

MECHANIKA KLASYCZNA

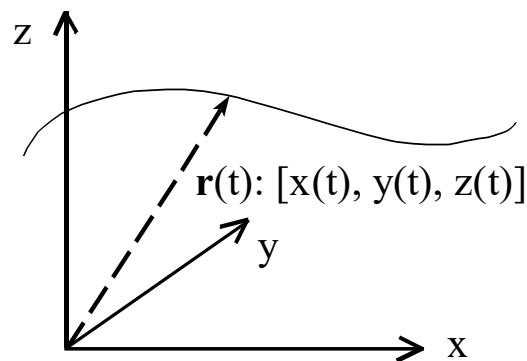
Tradycyjnie mechanikę klasyczną dzieli się na:

- Kinematykę i
- Dynamikę

1. KINEMATYKA

Kinematyka zajmuje się opisem ruchu ciał bez wnikania w przyczyny ruchu.

TOR RUCHU



Tor ruchu ciała

Równania ruchu stanowią zarazem parametryczne równanie toru:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad \text{lub } \mathbf{r}(t) : [x(t), y(t), z(t)] \quad (1)$$

PRĘDKOŚĆ

Jak w przypadku każdego wektora, prędkość definiują jej trzy składowe:

$\mathbf{v} : [v_x, v_y, v_z]$. Każda z tych składowych zaś zdefiniowana jest następująco:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

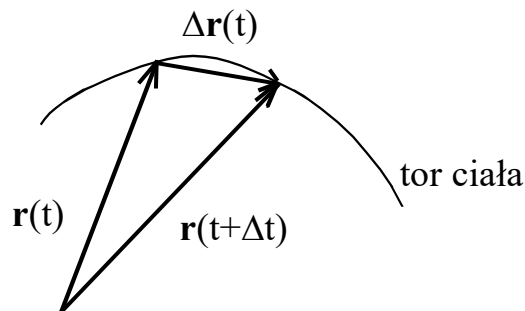
$$v_z = \frac{dz(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

Inaczej, ten sam wynik można zapisać w bardziej zwartej formie:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Powtórzmy zatem:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (2)$$



Zauważmy, że w naszkicowanym powyżej przykładzie *prędkość staje się w granicznym przypadku ($\Delta t \rightarrow 0$) równoległa do przyrostu wektora $\mathbf{r}$ (czyli: $\mathbf{v} \parallel \Delta \mathbf{r}$).*

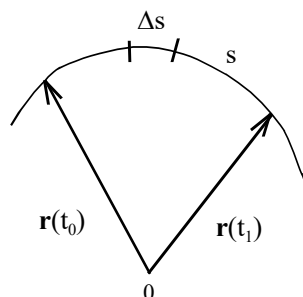
PRZYSPIESZENIE

Przyspieszenie definiujemy jako:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (3)$$

Oczywiście: $\mathbf{a} \parallel \Delta \mathbf{v}$ (gdy $\Delta t \rightarrow 0$)

DROGA – długość łuku zakreślonego w czasie między t_0 i t_1 przez poruszający się punkt



Oznaczmy elementarne kawałki łuku $\Delta r = \Delta s$. Zauważmy, że długość łuku s jest skalarem. Wartość prędkości możemy wyrazić jako:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A zatem: $\Delta s = v \Delta t$. Cały łuk możemy przedstawić jako sumę bardzo małych jego kawałków:

$$s = \sum_i \Delta s_i = \sum_i v_i \Delta t_i$$

Przechodząc z Δt w granicy do zera, sumę zastępujemy całką:

$s = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$	(4)
--------------------------------	-----

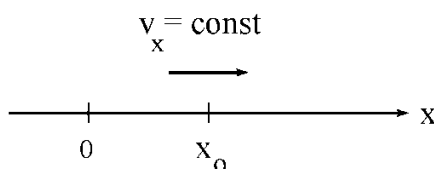
Droga jest więc całką po czasie z prędkości.

Przykłady ruchów

a) *Ruch jednostajny prostoliniowy wzdłuż osi x*

Założmy, że ciało porusza się wzdłuż osi x ze stałą prędkością v_x . A zatem: $\mathbf{v} : [v_x, 0, 0]$.

Ponadto w chwili $t=0$ znajdowało się w punkcie $x=x_0$.



Jest to przypadek ruchu jednowymiarowego (wzdłuż osi x). Równanie (toru) podające położenie ciała ma w tym przypadku szczególnie prostą postać:

$$x = x_0 + v_x t \quad (5)$$

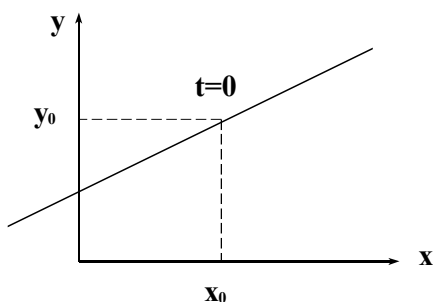
b) *Ruch jednostajny prostoliniowy wzdłuż prostej leżącej na płaszczyźnie xy*

Teraz prędkość ciała ma postać: $\mathbf{v}: [v_x, v_y, 0]$. Równanie toru ciała jest prostym uogólnieniem poprzedniego równania:

$$x = x_0 + v_x t \quad (6)$$

$$y = y_0 + v_y t$$

W równaniu tym założyliśmy, że w chwili $t=0$ ciało miało współrzędne (x_0, y_0) .



Torem ruchu jest linia prosta

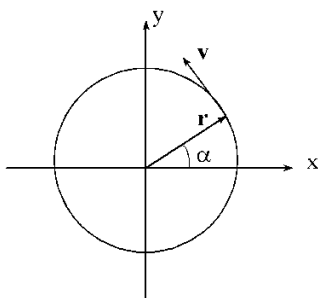
c) *Ruch jednostajny po okręgu*

Rozważmy przypadek ciała krążącego po okręgu; może to być dziecko jadące na karuzeli ze stałą prędkością kątową; oznacza to, że kąt α rośnie jednostajnie z czasem:

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \quad (7)$$

gdzie α_0 jest kątem zakreślonym w chwili $t=0$). Ogólnie, prędkość kątowa może być wyrażona

jako: $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$.



Wektor prędkości jest zawsze styczny do toru

Jeśli promień okręgu wynosi r , równanie toru będzie miało postać:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \alpha(t) \\ y &= r \sin \alpha(t)\end{aligned}\tag{8}$$

lub wstawiając zależność (7) na $\alpha(t)$:

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\omega t + \alpha_0) \\ y &= r \sin(\omega t + \alpha_0)\end{aligned}\tag{9}$$

Zauważmy, że podnosząc wyrażenia na x i y do kwadratu i dodając stronami, otrzymujemy równanie okręgu, który jest torem ciała: $x^2 + y^2 = r^2$.

Ponadto, przypomnijmy związek pomiędzy kątem α a długością łuku s na nim rozpiętego:

$$s = \alpha r\tag{10}$$

A zatem prędkość ciała w ruchu po okręgu (prędkość styczna):

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\alpha}{dt} = r\omega. \text{ Zapamiętajmy ten wynik:}$$

$$v = r\omega\tag{11}$$

Równanie to podaje związek między prędkością liniową (styczną) i kątową.

Zastanówmy się, czy w ruchu po okręgu występuje przyspieszenie. W tym celu zróżniczkujemy obie strony Równ. 9

Wyliczmy teraz składowe prędkości, poprzez zróżniczkowanie po czasie Równ. 9::

$$\begin{aligned}v_x &= -r\omega \sin(\omega t + \alpha_0) \\ v_y &= r\omega \cos(\omega t + \alpha_0)\end{aligned}\tag{12}$$

Zauważmy, że (porównaj Równ. 9 i 12):

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = v_x r_x + v_y r_y = 0$, co oznacza, że wektor prędkości $\mathbf{v}$ jest prostopadły do wektora wodzącego $\mathbf{r}$. Jest to oczywiste, gdyż $\mathbf{v}$ jest styczne do łuku okręgu, po którym się ciało porusza, zaś $\mathbf{r}$ jest do niego prostopadły.

Różniczkując z kolei Równ. 12, otrzymamy składowe przyspieszenia:

$$\begin{aligned}a_x &= -r\omega^2 \cos(\omega t + \alpha_0) \\ a_y &= -r\omega^2 \sin(\omega t + \alpha_0)\end{aligned}\tag{13}$$

Porównując Równ. 13 z Równ. 9, dochodzimy do wniosku, że:

$$a_x = -\omega^2 x \quad (14)$$

$$a_y = -\omega^2 y$$

lub prościej:

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (15)$$

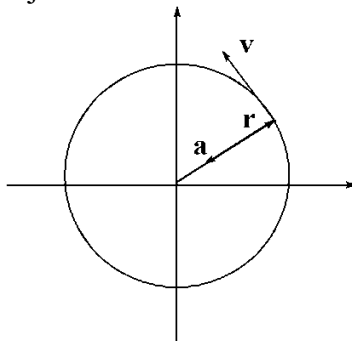
Relacja między długościami wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{r}$ jest jeszcze prostsza:

$$a = \omega^2 r \quad (16)$$

lub biorąc pod uwagę zależność między v i ω (Równ. 11):

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (17)$$

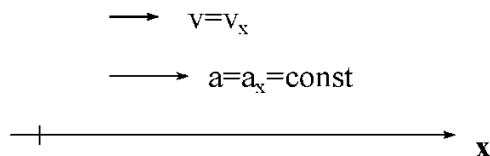
Z równania 15 wynika, że przyspieszenie ma kierunek promienia okręgu, lecz przeciwny zwrot; jest ono skierowane do środka okręgu. Dlatego nazywa się ono **przyspieszeniem dośrodkowym**. W każdej chwili jest ono prostopadłe do wektora prędkości ciała. Efektem działania przyspieszenia dośrodkowego jest ciągła zmiana kierunku wektora prędkości; natomiast wartość prędkości pozostaje stała.



Przyspieszenie dośrodkowe skierowane jest wzdłuż promienia do środka okręgu

d) Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny

Wróćmy znów do przykładu ruchu ciała wzdłuż osi x . W tym przypadku ciało porusza się ze stałym przyspieszeniem a_x w dodatnim kierunku osi x . W chwili początkowej ($t=0$) ciało miało prędkość $v=v_0$.



Ruch jednostajnie przyspieszony wzdłuż osi x . W chwili $t=0$ ciało znajdowało się w położeniu $x=x_0$ oraz miało prędkość $v=v_0$

Z definicji przyspieszenia: $a = \frac{dv}{dt}$ wynika, że $dv=adt$. Interesuje nas zmiana prędkości od wartości v_0 do v , czyli $\Delta v = v - v_0$. Poszukiwana zmiana Δv wynosi: $\Delta v = \int_0^{t'} dv = \int_0^{t'} a dt = at'$.

A zatem ogólnie: $v = v_0 + \Delta v = v_0 + at$. Zapamiętajmy:

$$v = v_0 + at \quad (18)$$

Teraz wyliczmy, jaką drogę przebędzie ciało. Zakładając, że do chwili $t=0$ ciało przebyło już drogę x_0 , droga przebyta do chwili t wynosi: $x=x_0+\Delta x$. Zaś Δx :

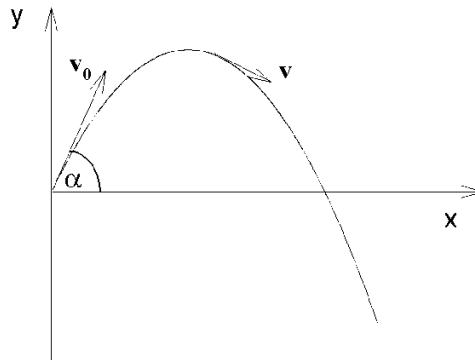
$$\begin{aligned} \Delta x &= \int_0^{t'} v(t) dt = \int_0^{t'} (v_0 + at) dt = \\ &= \int_0^{t'} v_0 dt + \int_0^{t'} at dt = [v_0 t]_0^{t'} + \left[a \frac{t^2}{2} \right]_0^{t'} = v_0 t' + a \frac{t'^2}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

Ostatecznie zatem przebyta droga $x=x_0+\Delta x$ wynosi:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (20)$$

Jeśli ruch jest jednostajnie opóźniony, to w Równ. 18 i 20 przyspieszenie a należy zastąpić przez opóźnienie (przyspieszenie ujemne): $-a$.

e) Rzut ukośny



Ciało jest wyrzucone w punkcie początkowym układu współrzędnych z prędkością początkową v_0 pod kątem α względem osi x . Łatwo jest napisać wyrażenia na składowe prędkości ciała. Zauważmy, że prędkość początkowa v_0 ma następujące składowe względem osi x i y : $v_0 \cos \alpha$, $v_0 \sin \alpha$. W kierunku osi x prędkość pozostanie stała, gdyż nie ma żadnej siły mającej składową w kierunku tej osi. Natomiast w kierunku ujemnego zwrotu osi y działa przyspieszenie grawitacyjne g . A zatem wyrażenia na składowe prędkości ciała będą następujące:

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad (21)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

Po scałkowaniu obu stron tego równania (po czasie od 0 do t) dostajemy wyrażenia na współrzędne x i y :

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \quad (22)$$

$$y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}$$

Dwie powyższe zależności stanowią parametryczne równanie toru ciała (parametrem jest czas). Z tego układu dwóch równań można wyeliminować czas i uzyskać bezpośrednią postać równania toru ciała. Wyliczając z pierwszego z tych równań czas: $t = x/(v_0 \cos \alpha)$ i podstawiając do drugiego otrzymujemy:

$$y = (\tan \alpha)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 \quad (23)$$

Jest to równanie paraboli ($y = bx - cx^2$). Ciało rzucone ukośnie porusza się zatem po paraboli.

2. DYNAMIKA

Dynamika zajmuje się związkiem ruchu z jego przyczyną, tzn. z siłą. Zastanówmy się zatem najpierw czym jest siła.

Siła jest bardzo wygodnym sposobem opisu oddziaływania ciał. Podstawową cechą siły jest jej *zdolność do nadawaniu ciała (ciałom) przyspieszenia*. Siła jest wielkością wektorową; zwrot i kierunek siły pokazują zwrot i kierunek przyspieszenia, jakiego dozna ciało pod jej wpływem. Innym skutkiem działania siły może być też *deformacja ciała*, np. wydłużenie zamocowanej jednym końcem do ściany sprężyny.

Fundamentem dynamiki są trzy prawa dynamiki Isaaca Newtona sformułowane przez tego genialnego fizyka i matematyka w roku 1686 w dziele zatytułowanym *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Dziełem tym Newton dokonał ogromnego przełomu umysłowego i zapoczątkował nowoczesną fizykę. Oto trzy zasady dynamiki:

I. Jeżeli na ciało nie działa żadna siła lub wypadkowa działających sił wynosi zero to ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku.

II. Sprawcą przyspieszenia jest siła. Jeśli na ciało o masie m działa siła $\mathbf{F}$ to nadaje ona ciału przyspieszenie $\mathbf{a}$, przy czym związek między tymi wielkościami jest następujący:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (24)$$

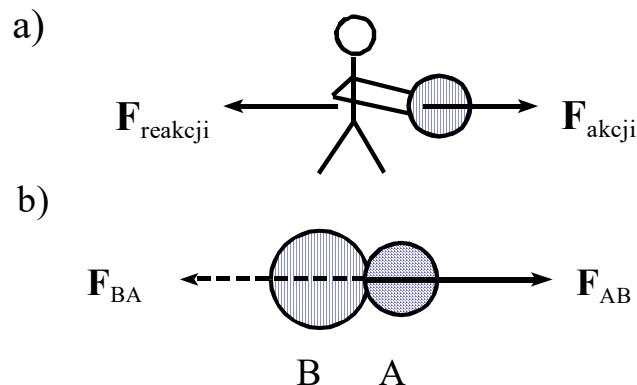
Zauważmy, że pierwsza zasada dynamiki jest szczególnym przypadkiem drugiej, gdyż jeśli $\mathbf{F}=0$ to automatycznie $\mathbf{a}=0$ i ciało albo spoczywa albo porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Pamiętajmy, że siła jest wektorem, a zatem: $\mathbf{F}: [F_x, F_y, F_z]$. Równ.18 przedstawić można zatem jako układ trzech równań skalarnych, dla składowych względem osi x, y i z :

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad F_y = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad F_z = m \frac{d^2z}{dt^2} \quad (25)$$

III. Siła akcji równa jest sile reakcji.

Siły występują zawsze parami. Jeśli człowiek odpycha od siebie piłkę z siłą, którą nazwiemy $\mathbf{F}_{\text{akcji}}$, to równocześnie piłka działa na człowieka siłą skierowaną w stronę przeciwną o tej samej wartości ($\mathbf{F}_{\text{reakcji}}$).



Dwa przykłady ilustrujące III zasadę dynamiki

Podobnej ilustracji dostarcza zderzenie dwóch kul. W czasie zderzenia oddziałują one na siebie przeciwnie skierowanymi siłami o tej samej wartości.

Na wymienionych trzech zasadach dynamiki opiera się cała mechanika klasyczna. Zachowała ona całkowitą poprawność (w zakresie prędkości „fizyki klasycznej”, tzn. znacznie mniejszych od prędkości światła) od swych narodzin po dzień dzisiejszy.

3. PODSTAWOWE POJĘCIA I WIELKOŚCI UŻYWANE W MECHANICE

SILA

Przypomnijmy raz jeszcze czym jest siła. Powiedzieliśmy już że, siła jest bardzo wygodnym sposobem opisu oddziaływania ciał. Jak widzieliśmy, siły zawsze występują parami (III zasada dynamiki). Podstawową cechą siły jest jej zdolność do nadawania ciału (ciałom) przyspieszenia. Wynika to z II zasady dynamiki, która może być uznana za definicję siły ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

Siła jest wielkością wektorową; zwrot i kierunek siły pokazują zwrot i kierunek przyspieszenia, jakiego dozna ciało pod jej wpływem. Siła może także powodować deformację ciała (np. wydłużenie, skrócenie, skręcenie).

Wszystkie występujące w przyrodzie siły wyprowadzić można z czterech podstawowych oddziaływań: silnych, słabych, elektromagnetycznych i grawitacyjnych.

PĘD

Pęd definiujemy w fizyce klasycznej jako:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

(26)

Pęd ulega zmianie pod wpływem działania siły. Zauważmy, że:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad \text{Widzimy, zatem, że można podać równoważne}$$

sformułowanie drugiej zasady dynamiki:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (27)$$

PRACA

Pracę (W) definiujemy jako iloczyn skalarny siły i przemieszczenia. W przypadku stałej siły i przemieszczenia o stałym kierunku:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \quad (28)$$

Jeśli natomiast zarówno siła jest zmienna jak i przemieszczenie odbywa się po dowolnej krzywej, to przyrost pracy wyliczymy następująco:

$$dW = \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \quad (29)$$

Praca całkowita wyniesie zaś:

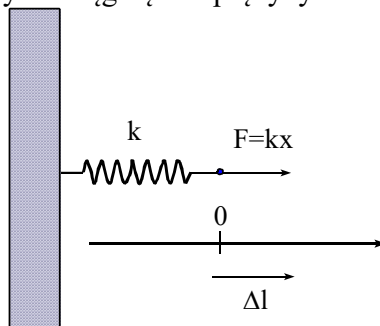
$$W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \quad (30)$$

W szczególnym przypadku przemieszczenia wzdłuż osi x i siły równoległej do osi x , Równ. 29 przybierze postać:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (31)$$

Przykład:

Wyliczmy pracę wykonaną przy rozciągnięciu sprężyny o długość Δl .



Rozciągnięcie sprężyny o długość Δl

Założmy, że sprężyna rozciągana jest w kierunku osi x . Siła konieczna do rozciągania sprężyny wynosi: $F=kx$, gdzie x jest aktualnym wydłużeniem sprężyny (k jest stałą sprężystości sprężyny). Praca rozciągania wynosi:

$$W = \int_0^{\Delta l} F(x)dx = \int_0^{\Delta l} kx dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\Delta l} = k \frac{(\Delta l)^2}{2}$$

Widzimy więc, że praca rozciągnięcia sprężyny jest proporcjonalna do kwadratu jej wydłużenia.

MOC

Moc definiujemy jako pracę wykonywaną w jednostce czasu:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (32)$$

Jeśli moc ma stałą wartość, to:

$$P = \frac{W}{t} \quad (33)$$

W przypadku, gdy praca wykonywana jest przez stałą siłę ($dW=F \cdot ds$), to moc:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{ds}{dt} = F \cdot v \quad (34)$$

ENERGIA KINETYCZNA

Ogólnie, energię definiujemy jako zgromadzoną pracę albo jako zdolność do wykonania pracy.

Wyliczmy pracę potrzebną do rozpędzenia ciała od prędkości v_0 do v . Rozpędzanie odbywa się pod wpływem stałej siły F na drodze $s_v = v_0 t + at^2/2$ (por. Równ, 20). Praca ta wynosi:

$$W = F s_v = ma(v_0 t + \frac{at^2}{2}) = ma(v_0 t + \frac{v - v_0}{t} \frac{t^2}{2}) = mat(\frac{v + v_0}{2}) = m(\frac{v - v_0}{t})t(\frac{v + v_0}{2}) = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2)$$

W przekształceniu powyższym użyliśmy równości: $a = \frac{v - v_0}{t}$. Otrzymaliśmy więc:

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Wprowadźmy pojęcie energii kinetycznej:

$E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2}$	(35)
-----------------------------------	------

A więc, wykonana praca rozpędzania ciała równa się przyrostowi energii kinetycznej:

$$W = \Delta E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

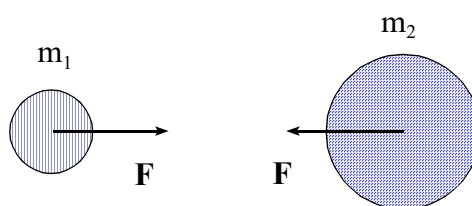
Energia kinetyczna ciała jest zatem pracą, jaką należy wykonać przy jego rozpędzeniu do prędkości v od prędkości zerowej. Z drugiej strony, rozpędzone ciało posiadając energię kinetyczną, może wykonać pracę równą tej energii. Np. rozpędzony samochód uderzając w drzewo wykonuje pracę odkształcenia karoserii i drzewa (nie mówiąc o odkształceniu pasażerów), wytwarza energię cieplną, energię powstałej fali akustycznej itp.

POLE GRAWITACYJNE

Siła przyciągania grawitacyjnego często pojawia się w problemach mechaniki. Prawo opisujące siłę przyciągania grawitacyjnego zostało sformułowane przez Newtona i ma ono postać:

$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$	(36)
-----------------------------	------

gdzie: m_1 i m_2 są masami ciał przyciągających się, r jest ich odległością, zaś G jest stałą grawitacji ($G=6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$).



W praktyce używa się też często przyspieszenia grawitacyjnego (g) przy powierzchni Ziemi. Zauważmy, że zgodnie z prawem grawitacji na masę m przy powierzchni Ziemi działa siła F , którą możemy wyrazić:

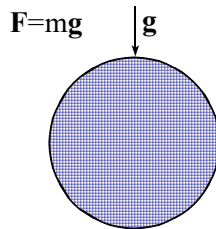
$$F = mg = G \frac{mM}{R^2}$$

Gdzie M i R są masą i promieniem Ziemi. Z powyższej zależności wyliczamy g :

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

Przyspieszenie grawitacyjne g skierowane jest zgodnie z promieniem Ziemi do jej środka. Powtórzmy zatem, że siłę grawitacyjną, działającą na ciało przy powierzchni Ziemi, praktycznie jest wyrazić jako:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$



ENERGIA POTENCJALNA

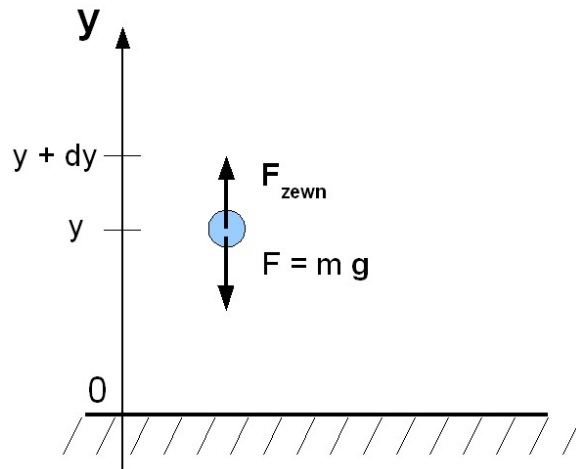
Zacznijmy nasze rozważania od przypadku szczególnego, czyli wyliczenia energii potencjalnej pola grawitacyjnego dla ciał, które są blisko powierzchni Ziemi.

Wyliczenie energii potencjalnej pola grawitacyjnego w pobliżu powierzchni Ziemi

Rozważmy najpierw uproszczone podejście do problemu energii potencjalnej pola grawitacyjnego, który jest słuszne i bardzo przydatne, jeśli założyć, że:

- ciało znajduje się praktycznie zawsze na powierzchni Ziemi,
- lub też zmiany położenia ciała są o rzędy wielkości mniejsze niż promień Ziemi.

Przy takich założeniach, siła grawitacyjna ma stałą wartość: $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, gdzie $\mathbf{g}$ jest przyspieszeniem ziemskim ($g \cong 9.81 \text{ m/s}^2$).



Założmy, że chcemy podnieść masę m z wysokości początkowej y na wysokość $y+dy$. Aby to zrobić musimy siłę grawitacji $\mathbf{F}$ zrównoważyć siłą zewnętrzną $\mathbf{F}_{zew} = -\mathbf{F}$. Z zasady zachowania energii:

$$E_p(y + dy) = E_p(y) + \mathbf{F}_{zew} \cdot d\mathbf{y}$$

lecz:

$$E_p(y+dy) = E_p(y) + dE_p$$

więc:

$$dE_p = \mathbf{F}_{zew} \cdot d\mathbf{y} \quad (37a)$$

Lecz jak już mówiliśmy: $\mathbf{F}_{zew} = -\mathbf{F}$, więc:

$$dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{y} \quad (37b)$$

Policzmy jaką energię potencjalną uzyska ciało, jeśli podniesiemy je z poziomu $y_A=0$ (z powierzchni Ziemi) na wysokość $y_B=h$. Z równ. 37 mamy:

$$\int_{y_A}^{y_B} dE_p = \int_{y_A}^{y_B} \mathbf{F}_{zew} \cdot d\mathbf{y} = - \int_{y_A}^{y_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{y}$$

czyli:

$$E_p(y_B) - E_p(y_A) = - \int_{y_A}^{y_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{y} \quad (38)$$

lub równoważnie:

$$\Delta E_p(y_B, y_A) = - \int_{y_A}^{y_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{y} \quad (38a)$$

Biorąc pod uwagę, że $y_A=0$ oraz $y_B=h$, otrzymujemy
:

$$E_p(h) - E_p(0) = - \int_0^h \mathbf{F} \cdot d\mathbf{y}$$

Przy wyliczaniu energii potencjalnej musimy zawsze zdefiniować poziom odniesienia y_A dla którego energia potencjalna równa jest zero. W tym przypadku jako poziom odniesienia bierzemy powierzchnię Ziemi (może to być także, np., poziom podłogi w pokoju). A zatem:

$$E_p(y_A = 0) = 0$$

oraz:

$$E_p(h) = - \int_0^h \mathbf{F} \cdot d\mathbf{y}$$

Ponieważ $\mathbf{F}$ i $d\mathbf{y}$ mają przeciwne zwroty, to: $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{y} = - F dy$; zatem:

$$E_p(h) = \int_0^h F dy = \int_0^h mg dy = mgh$$

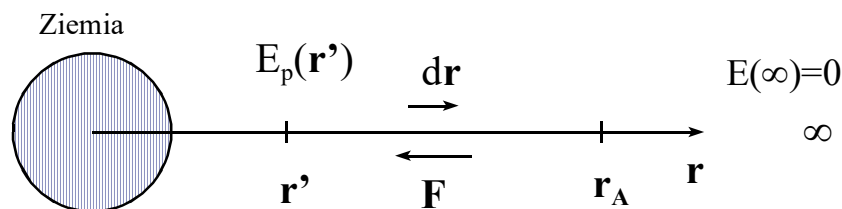
Otrzymaliśmy zatem dobrze znany wzór na energię potencjalną, wyliczaną przy powierzchni Ziemi (gdzie h jest wysokością nad powierzchnią Ziemi, jako umownym poziomem odniesienia)
:

$$E_p(h) = mgh$$

Energia potencjalna pola grawitacyjnego w przypadku ogólnym

Rozważmy teraz grawitacyjną energię potencjalną ciała (np. statku kosmicznego), który jest daleko od Ziemi (rysunek poniżej). Teraz już nie możemy założyć, że siła grawitacyjna ma stałą wartość, lecz musimy użyć na nią ogólnego wzoru (wzór Newtona – Równ.36).

Wyliczymy jak zmienia się energia potencjalna, jeśli ciało porusza się wzdłuż osi $\mathbf{r}$ (patrz poniższy rysunek).



Wzór 37 b przyjmie teraz postać:

$$dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Wyliczmy zmianę energii potencjalnej przy przemieszczeniu ciała od punktu $\mathbf{r}_A$ do punktu $\mathbf{r}'$. Analogicznie do Równ. 38 otrzymujemy:

$$E_p(\mathbf{r}') - E_p(\mathbf{r}_A) = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (39)$$

Założmy teraz, że punkt $\mathbf{r}_A$ jest poziomem odniesienia dla energii potencjalnej, w którym przyjmuje ona wartość **zerową**. W przypadku ogólnym, jako poziom odniesienia przyjmujemy nieskończoność, czyli: $\mathbf{r}_A = \infty$ oraz $E_p(\infty) = 0$. Zatem:

$$E_p(\mathbf{r}') = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (39b)$$

Zapamiętajmy zatem: energia potencjalna ciała w punkcie $\mathbf{r}'$ jest pracą wykonaną przez pole grawitacyjne (wziętą ze znakiem minus) przy przemieszczeniu ciała od nieskończoności do danego punktu do $\mathbf{r}'$.

Przykład 1: Energia potencjalna pola grawitacyjnego w dowolnej odległości od Ziemi

Wyliczymy teraz konkretnie ile wynosi ta energia w odległości r' od środka Ziemi, czyli masy wytwarzającej rozważane pole grawitacyjne. Podstawmy wzór Newtona (36) na siłę grawitacyjną do Równ. 39b oraz zauważmy, że siła $\mathbf{F}$ ma przeciwny zwrot niż $d\mathbf{r}$ (czyli: $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -Fdr$). Otrzymamy:

$$E_p(r') = \int_{\infty}^{r'} F \cdot dr = GmM \int_{\infty}^{r'} \frac{dr}{r^2} = GmM \left[\frac{-1}{r} \right]_{\infty}^{r'}$$

A zatem:

$$E_p(r') = GmM \left[\frac{-1}{r} \right]_{\infty}^{r'} = GmM \left(-\frac{1}{r'} + 0 \right) = -\frac{GmM}{r'}$$

Ostatecznie, energia potencjalna w polu grawitacyjnym wyraża się:

$$E_p(r) = -\frac{GmM}{r} \quad (40)$$

W równaniu tym zastąpiliśmy zmienną r' przez r .

Energia potencjalna pola grawitacyjnego jest zawsze ujemna, ponieważ masy tylko się

przyciągają (nie istnieje odpychanie grawitacyjne). Jej wartość wynosi zero tylko w nieskończoności.

[Jak zobaczymy omawiając oddziaływanie między ładunkami elektrycznymi, energia potencjalna pola elektrycznego może być zarówno ujemna (przyciąganie ładunków o przeciwnych znakach), jak i dodatnia (przyciąganie ładunków o przeciwnych znakach)].

W wielu zagadnieniach użyteczne jest pojęcie **potencjału** pola grawitacyjnego $V(r)$. Jest to energia potencjalna ciała o jednostkowej masie, a zatem:

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -\frac{GM}{r}$$

Inaczej mówiąc, potencjał grawitacyjny $V(\mathbf{r}')$ jest pracą (ze znakiem minus), jaką pole wykonuje przemieszczając masę jednostkową z nieskończoności do punktu $\mathbf{r}'$:

$$V(\mathbf{r}') = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}'} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

gdzie przez $\mathbf{f}=\mathbf{F}/m$ oznaczyliśmy natężenie pola grawitacyjnego, czyli siłę grawitacyjną działającą na jednostkową masę.

Przykład 1: Spadek ciała na powierzchnię Ziemi z nieskończoności



Z zasady zachowania energii: energia potencjalna ciała w nieskończoności = energii potencjalnej przy powierzchni Ziemi + nabyta energia kinetyczna, co wyraża się:

$$E_p(\infty) = E_p(R) + E_{kin}(R)$$

Lewa strona równa się zero, więc:

$$E_{kin}(R) = -E_p(R) = \frac{GmM}{R}$$

A zatem energia kinetyczna ciała, które spadło z nieskończoności na Ziemię wynosi:

$$E_{kin}(R) = \frac{GmM}{R}$$

SILA TARCIA

Oprócz sił aktywnych, jak np. siła grawitacji czy siła oddziaływania między ładunkami elektrycznymi, istnieją też siły bierne, które przeciwstawiają się ruchowi ciała. Zauważmy, że jeśli na rozpędzone ciało nie działa już żadna aktywna siła, to po pewnym czasie ono się zatrzyma. Prawie zawsze ciało oddziałuje z powierzchnią po której się porusza lub z ośrodkiem materialnym (gaz, ciecz), w którym jest zanurzone. Tą hamującą siłę nazywamy *siłą tarcia*. (Wyjątkową sytuacją, kiedy nie występuje siła tarcia jest zjawisko nadciekłości; jest to efekt kwantowy, występujący w bardzo niskich temperaturach).

Na ogół siła tarcia występuje równocześnie wraz z siłami aktywnymi (np. na poruszający się samochód działa siła napędzająca, pochodząca od silnika, jak i siła tarcia). Uwzględniając siłę tarcia (**T**) i II zasadę dynamiki, napiszemy:

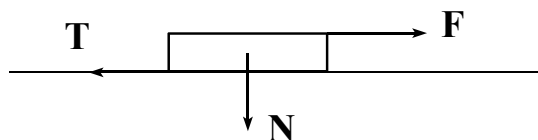
$$\mathbf{F} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$$

W szczególnym przypadku, gdy siła aktywna równoważy siłę tarcia ($F=T$), ciało porusza się ruchem jednostajnym lub jest w spoczynku; przykładem może tu być jednostajny ruch samochodu na autostradzie lub ustabilizowane już opadanie skoczka spadochronowego.

Siłę tarcia występującą wskutek kontaktu poruszającego się ciała z podłożem, charakteryzujemy współczynnikiem tarcia f :

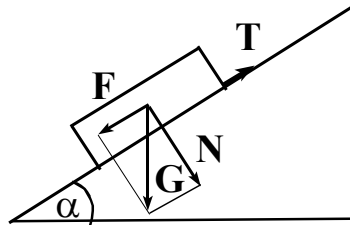
$T = f N$	(41)
-----------	------

gdzie, **N** jest siłą nacisku ciała na podłoże (i do niego prostopadłą).



Rozróżniamy *tarcie statyczne i kinematyczne*. Siłę tarcia statycznego musimy pokonać w sytuacji, gdy chcemy ruszyć ciało z miejsca (ze stanu spoczynku). Natomiast tarcie kinematyczne występuje, gdy ciało jest już w ruchu. Rozróżniamy zatem współczynniki tarcia f_s i f_k .

Statyczny współczynnik tarcia f_s można wyznaczyć w sposób poglądowy używając równi pochyłej o regulowanym kącie pochylenia α .



Kładziemy klocek badanego ciała na równi; wartość siły tarcia T wynosi:

$$T = f_s N = f_s G \cos \alpha$$

gdzie G jest ciężarem klocka, zaś N jest jego składową prostopadłą do równi. Następnie powiększamy powoli kąt α , aż ciało drgnie i zacznie się poruszać. W tym granicznym momencie możemy napisać:

$$F = T$$

gdzie:

$$F = G \sin \alpha$$

jest składową siły ciężaru klocka styczną do równi. A zatem:

$$G \sin \alpha = f_s G \cos \alpha$$

Z powyższej relacji znajdujemy ostatecznie:

$$f_s = \tan \alpha$$

Podobnie, współczynnik tarcia kinematycznego f_k , mógłby być wyznaczony z powyższego równania, ale kąt α odpowiadałby takiemu pochyleniu równi, przy którym klocek zsuwa się w dół ze stałą prędkością.

A oto kilka przykładowych wartości współczynników tarcia:

Rodzaj powierzchni	f_s	f_k
Stal po stali	0.15	0.03 – 0.09
Drewno po drewnie (równoległe do włókien)	0.54	0.34
Drewno po kamieniu	0.7	0.3
Stal po lodzie (np. łyżwy)	0.027	0.014

Zauważmy, że jeśli w układzie występuje siła tarcia, to całkowita energia mechaniczna nie jest zachowana. Część energii mechanicznej zamienia się na ciepło, czyli na zwiększenie energii wewnętrznej U układu (tzn. energii kinetycznej cząstek, z których zbudowane jest ciało). A zatem wskutek tarcia występuje wzrost ΔU energii wewnętrznej.

4. ZASADY ZACHOWANIA

W fizycznym opisie rzeczywistości podstawową rolę odgrywają zasady zachowania. Dwie najbardziej podstawowe, zawsze spełnione, to: zasada zachowania energii i zasada zachowania pędu.

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

Energia nie tworzy się z niczego ani nie znika bezpowrotnie. Ogólnie, możemy napisać, że w odosobnionym (izolowanym) układzie:

$$\sum_i E_i = \text{const} \quad (42)$$

gdzie „i” numeruje różne postaci energii, np.:

E_1 - energia kinetyczna,
 E_2 - energia potencjalna,
 E_3 - energia wewnętrzna (U),
 E_4 - energia pola elektromagnetycznego,
 E_5 - energia związana z masą ciała ($E=mc^2$),
 E_6 – energia chemiczna,
 E_7 – energia jądrowa
.
i.t.d.

Przykład: Skok o tyczce

Rekord świata w skoku o tyczce wynosi około 6 m. Wyliczmy do jakiej prędkości musi rozpedzić się skoczek na rozbiegu, aby uzyskać taką wysokość ?

Z zasady zachowania energii: $\frac{mv^2}{2} = mgh$, a zatem: $v = \sqrt{2gh}$. Po podstawieniu $g \cong 10 \text{ m/s}^2$

otrzymamy: $v \cong 11 \text{ m/s}$. A zatem skoczek musi biec z prędkością dochodzącą do rekordu świata w biegu na 100 m.

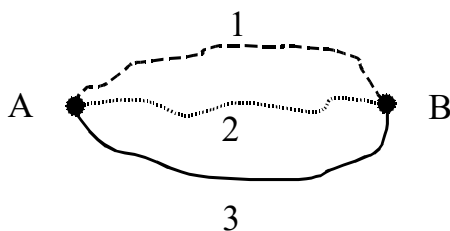
Pole sił zachowawczych

Bardzo ściśle z zasadą zachowania energii wiąże się pojęcie pola sił zachowawczych. Jest to takie pole, w którym każdemu punktowi przestrzeni odpowiada jednoznacznie określona wartość energii potencjalnej. Takie są na przykład pole grawitacyjne oraz pole elektrostatyczne (wytworzone przez nieruchomy układ ładunków).

W polu zachowawczym praca przemieszczenia ciała pomiędzy dwoma punktami pola (np.: A i

B) nie zależy od drogi po której to przemieszczenie nastąpiło. Tak więc:

$$W_{AB(1)} = W_{AB(2)} = W_{AB(3)}$$



Ponadto, jeśli ciało zostanie przemieszczone w polu zachowawczym po zamkniętym konturze i wróci do punktu wyjścia (np., jeśli ciało startując z punktu A, minie punkt B i wróci do punktu A), to całkowita praca wykonana przez pole wynosi zero.

Zauważmy, iż zasada zachowania energii (Równ. 42) jest prawdziwa ogólnie, zarówno gdy występują tylko siły zachowawcze, jak i w przypadku występowania zarówno sił zachowawczych i niezachowawczych (np. tarcia lub oporu powietrza).

ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

Zasada zachowania pędu jest drugą, obok zasady zachowania energii, podstawową zasadą zachowania w fizyce. Mówi ona, że:

Jeśli na ciało lub układ ciał nie działa żadna zewnętrzna siła, to całkowity pęd układu pozostaje stały:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \text{const} \\ \text{lub} \\ \sum_i \mathbf{p}_i &= \text{const} \end{aligned} \quad (43)$$

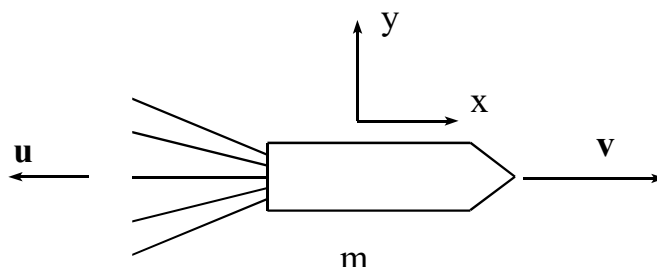
Prawo zachowania pędu wynika z II zasady dynamiki. Zauważmy, że:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

W uzyskanym związku: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, po pomnożeniu obu stron równania przez dt otrzymujemy:

$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p}$. Wynika stąd jednoznacznie, że jeśli $\mathbf{F}=0$ to $d\mathbf{p}$, czyli zmiana pędu jest zerowa, a zatem pęd pozostaje stały ($\mathbf{p}=\text{const}$).

Przykład zastosowania zasady zachowania pędu: Napęd odrzutowy (ruch rakiety)



Rozpędzana rakietą ma chwilową prędkość v , zaś prędkość wyrzucanych gazów (względem rakiety) wynosi u

Rozważmy ruch rakiety o napędzie odrzutowym: chwilowa prędkość rakiety wynosi v , zaś z jej dyszy wylatują gazy z prędkością u (względem rakiety). Załóżmy, że w czasie dt z dyszy silnika wyrzucane są gazy o masie $dm_{(\text{gazów})}$ i wskutek tego prędkość rakiety wzrasta o dv . Prawo zachowania pędu, napisane w inercjalnym układzie odniesienia związanym chwilowo z rakietą, gdy ma ona prędkość v :

$$mdv = u dm_{(\text{gazów})}$$

Oczywiście: $dm_{(\text{gazów})} = -dm$, gdzie dm jest ubytkiem masy rakiety, a zatem jest ujemne. A zatem:

$$mdv = -u dm$$

albo:

$$dv = -u \frac{dm}{m} \quad (44)$$

Równanie powyższe jest równaniem różniczkowym ruchu rakiety. Całkując z uwzględnieniem warunków początkowych (dla $t=0$: $m=m_0$, $v=v_0$) otrzymujemy:

$$\int_{v_0}^{v'} dv = -u \int_{m_0}^{m'} \frac{dm}{m} = -u [\ln m]_{m_0}^{m'}$$

lub:

$$v' - v_0 = -u (\ln m' - \ln m_0)$$

zaś opuszczając „primy”:

$$v = v_0 + u (\ln m_0 - \ln m)$$

i korzystając z własności funkcji logarytm:

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m} \quad (45)$$

Powyższy wzór jest słynnym wzorem Ciołkowskiego, opisującym ruch rakiety (przy założeniu

nieobecności innych ciał). Wzór ten można rozbudować i zmodyfikować, uwzględniając przyciąganie grawitacyjne Ziemi, opór powietrza i.t.p. (Ciołkowski był synem polskich zesłańców na Syberię, który wykształcił się już i pracował w Rosji).

Jeśli prędkość początkowa rakiety była $v_0=0$, to prędkość końcowa rakiety wynosi:

$$v = u \ln \frac{m_0}{m}$$

Rozważmy teraz dwa przykłady liczbowe.

Przykład 1

Jaki musi być stosunek masy początkowej do końcowej m_0/m rakiety, aby osiągnęła ona pierwszą prędkość kosmiczną ($v = 7.9 \text{ km/s}$) ? Przyjąć typową prędkość wyrzucanych gazów: $u = 3 \text{ km/s}$.

Rozwiązanie:

Korzystając z relacji: $v = u \ln \frac{m_0}{m}$, wyliczamy, że $m_0/m \cong 14$. Widzimy zatem, że aby nadać satelicie o masie 1 tony pierwszą prędkość kosmiczną, trzeba zużyć 13 ton paliwa. (A pamiętajmy, że nie uwzględniliśmy tu oporu powietrza ani grawitacji). Inaczej mówiąc, aby rozpędzić 1-tonowego satelitę do pierwszej prędkości kosmicznej, masa początkowa zespołu satelita + paliwo wynosi 14 ton.

Przykład 2

Pytamy o to samo co w Przykładzie powyższym, ale chcemy, aby satelita osiągnął trzecią prędkość kosmiczną: $v=16.7 \text{ km/s}$ (a zatem taką przy której opuści Układ Słoneczny).

Rozwiązanie:

Stosując tą samą relację, otrzymujemy: $m_0/m \cong 262$!!! Tak więc w tym przypadku, do rozpędzenia 1 tonowego satelity trzeba zużyć 261 ton paliwa.