

STATYKA I DYNAMIKA PŁYNÓW

STATYKA PŁYNÓW

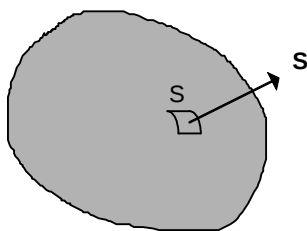
Ciśnienie i gęstość

Różnica w działaniu siły na płyn i na ciało stałe polega na tym, że w spoczywającej cieczy siła musi być zawsze prostopadła do powierzchni płynu, podczas gdy w ciele stałym może mieć dowolny kierunek. Spoczywający płyn nie może równoważyć sił stycznych (warstwy płynu ślizgałyby się po sobie) i dlatego może zmieniać kształt i płynąć. Wygodnie jest, więc opisywać siłę działającą na płyn za pomocą *ciśnienia p zdefiniowanego jako wartość siły prostopadłej działającej na jednostkę powierzchni*. Ciśnienie jest przekazywane na sztywne ścianki naczynia, a także na dowolne przekroje płynów *prostopadle* do tych ścianek i przekrojów w każdym punkcie. Ciśnienie jest wielkością skalarną.

W układzie SI jednostką jest *pascal*: $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$. Na uwagę zasługuje też jednostka *bar* ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$), gdyż tyle wynosi w przybliżeniu ciśnienie atmosferyczne.

Płyn znajdujący się pod ciśnieniem wywiera siłę na każdą powierzchnię będącą z nim w kontakcie. Rozważmy zamkniętą powierzchnię zawierającą płyn (rysunek). Dowolny element powierzchni jest reprezentowany przez wektor $\mathbf{S}$ (długość tego wektora równa jest reprezentowanej powierzchni, jego kierunek prostopadły do niej, zwrot na zewnątrz). Wtedy siła $\mathbf{F}$ wywierana przez płyn na ten element powierzchni wynosi:

$$\mathbf{F} = p\mathbf{S} \quad (1)$$



Rys. 1. Fragment płaskiej powierzchni (S) może być przedstawiony poprzez wektor doń prostopadły

Ponieważ F i S mają ten sam kierunek, więc ciśnienie p można zapisać

$$p = F/S \quad (2)$$

Opisując masę płynów najwygodniej jest stosować pojęcie *gęstości* ρ :

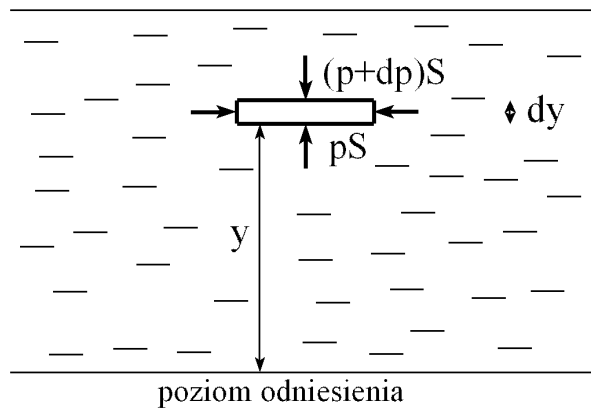
$$\rho = m/V \quad (3)$$

Gęstość zależy od wielu czynników takich jak temperatura, ciśnienie. W tabeli przedstawiony jest zakres wartości gęstości spotykanych w przyrodzie.

Materiał	ρ (kg/m ³)
przestrzeń międzygwiazdowa	$10^{-18} - 10^{-21}$
najlepsza próżnia laboratoryjna	10^{-17}
powietrze (1 atm 0 °C)	1.3
powietrze (50 atm 0 °C)	6.5
Woda	10^3
aluminium	$2.7 \cdot 10^3$
Ziemia: wartość średnia	$5.52 \cdot 10^3$
rdzeń	$9.5 \cdot 10^3$
skorupa	$2.8 \cdot 10^3$
Słońce (wartość średnia)	$1.4 \cdot 10^3$
białe karły	$10^8 - 10^{15}$
jądro uranu	10^{17}

Zmiany ciśnienia wewnątrz nieruchomego płynu

W płynie znajdującym się w równowadze każda jego część pozostaje w spoczynku. Rozpatrzmy element cieczy w kształcie cienkiego dysku znajdującego się w odległości y od jakiegoś poziomu odniesienia.



Rys.2. Siły działające na element cieczi

Grubość dysku wynosi dy , a jego pozioma powierzchnia wynosi S . Masa elementu wynosi $\rho S dy$, a jego ciężar $\rho g S dy$. Siły poziome, wywołane jedynie przez ciśnienie płynu, równoważą się. Siły pionowe są wywoływane nie tylko przez ciśnienie płynu, ale też przez jego ciężar. Element płynu jest w spoczynku, a więc wypadkowa siła działająca nań musi być zerem. Dla zachowania równowagi w pionie trzeba, więc by:

$$pS = (p+dp)S + \rho g S dy$$

gdzie $(p+dp)$ to ciśnienie na górną powierzchnię a p na dolną, a stąd:

$\frac{dp}{dy} = -\rho g$	(4)
---------------------------	-----

Równanie to pokazuje, że ciśnienie maleje wraz z wysokością. Powodem jest ciężar warstwy płynu leżącej pomiędzy punktami, dla których mierzymy różnicę ciśnień. Jeżeli p_1 jest ciśnieniem na wysokości y_1 a p_2 ciśnieniem na wysokości y_2 to całkując powyższe równanie mamy:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

lub

$$p_2 - p_1 = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

Przyjmując ρ i g za stałe otrzymujemy:

$$(p_2 - p_1) = -\rho g (y_2 - y_1)$$

Wygodnie jest przyjąć powierzchnię cieczy jako poziom odniesienia ($y=y_2$). Zauważmy ponadto, iż ciśnienie p_2 (na powierzchni) jest równe ciśnieniu atmosferycznemu p_0 . Różnica $h=y_2-y_1$ opisuje położenie pewnego poziomu w cieczy względem powierzchni (licząc w głąb). Ciśnienie na tej głębokości oznaczmy $p_1=p$. Wtedy

$$p_0 - p = -\rho gh$$

lub:

$p = p_0 + \rho gh$	(5)
---------------------	-----

Związek ten pokazuje, że ciśnienie rośnie wraz z głębokością i że jest jednakowe dla punktów o tej samej głębokości.

Zastanówmy się teraz jak ciśnienie zmienia się wewnątrz gazu. Gęstość gazu, ρ , jest zazwyczaj mała w porównaniu z cieczą. Powoduje to, że różnica ciśnień między dwoma punktami naczynia (o niezbyt dużych rozmiarach) wypełnionego gazem jest na ogół do pominięcia i dlatego można przyjmować, że ciśnienie gazu w naczyniu jest wszędzie jednakowe. Nie jest to jednak prawdziwe, gdy mamy do czynienia ze znaczną różnicą wysokości (np., gdy wznosimy się w atmosferze). Ciśnienie zmienia się wtedy znacznie (o czym przekonują się np. alpinisci), zmienia się też i gęstość ρ . Dlatego też, aby scałkować równanie $\frac{dp}{dy} = -\rho p$, musimy znać ρ jako funkcję y .

Z równania stanu gazu można łatwo wykazać, że ρ jest proporcjonalne do ciśnienia ($\rho \sim p$) przy $T=\text{const}$. Opierając się na tej zależności, wyliczmy ciśnienie p powietrza na wysokości y ponad poziomem morza. Użyjemy Równ. 4:

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \tag{Równ.4}$$

Ponieważ $\rho \sim p$ więc:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \tag{6}$$

gdzie ρ_0 i p_0 to znane wartości gęstości i ciśnienia na poziomie morza. Wstawiając ρ ($\rho = p\rho_0/p_0$) z powyższego równania do Równ.4, otrzymujemy:

$$\frac{dp}{dy} = -g\rho_0 \frac{p}{p_0}$$

lub:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{g\rho_0}{p_0} dy \quad (7)$$

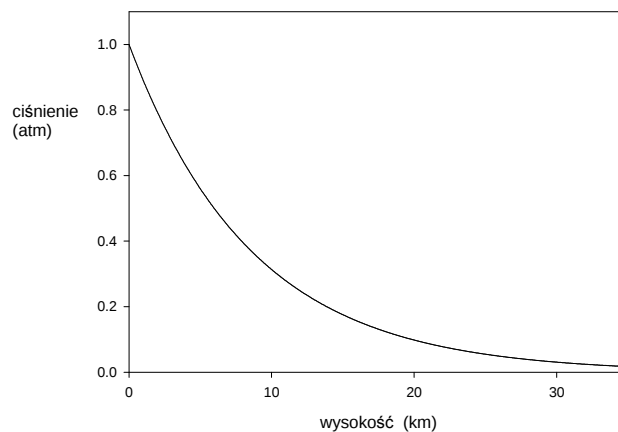
Całkując to wyrażenie od p_0 w punkcie $y=0$ (poziom morza) do p w punkcie y nad poziomem morza mamy :

$$\ln \frac{p}{p_0} = - \frac{g\rho_0}{p_0} y$$

albo

$$p = p_0 \exp[-g(\rho_0 / p_0)y] \quad (8)$$

Zależność tą przedstawia poniższy rysunek.



Rys. 3. Zmiana ciśnienia wraz z wysokością w powietrzu. Wysokość liczona jest od poziomu morza (krzywa wyliczona wg. Równ. 8)

W rzeczywistości zmiana ciśnienia z wysokością różni się trochę od tego, co przewiduje Równ.8 (temperatura powietrza maleje wraz z wysokością, co wpływa na zmianę gęstości, czego tutaj nie uwzględniliśmy), niemniej powyższa zależność jest niezłym przybliżeniem.

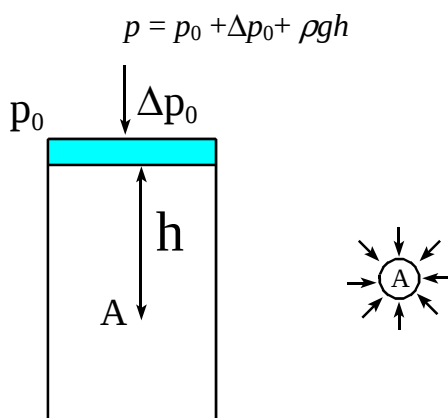
Prawo Pascala i prawo Archimedesesa

Prawo Pascala

Na Rys. 4 widać ciecz w naczyniu zamkniętym tłokiem, na który można działać ciśnieniem zewnętrznym p_0 . W każdym punkcie A znajdującym się na głębokości h od górnej powierzchni cieczy, ciśnienie jest dane wyrażeniem

$$p = p_0 + \rho gh$$

gdzie p_0 jest ciśnieniem zewnętrznym. Załóżmy, że powiększymy ciśnienie zewnętrzne o wartość Δp_0 . Ponieważ ciecze są nieściśliwe więc gęstość pozostaje praktycznie bez zmian i dlatego ciśnienie teraz wynosi:



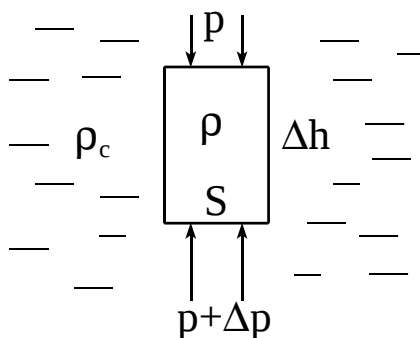
Rys.4. Przyłożone do cieczy z zewnątrz ciśnienie Δp_0 rozchodzi się równomiernie w całej cieczy (np. w punkcie A na wysokości h).

Inaczej mówiąc, dodatkowy impuls ciśnienia przyłożony z zewnątrz na ciecz przenosi się jednorodnie i wywierane jest w każdym jej punkcie. Wynik ten został sformułowany przez Blaise Pascala (*prawo Pascala*):

Ciśnienie wywierane na zamknięty płyn jest przekazywane niezmiennie na każdą część płynu oraz na ścianki naczynia.

Prawo Archimedesza.

Kiedy ciało jest zanurzone w całości lub częściowo w spoczywającym płynie (cieczy lub gazie) to płyn ten wywiera ciśnienie na każdą część powierzchni ciała. Wypadkowa siła jest skierowana ku górze i nazywa się *siłą wyporu*.



Rys.5. Powstawanie siły wyporu działającej na ciało zanurzone w cieczy

Wyliczmy siłę wyporu dla ciała w kształcie prostopadłościanu o polu powierzchni podstawy S oraz o wysokości Δh . Łatwo zauważyć, że siły działające na ścianki boczne równoważą się. Siła wypadkowa $Q = S(p + \Delta p) - Sp = S\Delta p$. Lecz zgodnie z Równ. 5: $\Delta p = \rho_c g \Delta h$ (gdzie ρ_c jest gęstością cieczy), a zatem:
 $Q = S\Delta h \rho_c g = V \rho_c g$. Tak więc:

$$Q = V \rho_c g \quad (9)$$

Otrzymaliśmy *prawo Archimedes'a*:

Ciało zanurzone w płynie jest wypierane ku górze siłą równą ciężarowi wypartego przez to ciało płynu.

Prawo to jest słuszne dla ciała o dowolnym kształcie, a nie tylko dla rozważanego przez nas szczególnego przypadku sześcienu.

Zauważmy, że warunkiem pływania ciała jest, aby ciężar ciała (P) był mniejszy od siły wyporu (Q): $P \leq Q$. Ponieważ $P = V \rho g$ (gdzie ρ jest gęstością ciała), więc warunek pływania ciała:

$$\rho \leq \rho_c \quad (10)$$

Napięcie powierzchniowe

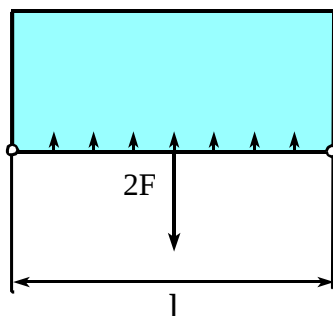
Cząstki znajdujące się na powierzchni cieczy znajdują się w innych warunkach, niż cząstki wewnątrz cieczy. Cząstki na powierzchni mają większą energię, gdyż działają na nie wypadkowe siły do wnętrza cieczy (zaś na zewnątrz nie ma cząstek cieczy). Naturalną zatem tendencją jest dążność do minimalizacji powierzchni zewnętrznej, gdyż zmniejsza to całkowitą energię układu.

Jeśli będziemy obserwować krople cieczy w stanie nieważkości (np. krople oliwy zanurzone w innej cieczy o tej samej gęstości lub krople cieczy w statku kosmicznym), to zauważymy, iż przyjmują one idealnie kulisty kształt.

Energia cząstek warstwy powierzchniowej jest proporcjonalna do pola S tej powierzchni:

$$E = \sigma S \quad (11)$$

Współczynnik proporcjonalności σ nazywa się *napięciem powierzchniowym*. Wartość napięcia powierzchniowego wyznaczyć możemy w doświadczeniu z ramką z ruchomym drutem. Po zanurzeniu takiej ramki w wodzie mydlanej, pozostaje napięta błonka mydlana. Dąży ona do zmniejszenia swej powierzchni, a zatem działa ona na ruchomą poprzeczkę pewną siłą, unosząc ją do góry. Do zrównoważenia tej siły na poprzeczce zawiesić trzeba mały ciężarek. Napięta błonka ma dwie powierzchnie, a więc siła działająca na poprzeczkę wynosi $2F$ i przypada ona na brzeg cieczy o długości $2l$.



Rys.6. Ramka do pomiaru napięcia powierzchniowego

Napięcie powierzchniowe σ wyraża się stosunkiem siły do długości odcinka, na który ona działa:

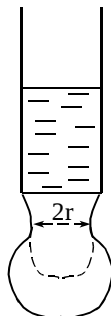
$$\sigma = \frac{2F}{2l} = \frac{F}{l} \quad (12)$$

Wyrażenie to można łatwo uzasadnić. Załóżmy, że przesunęliśmy ruchomy drucik ramki w dół o mały odcinek Δx ; wykonaliśmy przy tym pracę $W=2F\Delta x$. Równocześnie powiększyliśmy powierzchnie obu błonek sumarycznie o $2l \Delta x$, a zatem energię tych powierzchni o: $\Delta E=2\sigma l \Delta x$. Z zasady zachowania energii: $W=\Delta E$, z czego otrzymujemy: $\sigma=F/l$ (czyli Równ.12).

Wartość napięcia powierzchniowego, σ , ma dla każdej cieczy określona wartość, która maleje ze wzrostem temperatury. Zależy ono także od zanieczyszczeń cieczy. Napięcie powierzchniowe definiujemy jako energię przypadającą na jednostkową powierzchnię granicy, czyli ma wymiar: J/m^2 , który jest równoważny z N/m , wynikającym z Równ. 12.

Każdy układ będzie dążył do zmniejszenia swojej powierzchni, gdyż minimalizuje to całkowitą energię. Przykładem działania napięcia powierzchniowego jest tworzenie się kropli przy wypływie cieczy z cienkiej rurki (Rys. 7). Na rysunku widzimy etap końcowy oraz

pośredni formowania się kropli. W momencie odrywania się, kropli, jej ciężar $G=mg$, jest jeszcze równoważony przez siłę napięcia powierzchniowego $2\pi r\sigma$, działającą na przewężonym obwodzie kropli o promieniu przekroju r . Potem obwód kropli dalej maleje i kropla odrywa się.



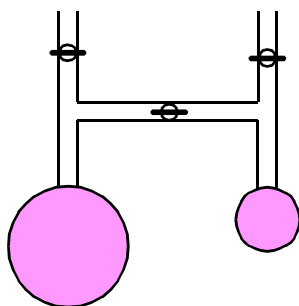
Rys.7. Powstawanie kropli przy wypływie cieczy z cienkiej rurki

Innym przejawem działania napięcia powierzchniowego jest wytwarzanie pewnego nadciśnienia wewnątrz bańki mydlanej. Można łatwo wykazać, iż nadciśnienie to wynosi:

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R} \quad (13)$$

(Załóżmy, że promień bańki R powiększył się o ΔR , a zatem jej powierzchnia wzrosła o $\Delta S = \Delta(4\pi R^2) = 8\pi R \Delta R$. Wzrost energii obu powierzchni bańki wyniesie: $\Delta E = 2\Delta S\sigma = 16\pi R \Delta R\sigma$. Z drugiej strony wykonana praca: $W = S\Delta p \Delta R = 4\pi R^2 \Delta p \Delta R$. Porównując: $W = \Delta E$, otrzymujemy: $4\sigma = \Delta p R$, czyli Rów. 13).

Powyższą relację można zobrazować następującym, efektownym doświadczeniem.

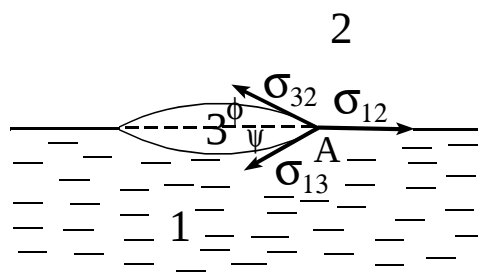


Rys.8. Pokaz zależności ciśnienia wewnątrz bańki mydlanej od jej promienia krzywizny

Przy zamkniętym środkowym kurku (a przy otwartych lewym i prawym), wydychamy dwie bańki mydlane o różnych promieniach. Następnie otwieramy środkowy kurek (przy zamkniętych kurkach lewym i prawym). Zauważymy, że mniejsza bańka (w której panuje

większe ciśnienie) maleje, aż do zaniknięcia. Zaś większa bańka (w której panuje mniejsze ciśnienie) rośnie.

Wartość napięcia powierzchniowego decyduje także o tym, czy dana ciecz tworzy ciekłą warstwę na powierzchni innej cieczy, czy też skupia się w postaci kropeł.



Rys. 9. Kropla oliwy na powierzchni wody

Zauważmy, że w punkcie A spotykają się trzy typy granic między różnymi substancjami: granica „13” między wodą i oliwą, granica „12” wodą i powietrzem oraz granica „32” między oliwą i powietrzem. Trzy siły napięcia powierzchniowego muszą się równoważyć:

$$\sigma_{12} = \sigma_{32} \cos \phi + \sigma_{13} \cos \psi \quad (14)$$

Biorąc pod uwagę, że ϕ i ψ są małe, warunek równowagi sił (czyli istnienie kropli) możemy zapisać:

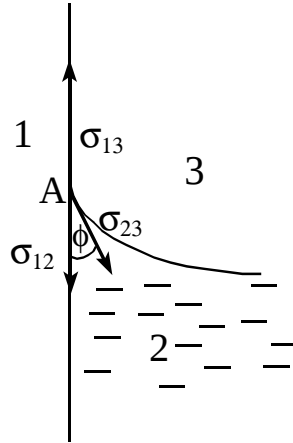
$$\sigma_{12} \cong \sigma_{32} + \sigma_{13} \quad (15a)$$

Jeśli natomiast:

$$\sigma_{12} > \sigma_{32} + \sigma_{13} \quad (15)$$

to warunek równowagi nie może zostać spełniony i kropla zostanie rozciągnięta na powierzchni wody, przy czym grubość powstałej warstwy może być rzędu kilku rozmiarów atomowych (warstwa mono-molekularna).

Innym ważnym efektem związanym z napięciem powierzchniowym jest kształt powierzchni swobodnej cieczy. Rozpatrzmy wodę w pobliżu ścianki naczynia:



Rys. 10. Siły pochodzące od napięcia powierzchniowego, działające na cząsteczkę cieczy znajdującą się przy ścianie naczynia na powierzchni cieczy.

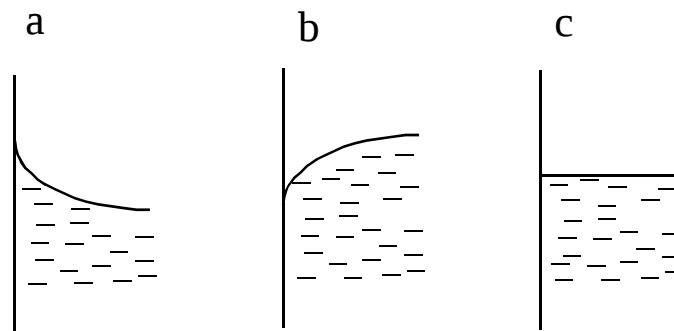
Równowaga sił działających na cząstkę w punkcie A wyraża się następująco:

$$\sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \phi = \sigma_{13} \quad (16)$$

Kąt ϕ (zwany kątem przylegania) wyraża się zatem:

$$\cos \phi = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}} \quad (17)$$

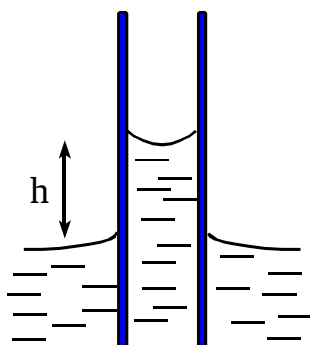
Jeżeli $\sigma_{13} > \sigma_{12}$ to kąt przylegania jest kątem ostrym i powierzchnia cieczy jest wklęsła, jeżeli natomiast $\sigma_{13} < \sigma_{12}$ - kąt ϕ jest kątem rozwartym i powierzchnia cieczy jest wypukła. W szczególnym przypadku $\sigma_{13} - \sigma_{12} = \sigma_{23}$, kąt przylegania wynosi zero.



Rys.11. Kształt powierzchni cieczy przy ścianie naczynia w zależności od relacji sił napięcia powierzchniowego: a) $\sigma_{13} > \sigma_{12}$, b) $\sigma_{13} < \sigma_{12}$, c) $\sigma_{13} = \sigma_{12}$.

W przypadku, gdy ciecz tworzy wklęsłą powierzchnię przy ścianie naczynia (przypadek „a” z powyższego rysunku), wystąpi zjawisko wznoszenia się jej w cienkich rurkach (naczynia

włoskowate). Efekt ten pokazany jest na poniższym rysunku. Zjawisko włoskowatości ma duże znaczenie w przyrodzie; dzięki niemu na przykład woda wspina się w górę łądyg i pni roślin.



Rys.12. „Wspinanie” się cieczy w cienkiej rurce (zjawisko włoskowatości) w przypadku wklęsłej powierzchni swobodnej cieczy w pobliżu ścianki

Wykazuje się, że wysokość, na jaką podnosi się ciecz w naczyniu włoskowatym wynosi:

$$h = \frac{2\sigma \cos \phi}{r\rho g} \quad (18)$$

gdzie r jest promieniem rurki, ρ - gęstością cieczy, ϕ - kątem przylegania, zaś g - przyspieszeniem ziemskim.

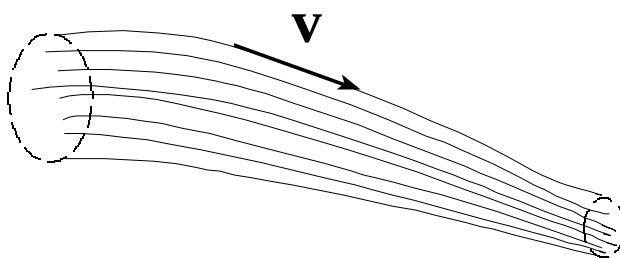
DYNAMIKA CIECZY

Uwagi ogólne

Jednym ze sposobów opisu ruchu płynów, stworzonym przez J.L. Lagrange’a, jest podział płynu na nieskończenie małe elementy objętości (cząsteczki) i śledzenie ich ruchu. Innym sposobem rozwiniętym przez L. Eulera, jest określenie gęstości i prędkości płynu w każdym punkcie przestrzeni oraz w każdej chwili czasu (zamiast opisywania historii ruchu każdej cząstki płynu). Ten drugi sposób opisu, jest częściej używany; koncentruje on naszą uwagę na tym, co dzieje się w pewnym określonym punkcie przestrzeni (x,y,z) oraz w określonym czasie (t). Ruch płynu, zatem będzie opisywany poprzez podanie pola jego gęstości $\rho(x,y,z,t)$ i prędkości $v(x,y,z,t)$.

Ruch cząsteczek w cieczy rzeczywistej

Przez przepływ cieczy rozumie się ruch jej cząsteczek. *Przepływem ustalonym* cieczy nazywamy taki ruch cieczy, przy którym prędkość i ciśnienie w określonych punktach rozpatrywanej przestrzeni są stałe, chociaż przez te punkty przepływają różne cząsteczki. *Linia prądu* nazywamy linię, do której są styczne w każdym jej punkcie wektory prędkości cząstek cieczy (Rys. 13).



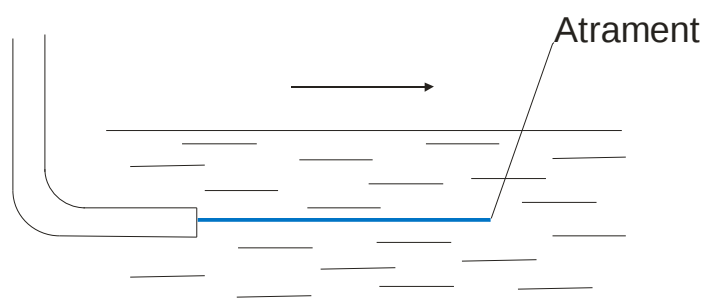
Rys.13. Przepływ cieczy obrazowany przez linie prądu oraz strugę.

Rozkład prędkości w cieczy obrazujemy w ten sposób, że rysujemy liczbę linii prądu przechodzących przez poprzeczny przekrój jednostkowy (gęstość linii prądu) jako proporcjonalną do prędkości przepływu cieczy. Oznacza to, że im większa prędkość przepływu cieczy w danym miejscu, tym więcej linii prądu przypada na jednostkę przekroju poprzecznego. Wybrana objętość cieczy, ograniczona liniami prądu, nosi nazwę *strugi prądu* (Rys.13). Prawa opisujące przepływ cieczy są słuszne również dla gazów (przy prędkościach przepływu mniejszych od prędkości dźwięku w danym gazie).

Doświadczenia pokazują, że możemy wyróżnić dwa typy przepływu cieczy: przepływ *laminarny* i przepływ *turbulentny*.

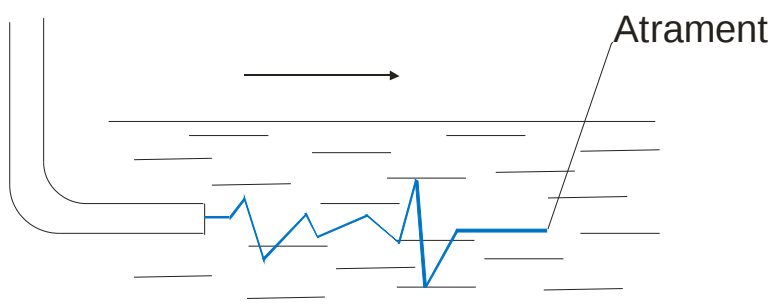
W przepływie laminarnym (zwanym też ustalonym) - warstwy cieczy przesuwają się jedne po drugich, nie mieszając się. W dowolnym punkcie przepływu prędkość każdej przechodzącej przez ten punkt cząsteczki cieczy jest zawsze taka sama. W jakimś innym punkcie cząstka może się poruszać z inną prędkością, ale każda następna cząstka przechodząca przez ten drugi punkt zachowuje się w nim zupełnie tak samo, jak zachowywała się pierwsza cząstka. Przy przepływie laminarnym objętość cieczy płynąca przez rurkę pokrywa się ze strugą prądu. Ruch laminarny występuje w rurach o stałym przekroju, o gładkich ścianach i bez rozgałęzień. Ruch taki obserwujemy także w łagodnie płynącym strumyku. Jeśli w rurce z cieczą płynącą w sposób laminarny, wypuścimy stróżkę atramentu (i

zaznaczymy w ten sposób strugę prądu) to jej ślad będzie wyglądał jak na poniższym rysunku.



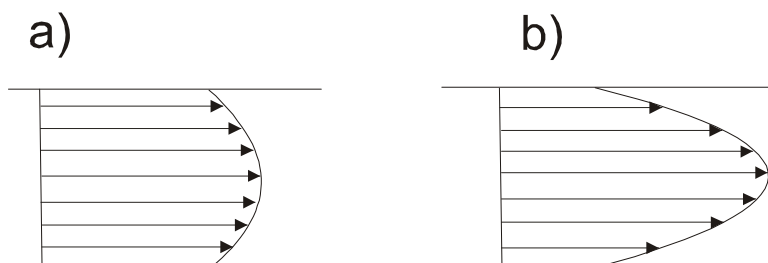
Rys.14. Ruch strugi prądu w przepływie laminarnym

Wraz ze wzrostem prędkości cieczy przepływ traci charakter laminarny i staje się przepływem turbulentnym. W przepływie tym (zwanym też wirowym lub burzliwym) tory cząstek stają się chaotyczne, nie mamy ustalonych linii ani strug prądu. Przy przepływie turbulentnym występuje mieszanie się poszczególnych warstw, a zatem cząsteczki cieczy uzyskują dodatkową prędkość, prostopadłą do kierunku przepływu (Rys.15). Prędkość cząstek w danym punkcie przestrzeni nie jest stała. Przy przepływie cieczy w rurze przejście od przepływu laminarnego do turbulentnego zależy od średnicy rury i rodzaju cieczy. Prędkość, powyżej której przepływ traci charakter laminarny, zwana jest prędkością krytyczną; jej wartość określa liczba Reynoldsa (będzie o niej mowa nieco później; por. Równ. 41). Przepływ turbulentny możemy zaobserwować np. w wodospadzie; prędkości cząstek zmieniają się od punktu do punktu, a także w miarę upływu czasu. Przy przepływie turbulentnym cieczy w rurze bardzo silnie wzrasta opór stawiany ruchowi cieczy przez ścianki rury; należy więc unikać takiego przepływu w rurociągach, gdyż wymaga on większej pracy tłoczenia cieczy.



Rys.15. Ruch strugi prądu w przepływie turbulentnym (pokazano ślad cienkiej strugi wpuszczonego do cieczy atramentu).

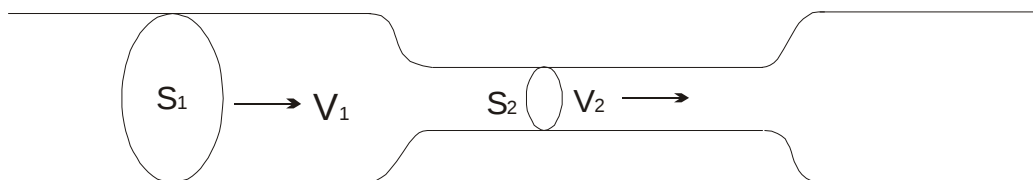
Rozkłady prędkości cząstek cieczy wzdłuż rury, w której ona płynie, dla przepływu laminarnego i turbulentnego pokazano na poniższym rysunku. Widać, że w przepływie turbulentnym rozkład prędkości jest bardzo niejednorodny; ciecz w pobliżu ścian rury przemieszcza się powoli w porównaniu z cieczą w środku.



Rys.16. Rozkłady prędkości cieczy przy przepływie w rurze: a) przepływ laminarny, b) przepływ turbulentny.

Równanie ciągłości

Rozważmy przepływ cieczy przez rurociąg o zmiennej średnicy, albo równoważnie, przepływ strugi cieczy o zmiennym przekroju.



Rys.17. W miejscach o różnych przekrojach strugi ciecz ma różną prędkość

Rozważmy dwa przekroje (rury lub strugi): S_1 i S_2 . Są one prostopadłe do linii prądu. W przedziale czasu Δt przez dowolny przekrój S przepływa objętość cieczy $Sv\Delta t$ (jeśli prędkość cieczy w tym przekroju wynosi v). Masa przepływającej cieczy w tym samym czasie wynosi: $\rho Av\Delta t$. Tak więc, masy cieczy przepływające w przedziale czasu Δt przez przekroje S_1 i S_2 wynoszą:

$$\Delta m_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t \quad (19)$$

$$\Delta m_2 = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t \quad (20)$$

Masa płynu przechodząca w tym samym czasie przez każdy z przekrojów przekrój musi być taka sama, ponieważ żadna część płynu nie może opuścić strugi (przez jej „ścianki” boczne), oraz w strudze nie ma żadnych „źródeł”, w których płyn mógłby być wprowadzany. Tak więc z zasady zachowania masy otrzymujemy:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \quad (21)$$

Podstawiając, otrzymujemy:

$$\rho_1 S_1 v_1 \Delta t = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t \quad (22)$$

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 \quad (23)$$

Czyli ogólnie:

$\rho S v = const$	(24)
--------------------	------

Jeżeli płyn jest nieściśliwy ($\rho = const$), równanie powyższe możemy przepisać jako:

$Sv = const$	(25)
--------------	------

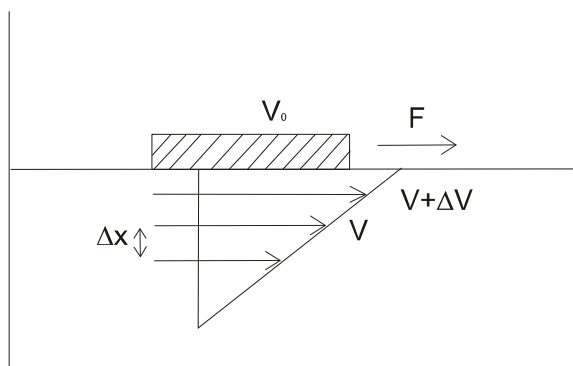
Jest to równanie ciągłości dla płynu nieściśliwego. Iloczyn Sv zwany jest strumieniem objętościowym lub też natężeniem objętościowym. Z faktu, iż iloczyn ten pozostaje stały wnioskujemy, że prędkość płynu dla nieściśliwego przepływu ustalonego zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do pola przekroju (prędkość jest większa w węższych częściach strugi, a mniejsza w szerszych).

Ogólniejszą postać równania ciągłości, gdy gęstość jest zmienna oraz gdy mogą występować źródła i odpływy cieczy ze strugi wyprowadzono w Dodatku na końcu tego rozdziału (materiał nadobowiązkowy – dla chętnych).

Lepkość

Ciecze rzeczywiste różnią się od cieczy doskonałych tym, że wykazują zjawisko tarcia wewnętrznego, czyli lepkości (wspomnieć tu należy, iż wyjątkiem są bardzo nieliczne ciecze – np. ciekły hel - wykazujące tzw. nadciekłość; zjawisko to występuje w temperaturach bliskich zera bezwzględnego i polega na całkowitym zaniku lepkości). Tarcie wewnętrzne jest zjawiskiem międzycząsteczkowym i polega na oddziaływaniu sąsiednich warstw cieczy na siebie w czasie przepływu. Siły te sprawiają, że od strony warstwy poruszającej się szybciej działa na warstwę poruszającą się wolniej siła przyspieszająca. Odwrotnie – warstwy poruszające się wolniej hamują ruch warstw poruszających się szybciej. W czasie ruchu

cieczy w rurce, z największą prędkością porusza się warstwa ciecży wzdłuż jej osi, a w miarę zbliżania się do ścianek prędkość maleje – patrz Rys.16.



Rys.17. Ilustracja do definicji współczynnika lepkości.

Lepkość charakteryzujemy współczynnikiem lepkości, η . Definiujemy go następująco (Rys. 17). Stycznie do powierzchni ciecży, pod wpływem siły F , porusza się płyta (o powierzchni S) z prędkością v_0 . W efekcie tego kolejne warstwy ciecży także uzyskują prędkości; jednak wskutek działania sił lepkości prędkości te maleją wraz z odległością w głąb ciecży. Na grubości warstwy ciecży Δx następuje spadek prędkości o Δv . Powyższe wielkości łączy równanie:

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta x} \quad (26)$$

gdzie η jest właśnie współczynnikiem lepkości ciecży. Jego jednostką jest *paskalosekunda*:

$$[\eta] = Pa \cdot s = \frac{N}{m^2} s \quad (27)$$

Inną, często używaną, jednostką jest puaz: $1 P = 0.1 Pa \cdot s$.

Stwierdzono, że współczynnik lepkości zależy silnie od temperatury. Zależność tą dla ciecży można przybliżyć następującym równaniem fenomenologicznym:

$$\eta = A e^{\frac{B}{T}} \quad (28)$$

gdzie A i B są stałymi charakteryzującymi daną ciecz, zaś T jest temperaturą bezwzględną. Współczynnik lepkości mierzymy najczęściej przez porównanie czasu przepływu badanej ciecży i ciecży wzorcowej przez rurki włosowate. Współczynnik lepkości ciecży zmienia się w bardzo szerokim zakresie; np. dla wody w temperaturze $0^\circ C$ $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$, a dla oleju rycynowego w temp. $18^\circ C$ $\eta = 2,3 Pa \cdot s$. Wpływ temperatury na lepkość ciecży i gazów jest

odmienny: ze wzrostem temperatury lepkość cieczy szybko maleje, podczas gdy dla gazów rośnie. Lepkość gazów jest około cztery rzędy wielkości mniejsza od lepkości cieczy w tej samej temperaturze.

Równanie Bernoulliego

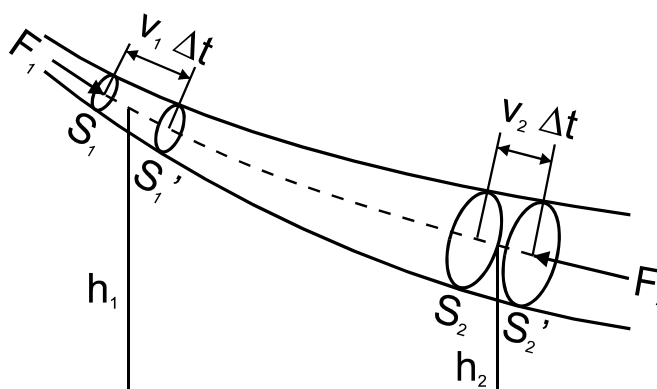
Rozważmy nielepki, ustalony, nieściśliwy przepływ płynu przez rurę (Rys. 18). Ciecz na rysunku płynie w stronę prawą. W czasie Δt powierzchnia S_1 przemieszcza się o odcinek $v_1 \Delta t$ do położenia S_1' . Analogicznie powierzchnia S_2 przemieszcza się o odcinek $v_2 \Delta t$ do położenia S_2' . Na powierzchnię S_1 działa siła $F_1 = p_1 S_1$ a na powierzchnię S_2 siła $F_2 = p_2 S_2$. Zwróćmy uwagę, że efekt sumaryczny przepływu płynu przez rurę polega na przeniesieniu pewnej objętości ΔV płynu ograniczonej powierzchniami $S_1 S_1'$ do położenia $S_2 S_2'$. Siłami, które wykonują pracę są F_1 i F_2 i pochodzą one od ciśnienia w cieczy. Obliczmy tą pracę:

$$W = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = (p_1 - p_2) \Delta V \quad (29)$$

Zasada zachowania energii mówi, że wykonana praca jest równa zmianie energii układu. W rozważanym przez nas przypadku na zmianę energii strugi składają się zmiany energii kinetycznej i potencjalnej:

$$\Delta E = \left(\frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m g h_2 \right) - \left(\frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m g h_1 \right) \quad (30)$$

gdzie Δm jest masą płynu zawartą w objętości ΔV (ograniczonej powierzchniami $S_1 S_1'$ lub $S_2 S_2'$).



Rys.18. Ilustracja do wyprowadzenia równania Bernouilliego

A zatem stosując zasadę zachowania energii ($W = \Delta E$), otrzymujemy:

(31)

Ponieważ $\Delta m = \rho \Delta V$ (pamiętajmy o naszym założeniu nieściśliwości cieczy, czyli $\rho = \text{const}$), więc:

$$(p_1 - p_2) \Delta V = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right) \quad (32)$$

oraz po uproszczeniu:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \quad (33)$$

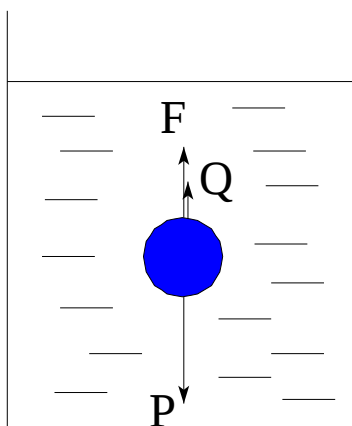
Wynik ten napiszmy w ogólnej postaci:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{const.} \quad (34)$$

Wyprowadziliśmy w ten sposób *równanie Bernoulliego*. Opisuje ono przepływ ustalony, nielepki i nieściśliwy. Jest to podstawowe równanie mechaniki płynów. Może być stosowane do wyznaczenia prędkości płynu na podstawie pomiarów ciśnienia (rurka Venturiego, rurka Pitota). W oparciu o nie wyznacza się także dynamiczną siłę nośną działającą na skrzydło samolotu czy na żagiel jachtu.

Opór tarcia i opór ciśnienia

Przedmioty poruszające się w płynie napotykać dwa typy oporu ruchu: opór tarcia i ciśnienia.



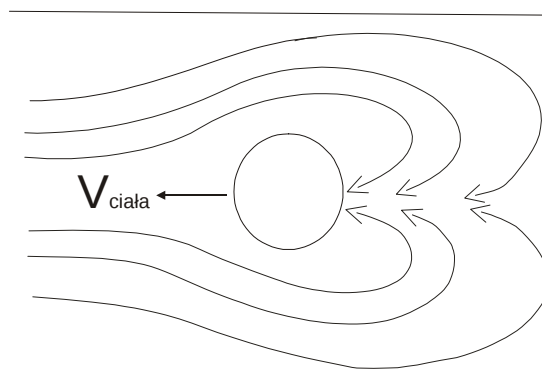
Rys.19. Na kulkę spadającą w cieczy działają siły: ciężkości (P), wyporu (Q) oraz oporu tarcia (F).

Siłę oporu (tarcia) F kuli o promieniu r poruszającej się z prędkością v w cieczy o współczynniku lepkości η (Rys.19) opisuje prawo Stokesa:

$$F = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (35)$$

Wzór ten jest słuszny dla niezbyt dużych prędkości, przy których nie powstają jeszcze wiry, czyli dla ruchu laminarnego. Widzimy, że siła oporu tarcia jest proporcjonalna do współczynnika lepkości, do prędkości oraz do rozmiaru ciała (tutaj promienia). Na ogół po wrzuceniu kulki do cieczy następuje szybkie zrównanie się sumy siły oporu i wyporu z siłą ciężkości i ciało porusza się od tego momentu ruchem jednostajnym.

Wraz ze wzrostem prędkości ciała ruch cząsteczek cieczy, opływających ciało, zmienia się z laminarnego na burzliwy. Za ciałem powstają wiry (Rys.20), które w dalszej odległości od ciała stopniowo znikają.

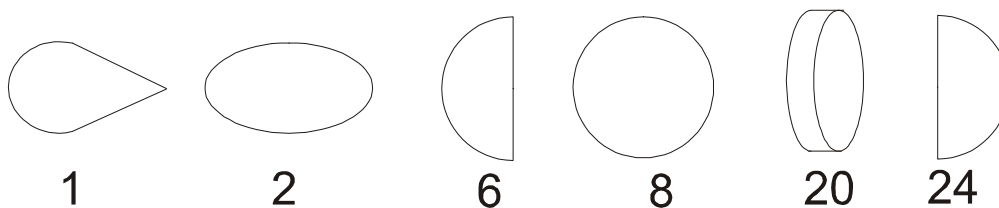


Rys. 20. Powstawanie wirów za ciałem przy jego szybkim ruchu.

Prędkość cieczy w wirze jest większa niż prędkość cieczy przed przeszkodą, w związku, z czym za ciałem panuje mniejsze ciśnienie (prawo Bernouliego). Tworzenie się tych wirów powoduje powstanie siły oporu ciśnienia, która znacznie przewyższa opór pochodzący od tarcia cieczy. Opór ciśnienia działający na ciało o przekroju S , poruszające się w cieczy z prędkością V jest równy:

$$K = C_r \frac{\rho v^2}{2} S = C \rho v^2 S \quad (36)$$

Wielkość C_r nazywamy liczbą oporu ciała (stała $C=C_r/2$). Na poniższym rysunku pokazano schematycznie jak liczba oporu ciała zależy od kształtu ciała.



Rys. 21. Zależność liczby oporu od kształtu ciała.

Ruch laminarny czy turbulentny ? Liczba Reynoldsa

W wielu zagadnieniach chcemy wiedzieć, czy przepływ płynu wokół ciała będzie laminarny czy turbulentny. Pytanie to można rozstrzygnąć używając liczby Reynoldsa (Re). Liczba ta jest wielkością bezwymiarową, charakteryzującą dynamiczne własności płynu.

Dla kuli o średnicy d poruszającej się z prędkością v opór tarcia wynosi (porównaj Równ. 35):

$$F = C_1 \eta v d \quad (37)$$

Dla tej samej kuli opór ciśnienia wynosi (porównaj Równ. 36):

$$K = C_2 \rho v^2 d^2 \quad (38)$$

W roku 1883 Osborne Reynolds zauważył, że wokół ciał o takim samym kształcie, a różnych wielkościach (np. wokół dwóch kul o różnych średnicach) otrzymamy taki sam przepływ cieczy, jeżeli stosunek oporu ciśnienia do oporu tarcia będzie stały; jt. prawo podobieństwa hydrodynamicznego. Stosunek tych oporów wynosi:

$$\frac{K}{F} = \frac{C_2 \rho v^2 d^2}{C_1 \eta v d} \quad (39)$$

gdzie C_1 oraz C_2 są stałymi. Po skróceniu otrzymujemy zależność:

$$\frac{\rho v d}{\eta} = \text{const} \quad (40)$$

Stała powyższa nazywa się liczbą Reynoldsa (w skrócie: Re):

$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\eta} \quad (41)$
--

Z powyższego związku widać, że liczba Reynoldsa zachowuje stałą wartość, jeśli przy zmniejszeniu się rozmiarów ciała odpowiednio wzrasta prędkość. Zapamiętajmy, że:

Ciała o podobnym kształcie posiadają jednakowy stosunek oporów ciśnienia i tarcia, jeśli mają tę samą wartość liczby Reynoldsa.

Zasada ta jest przydatna np. przy badaniu własności nowych konstrukcji samolotów na ich modelach (przykładowo, chcąc zachować taki sam opływ powietrza wokół 5-krotnie mniejszego modelu samolotu w tunelu aero-dynamicznym jak wokół prawdziwego samolotu, prędkość powietrza w tunelu powinna być 5-krotnie większa niż podczas lotu).

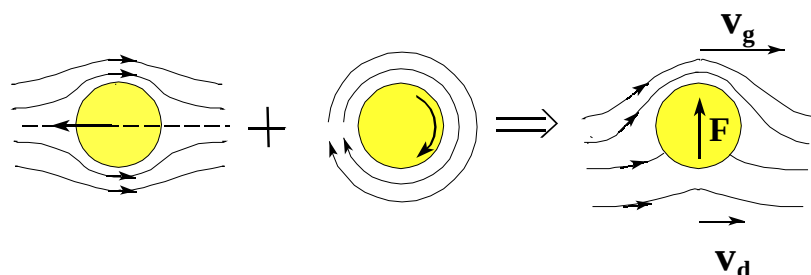
Liczba Reynoldsa decyduje o tym, czy mamy do czynienia z przepływem laminarnym czy turbulentnym. Stwierdzono doświadczalnie, że $Re=1160$ jest wartością graniczną. Tak więc dla:

$Re < 1160$ - ruch laminarny
 $Re \geq 1160$ - ruch turbulentny

Efekt Magnusa.

Zjawisko Magnusa polega na powstaniu siły prostopadłej do prędkości ruchu postępowego, działającej na poruszającą w gazie lub w cieczy kulę (lub walec), jeśli równocześnie kula (lub walec) wykonuje ruch obrotowy. Zjawisko to nosi nazwę od nazwiska niemieckiego fizyka i chemika H.G. Magnusa. Efekt ten powoduje np. "zakrzywienie" toru wybitej piłeczki tenisowej lub golfowej. Na Rys.22 podano schematyczne wyjaśnienie tego zjawiska. Piłka porusza się w lewo i równocześnie obraca się. Każdy z tych dwóch ruchów wytwarza odpowiedni opływ ośrodka wokół piłki (ruch obrotowy wprawa otaczające warstewki ośrodka w ruch obrotowy dzięki lepkości). Superpozycja tych dwóch ruchów prowadzi do sytuacji, że ośrodek nad piłką ma większą prędkość (v_g) niż pod piłką (v_d). To z kolei, zgodnie z prawem Bernouilliego, prowadzi do powstania niższego ciśnienia nad piłką niż pod nią. W efekcie powstaje siła **F** popychająca piłkę w obszar niższego ciśnienia (czyli do góry na Rys.22).

Tak więc, jeśli oglądacie podczas meczu piłkarskiego, jak mocno podkrecona piłka wpada w końcu do bramki (choć na początku jej lotu wydawało się to niemożliwe), to właśnie widzicie praktyczną demonstrację efektu Magnusa.



Rys.22. Powstawanie siły Magnusa (F). Piłka porusza się w lewo i jednocześnie obraca; wytwarza to w efekcie większą prędkość strugi powietrza nad piłką niż pod nią, a zatem różnicę ciśnień i wypadkową siłę F .

Efekt Magnusa próbowano także wykorzystać do napędu statków (zamiast żagli). Elementem napędowym jest pionowo umieszczony, obracający się walec; jeśli ponadto wieje wiatr, to uzyskujemy podobną sytuację jak ta naszkicowana na powyższym rysunku i generuje się siła Magnusa..

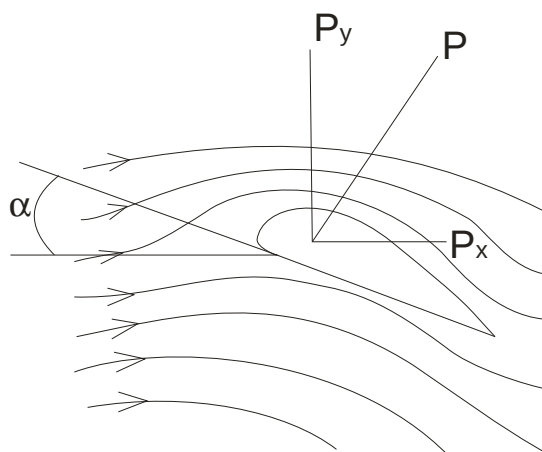
Parcie aerodynamiczne (siła aerodynamiczna)

Ciała mogą się unosić albo dzięki parciu aerostatycznemu (jak np. balony), albo też dzięki parciu aerodynamicznemu (np. siła działająca na skrzydło w samolocie).

Siłę aerodynamiczną powstającą w czasie ruchu skrzydła samolotu w powietrzu (Rys.23) można rozłożyć na dwie składowe: styczną do kierunku ruchu (opór czołowy) i normalną (siła parcia lub siła wznoszenia). Poprzeczny przekrój skrzydła samolotu ma charakterystyczny kształt, tak zwany profil Żukowskiego. Podczas lotu samolotu skrzydło musi tworzyć kąt α z kierunkiem strumienia powietrza (jt. kąt natarcia). Zakrzywiony profil skrzydła powoduje, że struga powietrza ma nad nim większą prędkość niż pod nim. Wynika to z tego jest, że droga, którą musi przebyć struga powietrza nad skrzydłem jest nieco dłuższa niż droga strugi pod skrzydłem. Strugi te spotykają się za skrzydłem po tym samym czasie (w przeciwnym przypadku nie byłaby zachowana ciągłość przepływu). Powstanie różnych prędkości strugi powietrza nad i pod skrzydłem prowadzi do różnicy ciśnień (równanie Bernoulliego) i w konsekwencji do siły nośnej P_y .

$$P_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S \quad (42)$$

gdzie: v –prędkość samolotu względem powietrza, S - powierzchnia skrzydła, C_y – współczynnik siły nośnej zależny od kształtu skrzydła i jego ustawienia względem strumienia powietrza.

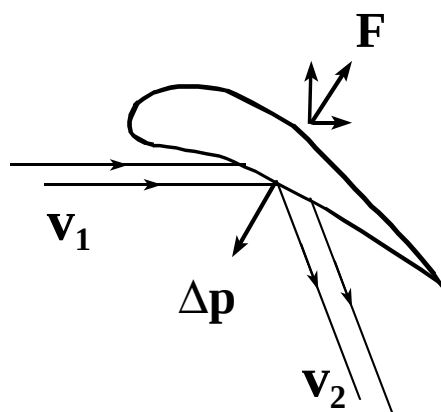


Rys.23. Powstawanie siły aerodynamicznej, działającej na skrzydło samolotu

Na skrzydło działa także siła oporu czołowego P_x (siła oporu ciśnienia).

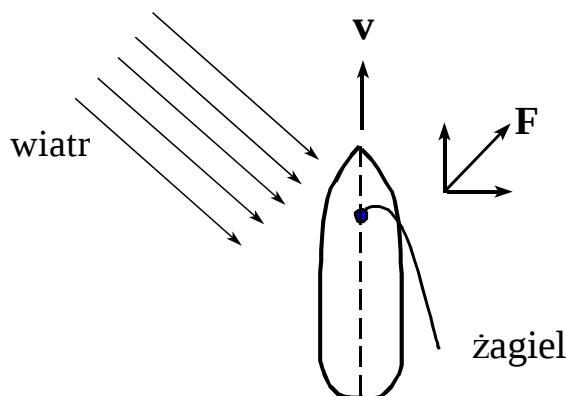
Dla ścisłości trzeba tu dodać, że oprócz siły aerodynamicznej $\mathbf{P}$ (którą tłumaczy równanie Bernouilliego), na skrzydło działa także siła nośna $\mathbf{F}$ wytworzona po prostu przez odbicie strugi powietrza od dolnej części skrzydła - Rys.24. Powstanie tej siły tłumaczy prawo zachowania pędu, albo równoważnie III zasada dynamiki. Ma ona na ogół większą wartość niż siła aerodynamiczna $\mathbf{P}$.

W przypadku obu tych sił ($\mathbf{P}$ i $\mathbf{F}$) użyteczne są jedynie ich składowe pionowe; natomiast składowe poziome, skierowane przeciwnie do prędkości skrzydła, równoważone są siłą ciągu silnika samolotu.



Rys.24. Część siły nośnej skrzydła wytworzona jest przez zderzenia z cząstkami powietrza (zmiana pędu strugi powietrza po zderzeniu ze skrzydłem, Δp , zgodnie z zasadą akcji i reakcji wytwarza siłę F działającą na skrzydło).

Na podobnej zasadzie jak skrzydło samolotu działa żagiel. Na Rys. 25 pokazano jak powstaje siła napędzająca żaglówkę podczas kursu „pod wiatr”. Wiatr opływa wygięty (wybrany) żagiel podobnie jak skrzydło samolotu. Wskutek wygiętego kształtu żagla powstaje różnica prędkości strugi powietrza przed i za żaglem, co zgodnie z równaniem Bernouilliego generuje różnicę ciśnień i w efekcie siłę napędową F . Jej składowa równoległa do osi łódki powoduje jej ruch postępowy, zaś składowa prostopadła równoważona jest oporem bocznym, jaki stawia miecz i ster łodzi. Wykonując takie oraz symetryczne do narysowanego kursy względem wiatru (zwane w języku żeglarskim halsami) żaglówka może się efektywnie przemieszczać w kierunku przeciwnym do wiejącego wiatru. Oczywiście kurs „z wiatrem” jest już łatwy do zrealizowania i wytłumaczenia (tutaj siła pochodzi od naporu wiatru na żagiel, który musi być ustawiony prostopadłe do wiatru; wytłumaczeniem siły w tym wypadku jest zasada zachowania pędu).



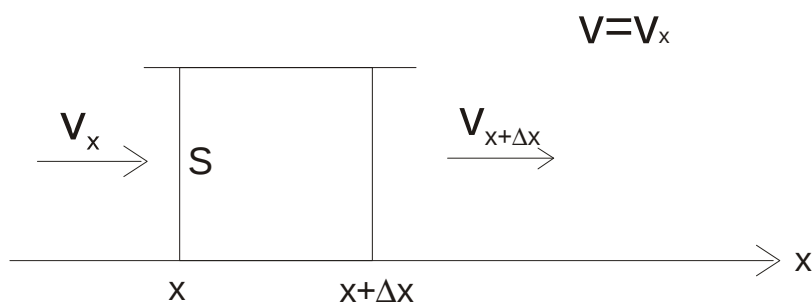
Rys.25. Powstawanie siły napędowej działającej na żagiel podczas kursu „pod wiatr”

Zauważmy, jak ważne przemiany cywilizacyjne wprowadziło odkrycie żagla (wielkie podróże morskie, odkrycia geograficzne) oraz skrzydła samolotu (rewolucja w transporcie światowym).

DODATEK (dla chętnych) - OGÓLNE RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI

Przez płyny rozumiemy zarówno ciecze jak i gazy. W przypadku cieczy założyliśmy, iż są one nieściśliwe, a zatem, że posiadają stałą gęstość. Natomiast, w przypadku gazów, nie możemy już założyć, że są one nieściśliwe. Gęstość poruszającego się gazu jest w ogólnym przypadku funkcją położenia i czasu. W pewnych miejscach przestrzeni mogą występować zgęszczenia, a w innych rozrzedzenia płynącego gazu. Ruch gaz (a także ściśliwej cieczy) opisuje ogólne równanie ciągłości. Poniżej je wyprowadzimy.

Rozważmy przepływ płynu wzdłuż osi x (a zatem przyjmujemy, że $v=v_x$), który przechodzi przez powierzchnię S (prostopadłą do osi x). Ciecz ma prędkość v_x i gęstość ρ_x w punkcie x , oraz odpowiednio $v_{x+\Delta x}$ i $\rho_{x+\Delta x}$ w punkcie $x+\Delta x$.



Masa cieczy dm , przepływająca przez przekrój S w czasie dt wynosi:

$$dm = v dt S \rho \quad (d1)$$

Przyrost w przedziale czasu dt , masy cieczy w elemencie objętości $S \Delta x$ wynosi:

$$dm = (v)_x dt \cdot S \rho_x - (v)_{x+\Delta x} dt \cdot S \rho_{x+\Delta x} \quad (d2)$$

Prędkość przyrostu masy w tym elemencie objętości wynosi:

$$\frac{dm}{dt} = S[(v\rho)_x - (v\rho)_{x+\Delta x}] \quad (d3)$$

Korzystając z ogólnej postaci rozwinięcia funkcji:

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \frac{dF(x)}{dx} \Delta x \quad (d4)$$

Rown. d3 możemy przepisać:

$$\frac{dm}{dt} = S(v\rho)_x - S(v\rho)_{x+\Delta x} - S \frac{d(v\rho)}{dx} \Delta x \quad (d5)$$

czyli:

$$\frac{dm}{dt} = -S \frac{d(v\rho)}{dx} \Delta x \quad (d5)$$

Z drugiej strony zauważmy, że masa płynu zawarta w elemencie objętości $S\Delta x$ wynosi:

$$m = A\Delta x\rho \quad (d6)$$

Różniczkując po czasie, otrzymujemy:

$$\frac{dm}{dt} = S \frac{d\rho}{dt} \Delta x \quad (d7)$$

Porównując Równania d5 i d7:

$$S \frac{d\rho}{dt} \Delta x = -S \frac{d(v\rho)}{dx} \Delta x \quad (d8)$$

Po uproszczeniu powyższego równania otrzymujemy:

$$\frac{d\rho}{dt} = - \frac{d(v\rho)}{dx} \quad (d9)$$

Równanie powyższe opisuje ruch płynu tylko wzdłuż osi x (założyliśmy, że $v=v_x$). Jeśli prędkość płynu jest skierowana w dowolnym kierunku, to przez uogólnienie otrzymamy:

$$\frac{d\rho}{dt} = - \frac{\partial(v_x\rho)}{\partial x} - \frac{\partial(v_y\rho)}{\partial y} - \frac{\partial(v_z\rho)}{\partial z} \quad (d10)$$

W celu uproszczenia zapisu, użyjemy operatora matematycznego, zwanego *dywergencją*; działa on na dowolny wektor $\mathbf{A}$ w sposób następujący:

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (d11)$$

Równ. d10 możemy zatem prościej zapisać jako:

$\frac{d\rho}{dt} = -\text{div}(\rho\mathbf{v}) \quad (d12)$
--

To równanie ciągłości opisuje ruch cieczy, jeśli nie dopływają ani nie odpływają do niej dodatkowe strugi. Jeżeli tak nie jest, musimy uwzględnić źródła lub upływy (ścieki) cieczy:

$\frac{d\rho}{dt} = -\text{div}(\rho\mathbf{v}) + Q \quad (d13)$
--

gdzie Q jest wydajnością źródeł lub ścieków; wydajność ta definiuje ile masy płynu wpływa lub odpływa ze strugi w jednostce czasu i na jednostkę objętości:

$$Q = \frac{\Delta m}{\Delta t \Delta V} = \frac{d\rho}{dt} \quad (d14)$$

Wydajność Q ma znak (+) dla źródła oraz znak (-) dla upływu.