 &= a_{21} \cdot F_1 + a_{22} \cdot F_2 + a_{23} \cdot F_3 \\ F'_3 &= a_{31} \cdot F_1 + a_{32} \cdot F_2 + a_{33} \cdot F_3 \end{aligned} \quad (9)$$



Transformacja z układu „starego”: x_1, x_2, x_3 do „nowego”: x_1', x_2', x_3' odbywa się przy pomocy kosinusów kierunkowych a_{ij} (a_{ij} jest kosinusem kąta pomiędzy i -tą osią układu „nowego” a j -tą układu „starego”).

❖ Transformacja tensora:

Rozważmy jako przykład tensor naprężeń:

$$\sigma'_{ij} = a_{ik} \cdot a_{jl} \cdot \sigma_{kl} \quad (10)$$

Również i w tym równaniu zastosowano konwencję sumowania po powtarzającym się wskaźniku (w tym wypadku k i l).

szczegółowo (np. składowa „13”):

$$\begin{aligned} \sigma'_{13} &= a_{1k} \cdot a_{3l} \cdot \sigma_{kl} = \\ &a_{11} \cdot a_{31} \cdot \sigma_{11} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot \sigma_{12} + a_{11} \cdot a_{33} \cdot \sigma_{13} + \\ &a_{12} \cdot a_{31} \cdot \sigma_{21} + a_{12} \cdot a_{32} \cdot \sigma_{22} + a_{12} \cdot a_{33} \cdot \sigma_{23} + \\ &a_{13} \cdot a_{31} \cdot \sigma_{31} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot \sigma_{32} + a_{13} \cdot a_{33} \cdot \sigma_{33} \end{aligned}$$

W powyższej transformacji pojawia się iloczyn dwóch kosinusów kierunkowych, ponieważ mamy do czynienia z transformacją zarówno sił jak i powierzchni.

Często tensor naprężeń przedstawiamy w postaci macierzy:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Jednak nie każda macierz symetryczna jest tensorem! Aby dana macierz reprezentowała tensor, jej wyrazy (np. σ_{ij}) muszą transformować się z układu do układu zgodnie z Równ. 10. Interesującą własnością tensora drugiego rzędu jest to, iż zawsze można znaleźć taki układ współrzędnych, w którym tylko składowe główne są różne od zera; wtedy ma on postać:

$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Wartości na przekątnej nazywamy wartościami własnymi, a znajdujemy je rozwiązując równanie charakterystyczne:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma') & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & (\sigma_{22} - \sigma') & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & (\sigma_{33} - \sigma') \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

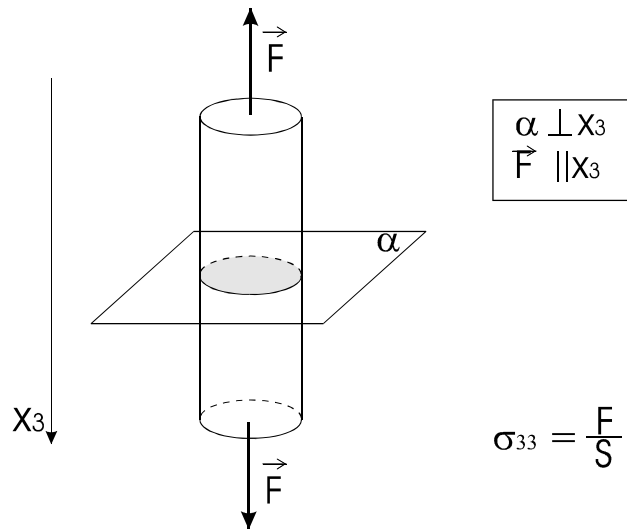
Rozwiązując powyższy wyznacznik otrzymujemy: $(\sigma' - \lambda_1) \cdot (\sigma' - \lambda_2) \cdot (\sigma' - \lambda_3) = 0$. Oczywiście: $\sigma'_{11} = \lambda_1$, $\sigma'_{22} = \lambda_2$, $\sigma'_{33} = \lambda_3$.

Jeżeli $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ to mamy do czynienia z naprężeniem typu hydrostatycznego ($\sigma_{11}'=\sigma_{22}'=\sigma_{33}'$, pozostałe wyrazy tensora przyjmują wartości zerowe).

❖ **Typowe stany naprężeń:**

a) Rozciąganie:

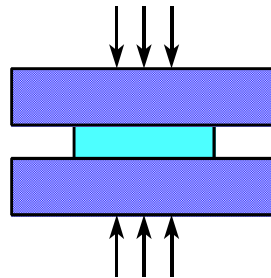
$$\sigma_{ij} = \sigma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Test rozciągania w kierunku osi x_3 . S jest powierzchnią przekroju poprzecznego próbki.

b) Ściskanie:

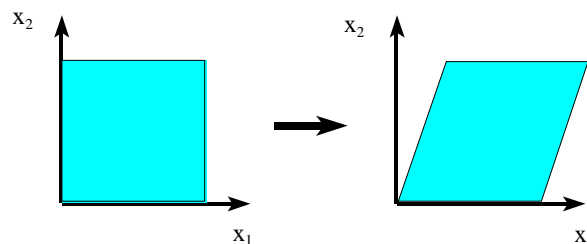
$$\sigma_{ij} = \sigma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Ściskanie wzdłuż osi x_3 .

c) Proste ścinanie:

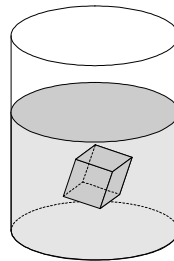
$$\sigma_{ij} = \sigma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Podczas ścinania (np.: $\sigma_{12}=\sigma_{21}$) jednostkowy sześcian materiału staje się równoległociąnem.

d) Naprężenie typu hydrostatycznego:

$$\sigma_{ij} = p \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



W naprężeniu typu hydrostatycznego występują tylko składowe główne tensora naprężeń $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p$

Naprężenia hydrostatyczne mają te same składowe i wartości niezależnie od układu współrzędnych. Jest to intuicyjnie zrozumiałe, bo jakkolwiek byśmy nie obracali kostki zanurzonej w cieczy - patrz rysunek powyżej - to zawsze ciśnienia na jej ściankach będą jednakowe (pomijając oczywiście w tym przykładzie zmianę ciśnienia z wysokością). Ponadto, łatwo można wykazać, że dla dowolnego tensora naprężeń zachodzi następująca relacja: $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{const}$

(czyli ślad macierzy σ_{ij} jest stały, niezależny od układu odniesienia).

❖ **Rozkład dowolnego tensora na składową ścinającą i hydrostatyczną.**

Każdy tensor naprężeń można rozłożyć na część hydrostatyczną i czysto ścinającą (ang.: deviatoric). Załóżmy, że w dowolnym układzie odniesienia mamy tensor naprężeń σ_{ij} .

Przetransformujmy go do układu osi głównych:

$$\sigma_{ij} \xrightarrow{\text{układ osi głównych}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (14)$$

gdzie: $p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$, czyli: $p = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$

oraz: $q + r + s = 0$ (15)

(oczywiście wartości q , r oraz s znajdujemy z Równ.(14); $q = \sigma_{11} - p$, $r = \sigma_{22} - p$, $s = \sigma_{33} - p$).

Następnie można dokonać dwóch kolejnych obrotów wokół osi wzajemnie prostopadłych, które przeprowadzają tensor (14) do następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{obroty}} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-\frac{qs}{2}} & \sqrt{-\frac{qs}{2}} \\ \sqrt{-\frac{qs}{2}} & 0 & -r \\ \sqrt{-\frac{qs}{2}} & -r & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

człon hydrostatyczny

człon ścinający (ang. deviatoric stress)

Pierwszy człon, czyli naprężenie hydrostatyczne nie zmienia się oczywiście po kolejnych obrotach, drugi zaś człon uzyskał postać czystych naprężeń ścinających. Jak pamiętamy, człon hydrostatyczny powoduje odkształcenie sprężyste ciała (np. odwracalne ściśnięcie). Natomiast człon ścinający (ang. deviatoric stress) – jak zobaczymy później – oprócz sprężystego odkształcenia ścinającego, odpowiedzialny jest także za odkształcenie plastyczne, które jest sumą elementarnych nieodwracalnych odkształceń typu ścinającego.

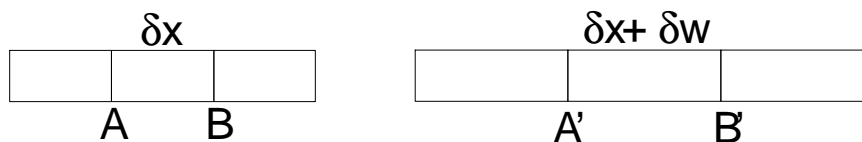
II. Odkształcenie (ang: strain)

Odkształcenie ciała jest odpowiedzią na przyłożone siły (naprężenie). Zaczniemy od najbardziej podstawowego opisu odkształcenia ciała poprzez gradient przemieszczenia.

a) Gradient przemieszczenia

Jeden wymiar.

Zdefiniujemy najpierw odkształcenie ciała w przypadku jednowymiarowym (np. rozciąganie w kierunku osi x). Odcinek o początkowej długości δx wydłużył się o δw .

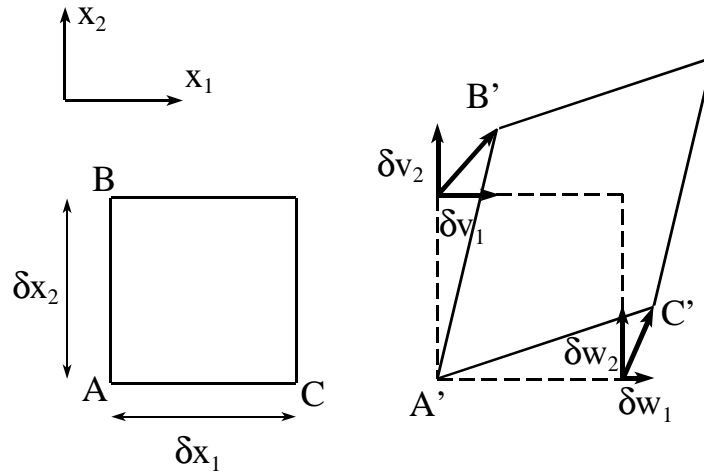


Odcinek o początkowej długości AB jest rozciągnięty do długości A'B'

Zdefiniujemy gradient przemieszczenia (ϵ) ciała, w punkcie A:

$$e = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta w}{\delta x} = \frac{dw}{dx} \quad (17)$$

Dwa wymiary



Składowe gradientu przemieszczenia definiujemy przez deformację kwadratu \$ABC\$.

- Składowe normalne definiują zmiany rozmiarów odcinków; i tak:

$$\text{względne wydłużenie } AB = \lim_{\delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\delta v_2}{\delta x_2} = \frac{dv_2}{dx_2} = e_{22} \quad (18)$$

$$\text{względne wydłużenie } AC = \lim_{\delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\delta w_1}{\delta x_1} = \frac{dw_1}{dx_1} = e_{11} \quad (19)$$

(Zauważmy, że w Równ. 18-21 bierzemy pod uwagę znaki \$\delta v_1\$, \$\delta v_2\$, \$\delta w_1\$ oraz \$\delta w_2\$).

Przykładowo w Równ. (18) w przypadku \$\delta v_2 > 0\$ mamy wydłużenie, w przeciwnym zaś razie – skrócenie.)

- Składowe ścinające definiują zmiany orientacji:

zmiana orientacji AB:

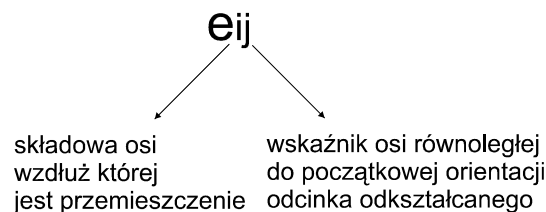
$$e_{12} = \lim_{\delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\delta v_1}{\delta x_2} = \frac{dv_1}{dx_2} \quad (20)$$

zmiana orientacji AC:

$$e_{21} = \lim_{\delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\delta w_2}{\delta x_1} = \frac{dw_2}{dx_1} \quad (21)$$

Powyżej zdefiniowane wielkości e_{ij} są składowymi *tensora gradientu przemieszczenia*.

Podsumujmy konwencję wskaźników i, j występujących w e_{ij} :



Zbierzmy razem definicje składowych tensora gradientu przemieszczenia e_{ij} :

$$\begin{array}{ll}
 e_{11} = \frac{dw_1}{dx_1} & e_{12} = \frac{dv_1}{dx_2} \\
 e_{21} = \frac{dw_2}{dx_1} & e_{22} = \frac{dv_2}{dx_2}
 \end{array}$$

Zauważmy, że ze względu na poglądowność, użyliśmy odrębnych oznaczeń δw_i i δv_i do oznaczenia przemieszczeń odcinków δx_1 i δx_2 . Nie ma żadnego powodu, aby tak robić w ogólnym przypadku. Wprowadzamy, zatem pojęcie pola przemieszczeń $\delta u_i(x_1, x_2)$, które jest funkcją położenia. Tak, więc podsumujmy:

Zamiast: $\delta w_i, \delta v_i \rightarrow \delta u_i(x_1, x_2)$

W ogólnym przypadku, tensor gradientu przemieszczenia definiujemy jako:

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (22)$$

Trzy wymiary:

W trzech wymiarach sytuacja przedstawia się analogicznie jak powyżej, uwzględniamy dodatkowo wymiar w kierunku osi x_3 . A zatem wskaźniki w Równ.(22) przyjmują wartości: $i,j=1,2,3$.

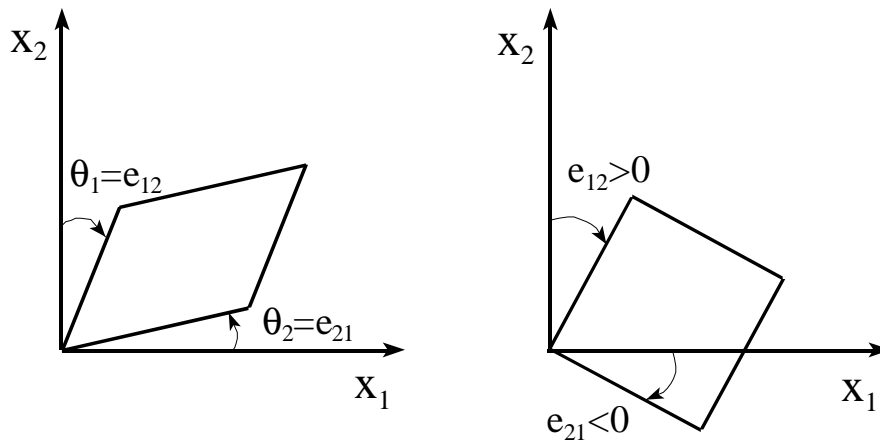
b) Odkształcenie i obrót

Jak widzieliśmy już wyżej, gradient odkształcenia e_{ij} opisuje względne zmiany rozmiarów ciała. Przykładowo, w przypadku dwuwymiarowym (rysunek poniżej, po lewej) ciało o początkowym kształcie kwadratu przechodzi w równoległobok; kąty θ_1 i θ_2 opisane są odpowiednio przez e_{12} i e_{21} :

$$\begin{aligned}e_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \operatorname{tg} \theta_1 \\e_{21} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \operatorname{tg} \theta_2\end{aligned}\tag{23}$$

Równocześnie składowe e_{11} i e_{22} opisują względne zmiany wymiarów ciała w kierunkach x_1 i x_2 :

$$\begin{aligned}e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\end{aligned}\tag{24}$$



Po lewej: ciało o początkowym kształcie kwadratu przechodzi po odkształceniu w równoległobok; składowe e_{11}, e_{22} opisują jego wydłużenie (bądź skrócenie) w kierunkach x_1 i x_2 , zaś składowe ścinające e_{12} i e_{21} – zmianę orientacji odcinków δx_1 i δx_2 ($\text{tg } \theta_1 = e_{12}$, $\text{tg } \theta_2 = e_{21}$).

Po prawej: sztywny obrót ciała ($e_{12} = -e_{21}$ lub też: $\theta_1 = -\theta_2$).

Może się jednak zdarzyć, że ciało doznało jedynie sztywnego obrotu, bez zmiany kształtu.

Sytuacja taka pokazana jest po prawej części rysunku; wtedy: $e_{12} = -e_{21}$.

Musimy zatem zmodyfikować definicję odkształcenia, tak, aby nie zawierała w sobie sztywnego obrotu. Definiujemy zatem *tensor odkształcenia i obrotu*:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) \quad \text{- tensor odkształcenia (symetryczny)} \quad (25)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) \quad \text{- tensor obrotu (anty-symetryczny)} \quad (26)$$

Tensor odkształcenia jest symetryczny, tzn. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, zaś tensor obrotu jest anty-symetryczny, tzn.: $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Oznacza to, że w przypadku trójwymiarowym mamy sześć niezależnych składowych tensora odkształcenia ($\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$) oraz trzy niezależne składowe tensora obrotu ($\omega_{12} = -\omega_{21}, \omega_{13} = -\omega_{31}$ i $\omega_{23} = -\omega_{32}$).

Warunek zgodności

W omawianym przez nas wcześniej przypadku dwuwymiarowym, zdefiniowaliśmy trzy niezależne składowe odkształcenia ($\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ i $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$) – na podstawie dwóch tylko składowych przemieszczenia: du_1 i du_2 . Nasuwa to wniosek, że pomiędzy składowymi

odkształcenia musi istnieć jakaś dodatkowa zależność. Istotnie, można łatwo wykazać, że zachodzi między nimi następująca relacja, zwana warunkiem zgodności (ang. compatibility condition):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (27)$$

Odpowiednie równania istnieją także dla przypadku trójwymiarowego.

c) Transformacja tensorów

Omawiane przez nas wielkości, opisywane dwoma wskaźnikami, jak naprężenia, odkształcenia i obroty – są tensorami drugiego rzędu. Jak już widzieliśmy na przykładzie tensora naprężeń, przechodząc z jednego układu odniesienia do innego, musimy dokonać transformacji tych wielkości. Co więcej, spełnienie równania transformacyjnego jest również warunkiem koniecznym na to, aby rozważany obiekt był tensorem.

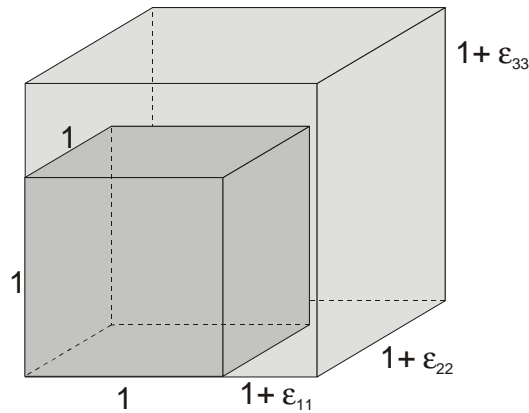
Zestawmy równania transformacji poznanych już przez nas tensorów drugiego rzędu (a_{ij} są kosinusami kierunkowymi, czyli elementami macierzy obrotu):

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= a_{ik} \cdot a_{jl} \cdot \sigma_{kl} \\ e'_{ij} &= a_{ik} \cdot a_{jl} \cdot e_{kl} \\ \varepsilon'_{ij} &= a_{ik} \cdot a_{jl} \cdot \varepsilon_{kl} \\ \omega'_{ij} &= a_{ik} \cdot a_{jl} \cdot \omega_{kl} \end{aligned} \quad (28)$$

Po prawej stronie powyższych równań występuje sumowanie po powtarzających się wskaźnikach (k oraz l), co reprezentuje sumę dziewięciu składników (po wszystkich składowych tensora).

d) Przykłady odkształceń:

Odształcenie 'normalne'



Odształcenie „normalne” sześcianu jednostkowego. Taki typ odkształcenia może zajść np. wskutek rozszerzalności termicznej.

Odształcenie normalne opisany jest tensorem:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Wyliczmy względną zmianę objętości (dylatację) Δ :

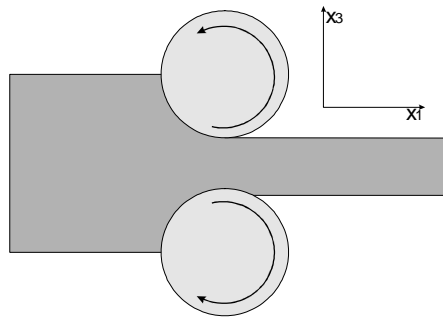
$$\Delta = \frac{\Delta V}{V_0} = (1 + \varepsilon_{11}) \cdot (1 + \varepsilon_{22}) \cdot (1 + \varepsilon_{33}) - 1 \quad (30)$$

Po rozwinięciu prawej strony i zaniechaniu wyrazów małych drugiego i trzeciego rzędu, otrzymujemy: $\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, lub stosując konwencję powtórzonych wskaźników:

$$\Delta = \varepsilon_{ii} \quad (31)$$

Czyli: względną zmianę objętości (dylatacja) równa jest śladowi macierzy odkształcenia. Jest to oczywiście niezmiennik (nie zależy od układu odniesienia).

Walcowanie:



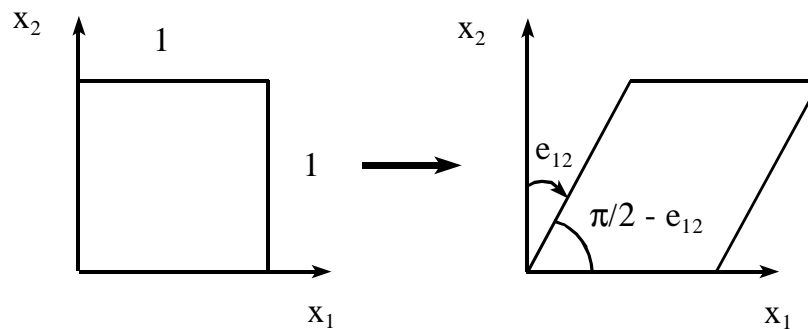
Opisuje je tensor odkształcenia:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

gdzie ε jest „amplitudą” macierzy odkształcenia. W odkształceniu plastycznym tego typu, względną zmianę objętości $\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} = 0$, z czego właśnie wynika, że $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{33}$.

Proste ścinanie:

Rozpatrzmy odkształcenie typu prostego ścinania w dwóch wymiarach. Opisane jest ono składową ścinającą e_{ij} tensora gradientu odkształcenia, np. e_{12} (tutaj $e_{21} = 0$):



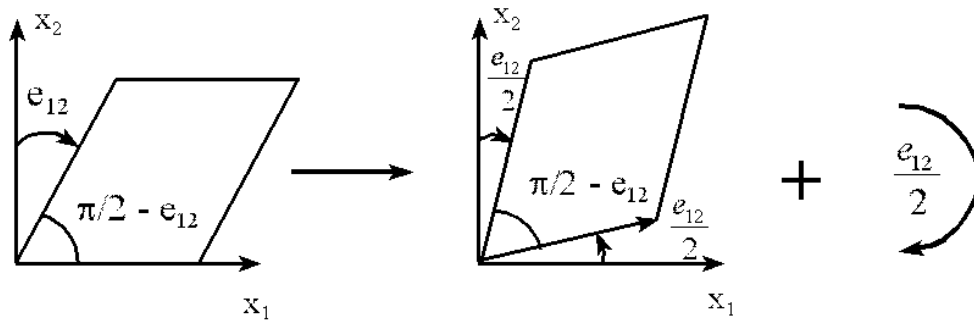
Składową e_{12} możemy formalnie przepisać jako:

$$e_{12} = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}) + \frac{1}{2}(e_{12} - e_{21})$$

(w pokazanym powyżej przypadku $e_{21} = 0$). A zatem:

$$e_{12} = \varepsilon_{12} + \omega_{12}$$

W konsekwencji, odkształcenie typu prostego ścinania (e_{12}) możemy przedstawić przez składową odkształcenia ϵ_{12} (i ϵ_{21}) oraz obrotu ω_{12} :

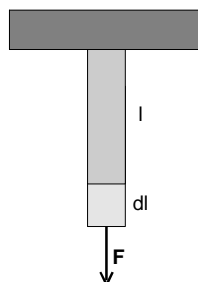


$$\text{Gradient przemieszczenia } e_{12} = \text{odkształcenie } \epsilon_{12} (= \epsilon_{21}) + \text{obrót } \omega_{12} = e_{12}/2$$

Podkreślmy, że tensor odkształcenia (ϵ_{ij}) jest symetryczny, w przeciwieństwie do tensora gradientu przemieszczenia e_{ij} .

e) Logarytmiczna miara odkształcenia:

Tensory gradientu przemieszczenia oraz odkształcenia zdefiniowane są dla nieskończenie małych odkształceń ciała. Pojawia się, zatem pytanie, jak opisać duże odkształcenia, które występują np. podczas odkształcenia plastycznego. Jedną z możliwości jest tzw. logarytmiczna miara odkształcenia.



Rozważmy przykład rozciągania osiowego. Jeśli pręt o początkowej długości L_0 zostanie rozciągnięty do końcowej długości L , to "makroskopowa" miara odkształcenia równa jest sumie (całce) odkształceń cząstkowych:

$$\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dl}{l} = \ln \frac{L}{L_0} \quad (32)$$

Ważną właściwością tej miary odkształcenia jest jej addytywność. Jeśli pręt będzie rozciągany w dwóch etapach (od L_0 do L_1 i od L_1 do L_2), to logarytmiczne miary cząstkowe dodają się i ich suma daje wynik identyczny jak przy bezpośrednim rozciąganiu pod L_0 do L_2 . Pokazano to poniżej:

$$1 \text{ etap} \Rightarrow L_0 \rightarrow L_1 \quad \varepsilon_1 = \ln \frac{L_1}{L_0}$$

$$2 \text{ etap} \Rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{L_2}{L_1}$$

$$\text{Całkowita odkształcenie:} \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \ln \frac{L_1}{L_0} + \ln \frac{L_2}{L_1}$$

$$\text{Ostatecznie:} \quad \varepsilon = \ln \frac{L_1}{L_0} \frac{L_2}{L_1} = \ln \frac{L_2}{L_0}$$

f) Przykłady testu rozciągania

Własności mechaniczne materiałów bada się w rozmaitych testach. Jednym z podstawowych jest test rozciągania. W teście tym bardzo istotną sprawą jest aby koncentracja naprężeń nie miała miejsca na końcach badanej próbki; w tym celu nadaje się jej specyficzny kształt.

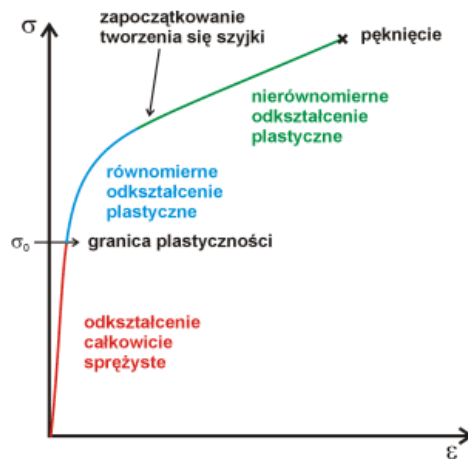
Kształt próbki do testu rozciągania.

Przez zaznaczone otwory przeprowadza się śruby mocujące.



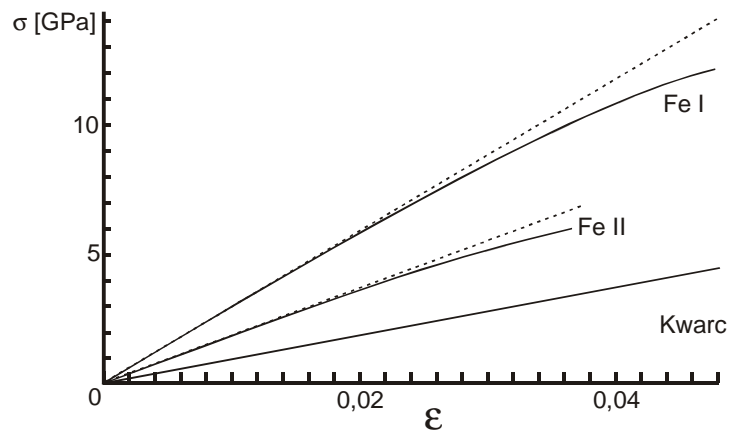
Poniżej zamieszczono kilka typowych rezultatów testów rozciągania.

a) Typowy metal o strukturze regularnej płasko centrowanej (np. miedź)



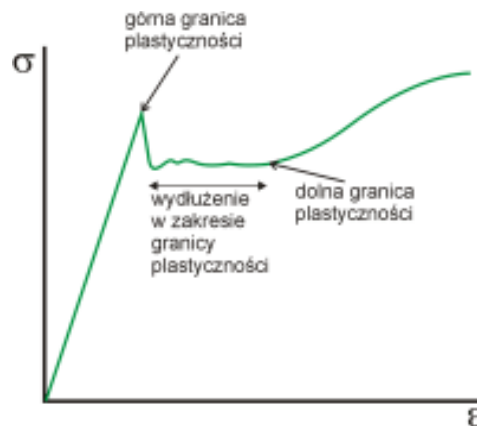
Typowa krzywa rozciągania ($\sigma_{11}=f(\epsilon_{11})$) dla metalu. Rysunek sporządzono na podstawie: A.G. Guy, Wprowadzenie do nauki o materiałach, PWN, Warszawa, 1977

b) Ciało elastyczne – kruche



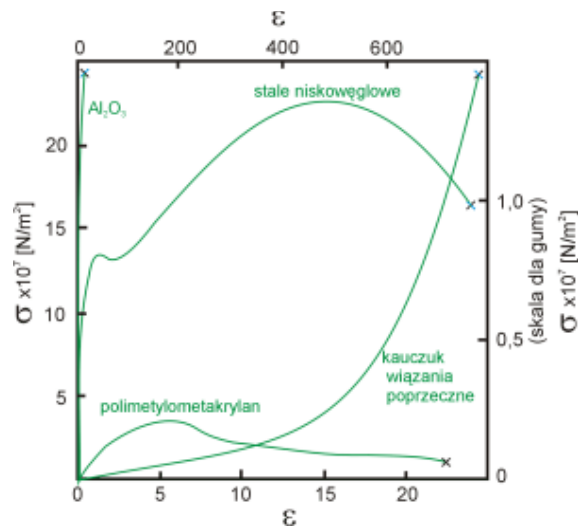
Krzywe rozciągania dla tzw. wiskersów. Są to monokryształy w postaci cienkich nitki, zawierające bardzo mało defektów, a zatem niewykazujące odkształcenia plastycznego. Po etapie odkształcenia sprężystego (liniowego i nieliniowego) następuje kruche pęknięcie (linią przerywaną zaznaczono przedłużenie liniowego zakresu odkształcenia sprężystego).

c) Stal z podwójną granicą plastyczności



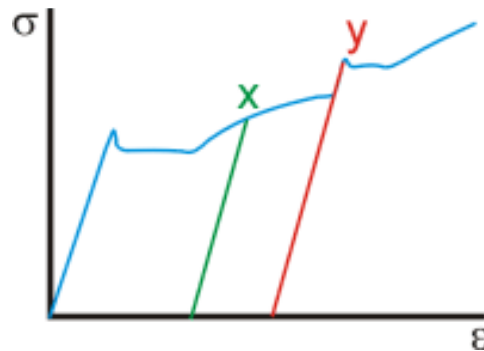
Krzywa rozciągania materiału wykazującego górną i dolną granicę plastyczności, np. żelazo domieszkowane C i N (Dietek)

d) Porównanie materiału ceramicznego, stali i polimerów



Krzywe rozciągania dla materiałów wykazujących odmienne własności mechaniczne: a) Al_2O_3 , b) stal niskowęglowa, c) kauczuk, d) polimetylometakrylan. Krzywe te przedstawiono na tzw. wykresie nominalnym, czyli naprężenie nominalne (F/A_0 , gdzie A_0 jest początkowym przekrojem próbki) w funkcji odkształcenia nominalnego $\Delta L/L_0$ (L_0 jest długością początkową próbki). Rysunek zaczerpnięto z: A.G. Guy, Wprowadzenie do nauki o materiałach, PWN, Warszawa, 1977

e) Materiał wykazujący efekt starzenia



Krzywa rozciągania materiału wykazującego efekt starzenia: x – po krótkotrwałym odciążeniu, y – po długotrwałym odciążeniu (Dieter)

Trzeba zauważyć, w przypadku metali zakres odkształcenia sprężystego jest bardzo mały (nie przekracza wydłużenia rzędu 0.1 %), zaś całkowite wydłużenie próbki (do pęknięcia) rzadko przekracza 20%. Istnieją niemniej specjalne efekty, w których obie te granice są znacznie większe. Np. w metalach wykazujących tzw. efekt pamięci kształtu, odkształcenie odwracalne (tzw. pseudo-sprężystość) może dochodzić do 20%, zaś w zjawisku tzw. super-plastyczności, próbka może wykazać całkowite wydłużenie rzędu kilkudziesięciu %. Pierwszy z tych efektów polega na odwracalnej przemianie fazowej (martenzytycznej), zaś drugi na zmianie kształtu próbki poprzez dyfuzyjny ruch atomów.