

RUCH DRGAJĄCY

Ruch harmoniczny

Ruch, który powtarza się w regularnych odstępach czasu, nazywamy *ruchem okresowym* (periodycznym). Szczególnym przypadkiem ruchu okresowego jest *ruch harmoniczny*: zależność przemieszczenia od czasu wyrażona jest przez funkcję sinus lub kosinus. Co więcej, wykazuje się, że dowolny ruch okresowy można wyrazić jako odpowiednią sumę (szereg) ruchów harmonicznym.

Układem, który wykonuje ruch harmoniczny jest *oscylator harmoniczny*.

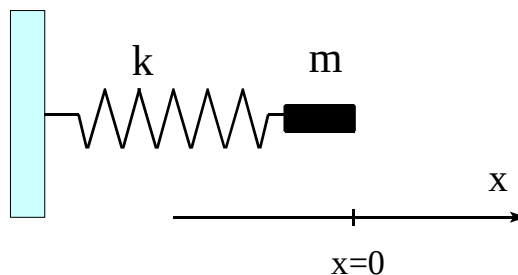
Przykłady oscylatora harmonicznego:

Mechaniczne: masa na sprężynie, wahadło.

Elektryczny: obwód LC (tutaj „wychyleniem” jest np. napięcie, prąd lub ładunek elektryczny).

Jakie cechy musi mieć układ mechaniczny (np. masa na sprężynie), aby był oscylatorem harmonicznym? Są one następujące:

- a) Drgające ciało posiada punkt równowagi trwałej,
- b) Siła działająca na ciało wynosi: $F = -kx$ (x jest wychyleniem z położenia równowagi, k jest stałą sprężystości sprężyny),
- c) Zasada liniowości: wychylenie ciała wskutek działania wielu sił równe jest sumie wychyleń jakie wywołują poszczególne siły,
- d) Częstość ruchu nie zależy od amplitudy drgań.



Napiszmy równanie ruchu oscylatora harmonicznego, którym jest masa na sprężynie. Z II zasady dynamiki:

$$F = ma$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

A zatem równanie różniczkowe ruchu oscylatora ma postać:

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$	(1)
-------------------------------------	-----

Rozwiązaniem Równ. (1) jest:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

gdzie x_0 jest amplitudą drgań, ω jest tzw. częstością kołową, zaś φ jest fazą początkową (amplitudę x_0 jak i kąt φ dobieramy z warunku początkowego, mówiącego jakie było wychylenie x w chwili $t=0$).

Podstawiając rozwiązanie (2) do Równ. (1), łatwo sprawdzić, że istotnie jest to dobre rozwiązanie. Co więcej, dokonując tego sprawdzenia, znajdujemy następujący związek między stałymi:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

Jak już wspomniano, ω jest *częstością kołową* drgań (przy czym $\omega = 2\pi\nu$ gdzie ν jest *częstotliwością* drgań). Definiuje się także *okres drgań*, T ; jest to czas wykonania jednego pełnego drgania. Oczywiście:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Wykorzystując Równ. (3), okres drgań oscylatora harmonicznego wynosi:

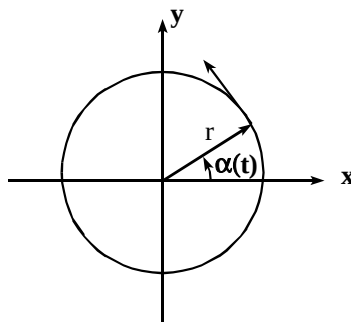
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

Na koniec zauważmy, że uwzględniając relację (3), równanie ruchu oscylatora (Równ. (1)) można przedstawić w charakterystycznej formie:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (5)$$

Związek ruchu harmonicznego z ruchem po okręgu

Znaczenie częstości kołowej stanie się dla nas jaśniejsze, gdy uświadomimy sobie związek ruchu harmonicznego z jednostajnym ruchem obrotowym ciała po okręgu.



W czasie t ciało zatoczyło kąt α : $\alpha(t) = \omega t + \varphi$. Rzuty wektora wodzącego (wskazującego aktualne położenie ciała) na oś x i y wynoszą:

$$x = r \cos \alpha = r \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = r \sin \alpha = r \sin(\omega t + \varphi)$$

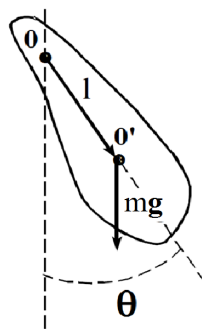
Widzimy zatem, że rzut ciała krążącego po okręgu na dowolną oś leżącą w jego płaszczyźnie, jest ruchem harmonicznym. W równaniu powyższym ω oznacza prędkość kątową ruchu ciała po okręgu, podczas gdy w Równ. (3) lub (5) ten sam symbol oznaczał częstość kołową. Tak więc częstość kołowa w ruchu harmonicznym może być utożsamiona z prędkością kątową odpowiadającego mu ruchu po okręgu.

Przypomnijmy raz jeszcze podstawową cechę ruchu harmonicznego: okres drgań (lub jego częstość) nie zależą od amplitudy ruchu.

Wahadło

Wahadło fizyczne

Rozpatrzmy od razu ogólny przypadek wahadła czyli tzw. wahadło fizyczne. Wahadło fizyczne to dowolne ciało mogące się obracać wokół jakiejś ustalonej osi, nie przechodzącej jednak przez środek masy.



Na powyższym rysunku wahadło wykonuje drgania wokół osi O; jest ona odległa o l od środka masy (O'). Załóżmy, że w danej chwili wahadło wychylone jest z położenia równowagi o kąt θ . Na wahadło działa moment siły, pochodzący od siły ciężkości o wartości mg , zaczepionej w środku masy O' . Zgodnie z definicją momentu siły, moment ten wynosi:

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times m\mathbf{g}$$

Wartość momentu siły wynosi:

$$M = -mgl \sin \theta$$

Znak minus w powyższym równaniu pochodzi stąd, że moment siły i kąt θ mają zawsze przeciwny znak (ponadto, zauważmy, że funkcja sinus jest funkcją nieparzystą, więc przy zmianie znaku kąta θ zmienia się także znak momentu siły).

Pisanie równania ruchu rozpoczynamy zawsze od II zasady dynamiki (w tym wypadku oczywiście dla ruchu obrotowego):

$$M = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Po podstawieniu wyrażenia na moment siły i po podzieleniu obustronnie przez I:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{I} \sin \theta \quad (6)$$

Równanie powyższe jest równaniem ruchu wahadła fizycznego dla dowolnie dużych wychyleń (tzn. dla dowolnych kątów θ). Rozwiązaniem tego równania jest ruch okresowy. Nie jest on jednak ruchem harmonicznym, gdyż równanie powyższe nie jest równaniem ruchu oscylatora harmonicznego (patrz Równ. 5). Równanie 6 ulega znacznemu uproszczeniu, jeśli założymy, że wahadło wykonuje drgania o małych wychyleniach; inaczej mówiąc rozważamy małe kąty θ (np. nie większe niż 10°). Wtedy $\sin \theta$ możemy zastąpić samym kątem θ (wyrażonym oczywiście w mierze łukowej). Tak uproszczone równanie:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{I} \theta \quad (7)$$

ma identyczną postać matematyczną jak Równ. 5, będące równaniem ruchu oscylatora harmonicznego. Z porównania z Równ. 5 znajdujemy od razu częstość kołową drgań wahadła fizycznego:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad (8)$$

Okres drgań $T = \frac{2\pi}{\omega}$ wahadła fizycznego wynosi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (9)$$

Przez porównanie z rozwiązaniem równania ruchu oscylatora harmonicznego (Równ. 2) znajdujemy od razu rozwiązanie dla wahadła fizycznego:

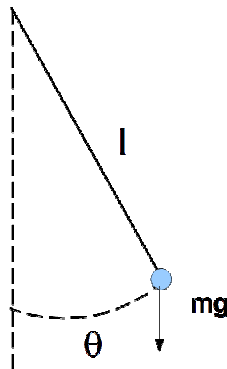
$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (10)$$

Ruch wahadła, będący ruchem okresowym, posłużył jako licznik stałych porcji czasu w zegarach i zegarkach mechanicznych. Szczególnie w tych pierwszych, najczęściej przeszklonych (obecnych jeszcze w domach niektórych z Państwa) zauważyć można łatwo ruch wahadła, odmierzającego kolejne sekundy ...

Wahadło matematyczne

Szczególnym przypadkiem wahadła fizycznego jest tzw. wahadło matematyczne. Jego dobrym przybliżeniem jest mała kulka stalowa zawieszona na lekkiej i długiej nitce. W takim szczególnym przypadku od razu możemy wyliczyć moment bezwładności I: $I = ml^2$; podstawiając to wyrażenie do Równ. 9, otrzymujemy okres wahań wahadła matematycznego:

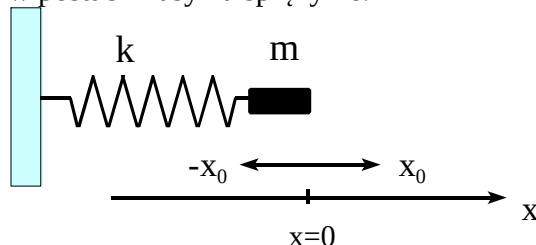
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (11)$$



Przypomnijmy raz jeszcze, że uzyskane rozwiązania równania ruchu jak i wyrażenia na częstość kołową i okres wahań są słuszne przy założeniu małych wychyleń kątowych (najwyżej 10-20 stopni – wtedy wyniki są poprawne w granicach błędu nie przekraczającego 1-2 %). Przy większych wychyleniach, trzeba rozwiązywać ogólniejsze równanie ruchu (Równ. 6); wtedy nie mamy już jednak do czynienia z oscylatorem harmonicznym, lecz z ciałem wykonującym ruch okresowy. Odpowiednie rozwiązania są już jednak bardziej skomplikowane.

Energia w ruchu harmonicznym

Zastanówmy się, jaką energię posiada drgający oscylator harmoniczny. Dla uproszczenia, rozważmy znów oscylator w postaci masy na sprężynie.



Energia potencjalna rozciągniętej sprężyny (E_p) jest pracą, jaką ona wykona wracając do położenia równowagi. Z zasady zachowania energii wynika, że energię potencjalną sprężyny możemy także wyliczyć jako pracę W jej rozciągnięcia o długość x . Obliczenie to zrobiliśmy już poprzednio, a zatem:

$$E_p = W = \frac{1}{2}kx^2$$

Jeśli sprężyna naciągnięta jest do wychylenia maksymalnego x_0 , to prędkość jak i energia kinetyczna drgającej masy są zerowe; w takim momencie cała energia mechaniczna oscylatora jest jego energią potencjalną (która jest wtedy maksymalna):

$$E_{p(max)} = \frac{1}{2} kx_0^2$$

Z drugiej strony, gdy oscylator przechodzi przez punkt równowagi ($x=0$), jego prędkość jest maksymalna (v_{max}) i cała jego energia mechaniczna ma postać energii kinetycznej ($E_k = \frac{1}{2} mv^2$), która jest wtedy maksymalna:

$$E_{k(max)} = \frac{1}{2} mv_{max}^2$$

W każdym innym, dowolnym momencie, energia mechaniczna oscylatora rozkłada się na energię potencjalną i kinetyczną, przy czym z zasady zachowania energii wynika, że energia całkowita E :

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

Energię całkowitą możemy też wyrazić jako:

$E = E_{k(max)} = E_{p(max)}$	(12)
-------------------------------	------

Oczywiście proporcja energii kinetycznej do potencjalnej jest inna w każdej chwili czasu. Ponieważ:

$$E = E_k + E_p$$

oraz energia całkowita, E , ma wartość stałą, musi być spełniony następująca zależność dla wartości średnich:

$$E = \langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle \quad (12 a)$$

Symbol $\langle \dots \rangle$ oznacza średniowanie po czasie.

Wyliczmy teraz średnią (względem czasu) energię kinetyczną i potencjalną. Energia potencjalna:

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} kx_0^2 \langle (\cos \omega t)^2 \rangle \quad (13)$$

W równaniu tym podstawiliśmy (Równ.2) wyrażenie na wychylenie oscylatora (przyjmując $\phi=0$): $x(t)=x_0 \cos \omega t$. Podobnie wyliczymy średnią energię kinetyczną:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} kx_0^2 \langle (\sin \omega t)^2 \rangle \quad (13 a)$$

Podstawiliśmy tutaj wyrażenie na prędkość oscylatora $v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t$, którą uzyskujemy ze zróżniczkowania relacji na wychylenie $x(t)$. Średnie po czasie, które występują w Równ. 13 i 13a: $\langle (\sin \omega t)^2 \rangle$ oraz $\langle (\cos \omega t)^2 \rangle$ są sobie oczywiście równe, gdyż funkcje sinus i kosinus mają taki sam kształt, tylko są przesunięte w fazie o 90° . A zatem:

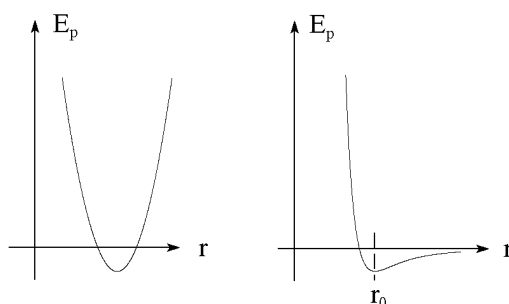
$\langle E_p \rangle = \langle E_k \rangle$	(14)
---	------

Ponadto, na podstawie Równ. 12 a mamy:

$\langle E_p \rangle = \langle E_k \rangle = \frac{1}{2} E$	(14 a)
---	--------

A zatem średnie energie kinetyczna i potencjalna są sobie równe i każda z nich równa jest połowie energii całkowitej.

Ruch drgający typu oscylatora harmonicznego nie jest wyłącznie cechą układu masa + sprężyna. Również atomy w kryształach zachowują się w dobrym przybliżeniu jak oscylatory harmoniczne. Porównajmy wykres energii potencjalnej od wychylenia atomu oddziaływującego z innym atomem (po prawej) z zależnością jaką miałby on będąc klasycznym oscylatorem harmonicznym (po lewej). Widzimy, że w odległości r_0 atom jest w stanie równowagi, który odpowiada minimum energii potencjalnej.

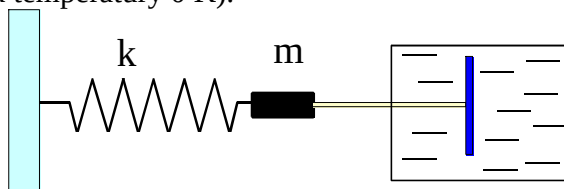


W zakresie małych wychyleń przebieg energii potencjalnej (potencjału) dla atomu jest podobny jak dla masy na sprężynie. Używając odpowiedniej zależności na przebieg potencjału atomu (znanej w fizyce atomowej) uzyskuje się częstotliwość drgań atomów: $\nu \approx 10^{14}$ Hz. Atomy drgające z tą częstotliwością wytwarzają promieniowanie podczerwone (fragment widma elektromagnetycznego).

Dodajmy jeszcze, że jeśli wytworzymy w jakimś punkcie ośrodka materialnego drgania jego cząstek, to na ogół drgania te przenoszą się w innych kierunkach; w ten sposób powstaje **fala**. Zagadnienia ruchu falowego omówione będą w jednym z następnych rozdziałów.

Ruch harmoniczny tłumiony

Do tej pory nie wzięliśmy pod uwagę siły tarcia, która prawie zawsze towarzyszy wszelkim ruchom (wyjątkową sytuacją, w której nie ma siły tarcia jest zjawisko nadciekłości, występujące w ciekłym helu w pobliżu temperatury 0 K).



Siła tarcia: $F_t \propto v$, zaś $v = \frac{dx}{dt}$, zatem:

$$F_t = -b \frac{dx}{dt} \quad (15)$$

(znak minus uzmysławia, że zwrot siły tarcia jest przeciwny do zwrotu prędkości). Na podstawie drugiej zasady dynamiki ($F = ma$):

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (16)$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (17)$$

Jest to równanie różniczkowe ruchu harmonicznego tłumionego. Jeśli b jest małe ($b/2m < \omega$), to rozwiązanie ma postać:

$$x = Ae^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \delta) \quad (18)$$

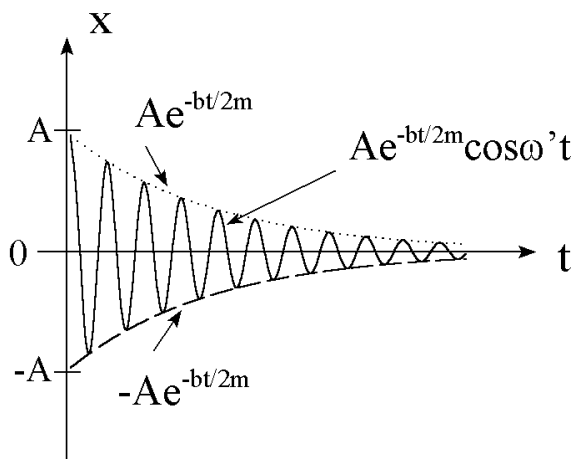
lub:

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega' t + \delta) \quad (19)$$

gdzie:

$$\omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \quad \text{oraz:} \quad \beta = \frac{b}{2m} \quad (20)$$

ω' jest częstotliwością w ruchu tłumionym, zaś β jest współczynnikiem tłumienia. Zauważmy, że drgania tłumione są drganiami o częstotliwości ω' (mniejszej niż ω dla ruchu nietłumionego) oraz, że ich amplituda szybko maleje. O szybkości zmniejszania się amplitudy drgań decyduje współczynnik tłumienia β .

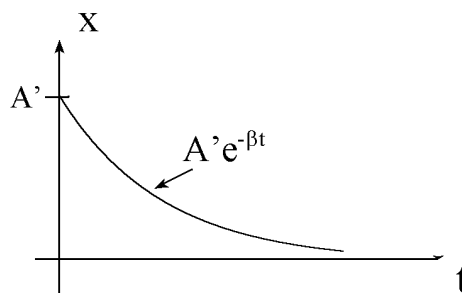


Na rysunku powyższym przedstawiono wychylenie $x(t)$ dla ruchu harmonicznego tłumionego (dla $\delta=0$); pokazano też wykres eksponencjalnej funkcji, która tłumí amplitudę ruchu harmonicznego.

Podane rozwiązanie na ruch harmoniczny tłumiony jest poprawne, jeśli tarcie nie jest zbyt wielkie. Zauważmy bowiem, że z Równ. 20 ($\omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$) wynika iż jeśli $\beta = \omega$, to wtedy: $\omega' = 0$ i rozwiązanie równania ruchu (Równ. 19) przyjmuje postać:

$$x = A'e^{-\beta t} \quad (21)$$

Jest to przypadek tzw. *tłumienia krytycznego*; nie mamy wtedy żadnych oscylacji, jedynie eksponencjalne zaniknięcie wychylenia początkowego.



Widzimy zatem, że aby rozwiązanie miało charakter opisany Rów. 19, współczynnik tłumienia musi spełniać warunek: $\beta < \omega$.

Drgania wymuszone i rezonans

Dotychczas omawialiśmy jedynie naturalne drgania ciała, tzn. drgania, które pojawiają się wtedy, gdy oscylator zostaje wychylony z położenia równowagi i puszczony swobodnie. Przypomnijmy, że dla drgań bez tarcia:

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Jeśli zaś występuje tarcie (i siły tarcia są niewielkie), to:

$$\omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Założmy teraz, że występuje jeszcze wymuszenie zewnętrzne w postaci siły okresowej: $F = F_m \cos \omega'' t$. Jej wartość „pulsuje” z częstotliwością ν'' (lub z częstością kołową: $\omega'' = 2\pi\nu''$). Równanie ruchu ma postać analogiczną jak w przypadku powyższym (Równ. 16), jedynie dodajemy jeszcze siłę wymuszającą:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega'' t \quad (22)$$

lub:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega'' t \quad (23)$$

Można wykazać, że rozwiązaniem tego równania jest:

$$x = \frac{F_m}{G} \sin(\omega''t - \delta) \quad (24)$$

gdzie: $G = \sqrt{m^2(\omega^2 - \omega'^2)^2 + b^2\omega'^2}$ oraz $\delta = \arccos \frac{b\omega''}{G}$.

Widzimy zatem, że w obecności siły wymuszającej, częstotliwość drgań jaka ustala się w układzie, równa jest częstotliwości siły wymuszającej.

Bardzo interesujący wniosek wynika z analizy amplitudy drgań układu (F_m/G). Osiąga ona maksimum, gdy G osiąga minimum. Wartość G zależy od wzajemnej relacji ω'' i ω . Szczególny przypadek ma miejsce wtedy, gdy częstotliwość siły wymuszającej równa jest częstotliwości własnej układu. Sytuacja taka to:

REZONANS: $\omega'' = \omega$

Jeśli w sytuacji rezonansu nie występowałyby tarcie ($b=0$), to $G=0$ i jak łatwo zauważyć amplituda drgań dążyłaby do nieskończoności !!!.

W rzeczywistości zawsze występuje tarcie, a więc podczas rezonansu ($\omega'' = \omega$) amplituda drgań osiąga skończone maksimum. Sytuacje takie znamy z własnych obserwacji: jeśli chcemy rozhuścić huśtawkę czy kładkę nad strumieniem, to podświadomie wytwarzamy impulsy siły o częstotliwości własnej układu (którą szybko wyczuwamy).

Niepożądanym efektem rezonansu może być pęknięcie części maszyny, zerwanie mostu lub innej konstrukcji; wywołać go mogą vibracje silnika lub nawet porywy wiatru.

Rezonans jest zjawiskiem ogólnym, nie dotyczy tylko zjawisk mechanicznych. Z rezonansem mamy do czynienia np. w obwodach elektrycznych czy też w reakcjach jądrowych.

Rysunek poniższy pokazuje jak zależy amplituda drgań układu ($A=F_m/G$) od stosunku częstotliwości siły wymuszającej do częstotliwości własnej.

