

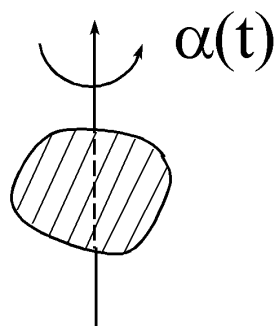
7. RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ

Omawiane poniżej wielkości wprowadzimy dla szczególnego, ale bardzo często występującego w praktyce przypadku ruchu obrotowego ciała wokół ustalonej osi obrotu. Przypadki ogólniejsze omówimy pod koniec tego paragrafu (ruch precesyjny, oś nieswobodna).

7.1 Podstawowe wielkości opisujące ruch obrotowy

Kąt obrotu, prędkość i przyspieszenie kątowe

Wyobraźmy sobie, że ciało obraca się wokół ustalonej osi obrotu, jak na poniższym rysunku.



Współrzedną opisującą obrót ciała jest kąt albo inaczej przemieszczenie kątowe; nazwijmy je: $\alpha = \alpha(t)$.

Prędkość obrotu charakteryzuje prędkość kątowna ω ; definiujemy ją jako:

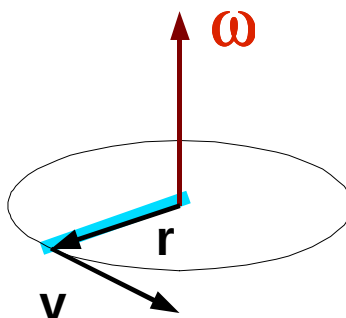
$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad (53)$$

Prędkość kątowna może ulegać zmianom, a zatem definiuje się przyspieszenie kątowe ε :

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad (54)$$

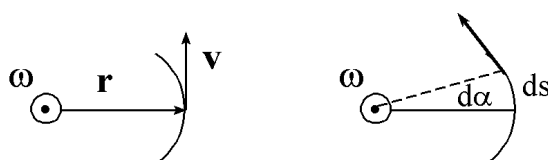
Prędkość kątowna i przyspieszenie kątowe są wektorami; w przypadku obrotu wokół ustalonej osi kierunki tych wektorów pokrywają się z kierunkiem osi obrotu, zaś ich zwrot wyznacza reguła śruby prawoskrętnej.

Wzajemną orientację wektorów ω , $\mathbf{v}$ oraz $\mathbf{r}$ pokazuje ten rysunek.



Wektory $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ są tym dla ruchu obrotowego czym są $\mathbf{v}$ i $\mathbf{a}$ dla ruchu postępowego.

Na poniższym rysunku przedstawiono schematycznie ruch obrotowy bardzo małego ciała („punktu materialnego”) po okręgu. Wektor $\boldsymbol{\omega}$ jest prostopadły do powierzchni rysunku i jest skierowany do góry (oznaczamy go symbolicznie przez $\odot$; dodajmy, że wektor prostopadły do rysunku, ale skierowany w dół oznaczamy przez $\otimes$).



Zgodnie z łukową definicją kąta (patrz rysunek po prawej):
przyrost drogi (kawałek łuku) to: $ds = r d\alpha$,

prędkość liniowa (ruchu postępowego): $v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\alpha}{dt} = r\omega$; a zatem: $\mathbf{v} = \mathbf{r}\boldsymbol{\omega}$.

Różniczkując tę zależność po czasie otrzymujemy:
 $\mathbf{a} = \mathbf{r}\boldsymbol{\varepsilon}$. Dwie ostatnie zależności zapisuje się ogólniej:

$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$	(55)
--	------

Występujący tu wektor $\mathbf{r}$ jest wektorem wodzącym rozważanego punktu materialnego, zaś znak $\times$ oznacza iloczyn wektorowy.

Podobnie, jak w przypadku ruchu postępowego, możemy wyróżnić dwa szczególne typy ruchu obrotowego:

a) jednostajny; wtedy: $\alpha = \alpha_0 + \omega t$,

b) jednostajnie zmienny (gdy $\varepsilon = \text{const}$, zakładamy ponadto, że początkowe położenie kątowe to α_0 , a początkowa prędkość kątowa to ω_0):

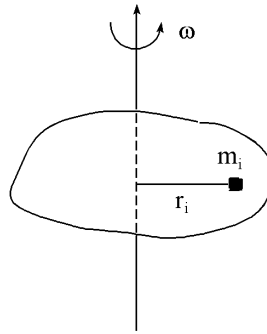
$$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (\text{analogia do: } x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2})$$

oraz:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \quad (\text{analogia do: } v = v_0 + at)$$

Energia kinetyczna

Rozważmy ciało o dowolnym kształcie, obracające się wokół stałej osi obrotu:



Na rysunku wydzielono masę m_i bardzo małego i -tego elementu ciała. Odległość tego elementu od osi obrotu wynosi r_i . Energia kinetyczna ciała w ruchu obrotowym będzie sumą energii kinetycznych ruchu postępowego wszystkich jego elementów:

$$E_k = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2.$$

Sumę występującą po prawej stronie ostatniej równości nazywamy *momentem bezwładności* i oznaczamy jako I :

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad (55)$$

Ostatecznie, otrzymujemy bardzo przejrzysty wzór na energię kinetyczną obracającego się ciała:

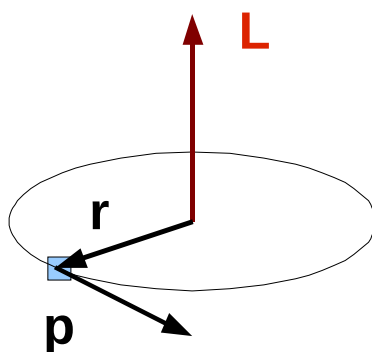
$$E_k = \frac{I \omega^2}{2} \quad (56)$$

Moment pędu

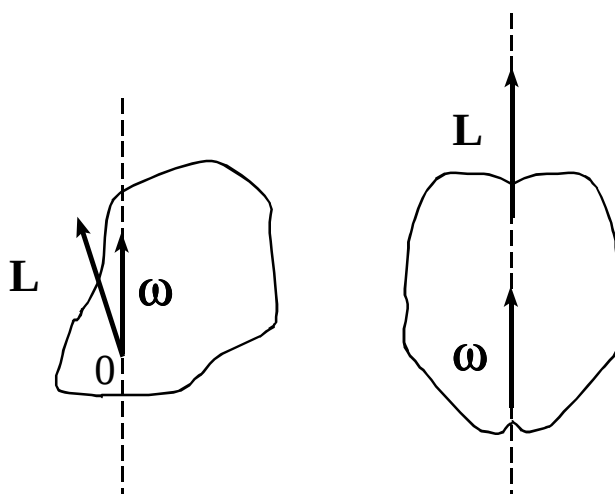
Rozważmy obrót ciała wokół ustalonej osi. Dla pojedynczego bardzo małego ciała (nazywamy go *punktem materialnym*) moment pędu definiujemy jako:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (57)$$

gdzie $\mathbf{r}$ jest wektorem położenia punktu materialnego, zaś $\mathbf{p}$ jest pędem ciała. Moment pędu jest zatem określony względem punktu (oznaczonego tutaj jako „0”). Relacja ta przedstawiona jest schematycznie poniżej.



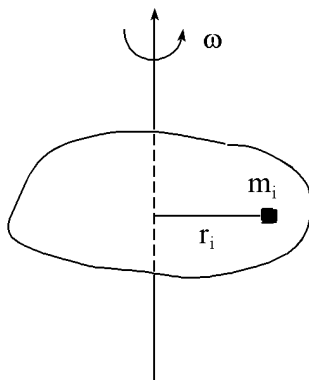
Zastanówmy się teraz jak można wyliczyć całkowity moment pędu ciała. Na ogół moment pędu ciała ($\mathbf{L}$) nie jest równoległy do wektora prędkości kątowej ($\boldsymbol{\omega}$) – patrz rysunek poniżej. Równoległość ta ma natomiast miejsce jeśli oś obrotu jest osią symetrii ciała (lub gdy jest jedną z osi głównych – o czym będzie mowa w paragrafie 7.3).



Po lewej: w ogólnym przypadku wektory $\mathbf{L}$ i $\boldsymbol{\omega}$ nie są równoległe,

Po prawej: jeśli oś obrotu jest osią symetrii ciała to $\mathbf{L}$ i $\boldsymbol{\omega}$ są równoległe.

Sytuacja znacznie się upraszcza, jeśli rozważymy składową momentu równoległą do osi obrotu ($\mathbf{L}_{os}$); założmy ponadto, że oś obrotu ma ustalony kierunek w przestrzeni (tak jest w większości urządzeń mechanicznych). Wektor $\mathbf{L}_{os}$ jest oczywiście równoległy do wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$.



Wyliczenie momentu pędu L_{os} rozpoczynamy od podzielenia (w myślach) ciała na ogromną ilość bardzo małych elementów (numerujemy je wskaźnikiem i). W ogólności moment pędu jest sumą jego przyczynków ($\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$) od wszystkich elementów m_i . Ograniczając się do wyliczenia L_{os} bierzemy wyrażenia $r_i p_i$ (zamiast $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$), gdzie r_i jest odległością elementu m_i od osi obrotu. Tak więc:

$$L_{os} = \sum_{i=1}^N p_i r_i = \sum_{i=1}^N m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^N m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \omega I$$

Otrzymaliśmy zatem proste wyrażenie na moment pędu ciała:

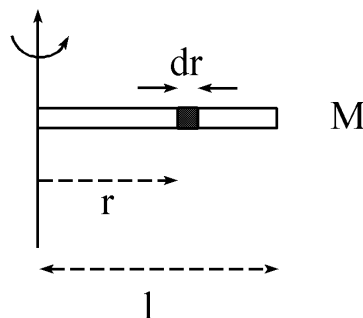
$$L_{os} = I\omega$$

Pamiętajmy jednak, że moment pędu jest wektorem. Jak już wspomniano, jeśli ciało obraca się wokół swojej osi symetrii (lub jednej z tzw. głównych osi bezwładności) to kierunek wektora momentu pędu $\mathbf{L}$ (będący równym L_{os}) jest równoległy do kierunku wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$; możemy wtedy zapisać:

$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$	(58)
-------------------------------------	------

Moment bezwładności odgrywa podstawową rolę w mechanice ruchu obrotowego. Porównując wyrażenia 56 i 58 z analogicznymi wyrażeniami dla ruchu postępowego, dochodzimy do wniosku, że moment bezwładności spełnia w ruchu obrotowym taką samą rolę jak masa w ruchu postępowym.

Przykład: moment bezwładności pręta względem osi prostopadłej do niego i przechodzącej przez jego koniec



Długość pręta wynosi l , zaś jego masa M . Podzielmy w myśli obracający się pręt na nieskończenie cienkie „plasterki”. Niech grubość jednego z nich wynosi dr , co pokazano na poniższym rysunku. Przyczynek do momentu bezwładności, który wnosi nasz nieskończenie cienki plasterek o grubości dr (i masie dm) wynosi:

$$dI = r^2 dm = r^2 M \frac{dr}{l}$$

Pręt jest obiektem ciągłym, a nie sumą dyskretnych elementów, więc wyrażenie 59 na moment bezwładności nie będzie dostatecznie precyzyjne (występuje w nim suma po skończonej ilości elementów). Sumę musimy zastąpić całką:

$$I = \int_{V_0} dI = \frac{M}{l} \int_0^l r^2 dr = \frac{M}{l} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^l = \frac{Ml^2}{3}$$

gdzie V_0 całkowitą oznacza objętość ciała.

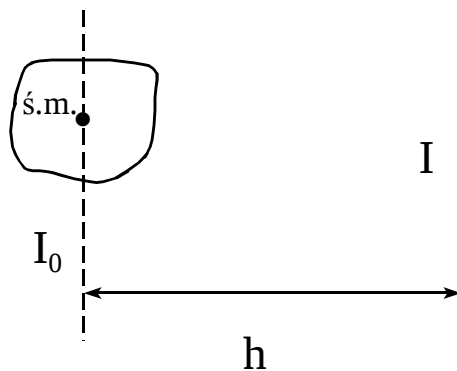
Tak więc poszukiwany moment bezwładności wynosi:

$$I = \frac{Ml^2}{3}$$

W obliczeniach momentów bezwładności, często przydatne jest *twierdzenie Steinera*. Pozwala ono wyrazić moment bezwładności ciała (I) względem dowolnej osi, jeśli znamy moment bezwładności (I_0) względem osi do niej równoległej, ale przechodzącej przez środek masy ciała:

$$I = I_0 + Mh^2 \quad (59)$$

gdzie h jest odległością między obu osiami.

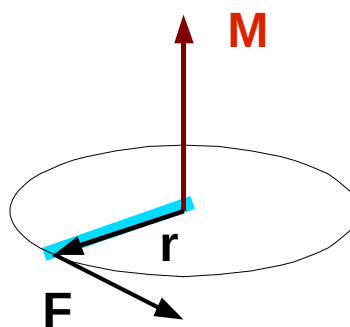


Moment siły

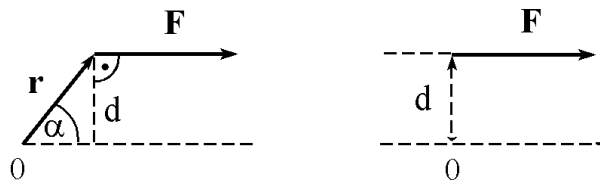
W ruchu obrotowym rolę siły spełnia moment siły. Definiujemy go jako:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (60)$$

gdzie $\mathbf{r}$ jest wektorem położenia punktu materialnego względem punktu 0.



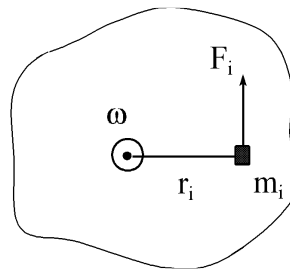
Zauważmy także, że wartość momentu siły można wyrazić jako: $M = rF\sin\alpha$, lub też $M = dF$; $d = r\sin\alpha$ jest ramieniem siły, czyli odcinkiem prostopadłym do siły, o długości równej odległości siły od punktu 0.



7.2 Zasady dynamiki ruchu obrotowego

II zasada dynamiki ruchu obrotowego

Rozważmy znów przykład ciała obracającego się wokół ustalonej osi. Dzielimy je w myślach na bardzo małe elementy (masy punktowe), które numerujemy wskaźnikiem i . Załóżmy, że na i -tą masę punktową (m_i) działa siła o wartości F_i , leżąca w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu i odległa od tej osi o r_i :



Ograniczmy się znów do szczególnego przypadku ustalonej osi obrotu; wtedy istotna jest tylko składowa momentu siły równoległa do osi obrotu: $\mathbf{M}_{os}$. Wartość momentu siły (liczonego względem osi obrotu) działającego na masę m_i wynosi: $M_i = F_i r_i$. Momenty sił pochodzące od poszczególnych elementów m_i są równoległe i dodają się. Wartość całkowitego momentu siły wynosi:

$$M_{os} = \sum_i F_i r_i = \sum_i a_i m_i r_i$$

gdzie a_i jest przyspieszeniem (ruchu postępowego) masy m_i . Wykorzystując relację pomiędzy przyspieszeniami ruchu postępowego i ruchu obrotowego: $a_i = \epsilon r_i$, związek powyższy można przepisać:

$$M_{os} = \sum_i \epsilon m_i r_i^2 = \epsilon \sum_i m_i r_i^2 = \epsilon I$$

Rezultat ten można przepisać w wektorowej postaci:

$\mathbf{M}_{os} = I\boldsymbol{\epsilon}$	(61)
--	------

Ten szczególny przypadek, gdy moment pędu jest równoległy do osi obrotu (lub gdy brana jest pod uwagę tylko składowa momentu pędu równoległa do osi obrotu) ma postać analogiczną do II zasady dynamiki dla ruchu postępowego: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Rozważmy teraz przypadek ogólny.

Moment pędu (Równ. 60) definiujemy jako: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Wyliczmy pochodną momentu pędu względem czasu:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}$$

Lecz: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$, ponadto wektory prędkości i pędu są równoległe ($\mathbf{v} // \mathbf{p}$), a zatem drugi

człon po prawej stronie powyżej: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = 0$.

A zatem $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$.

Widzieliśmy wcześniej, że równoważna postać drugiej zasady ma postać: $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$, tak więc:

$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$; ponadto $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$ (gdzie $\mathbf{M}$ jest momentem siły). Ostatecznie otrzymujemy:

	$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$	(62)
--	---------------------------------------	------

Równanie powyższe wyraża **II zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego**. Mówi ona, że:

Jeśli na ciało działa moment siły $\mathbf{M}$ to powoduje on zmianę momentu pędu $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$.

A zatem, aby moment pędu ciała ulegał zmianie (co do wartości lub kierunku), na ciało musi działać moment siły.

Równ. 62 pozostaje w pełnej analogii z drugą zasadą dynamiki dla ruchu postępowego, wyrażoną w postaci: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$.

Zasada zachowania momentu pędu (I zasada dynamiki ruchu obrotowego)

Z drugiej zasady dynamiki: $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ (lub: $d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt$) wynika, że jeśli moment siły jest zerowy, to przyrost momentu pędu także jest zerowy.

W oparciu o powyższe formułujemy zasadę zachowania momentu pędu:

Jeśli na ciało nie działa moment siły ($\mathbf{M} = 0$), to moment pędu ciała jest stały ($\mathbf{L} = \text{const}$).

Zasada zachowania momentu pędu jest równoważna **I zasadzie dynamiki ruchu obrotowego**.

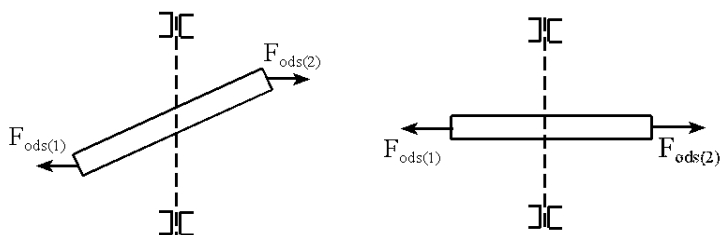
III zasada dynamiki ruchu obrotowego

Podobnie jak siły, momenty sił również występują parami. Możemy zatem sformułować zasadę akcji i reakcji dla momentów sił:

Jeśli ciało A działa na ciało B momentem siły $\mathbf{M}_{AB}$, to równocześnie ciało B działa na A momentem siły $\mathbf{M}_{BA}$, przy czym $\mathbf{M}_{AB} = -\mathbf{M}_{BA}$.

7.3 Swobodna oś obrotu

Rozważmy teraz sytuację, gdy ciało może obracać się wokół dowolnej osi obrotu, niekoniecznie ustalonej. Jeśli rzucimy np. kij czy pudełko zapalek, nadając im początkową prędkość kątową, to zauważymy, że po chwili obracają się one w sposób ustabilizowany wokół jednej ze swych osi symetrii; jest to przykład osi swobodnej. Na ogół ustabilizowany obrót ciała odbywa się wokół tej osi symetrii, której odpowiada największy moment bezwładności.



Obrót pręta wokół osi nieswobodnej (po lewej) i swobodnej (po prawej)

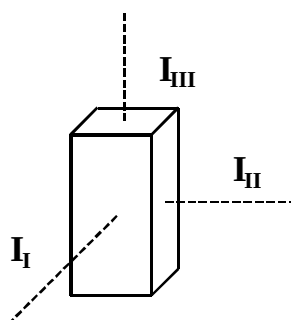
Na powyższym rysunku widać, że w przypadku osi swobodnej, obrót odbywa się w sposób naturalny, niekonieczne są „łożyska”, aby ją utrzymać. Ciało zawsze w końcu samoczynnie ustawia się do obrotu wokół osi swobodnej; czynnikiem, który za to odpowiada jest moment sił odśrodkowych. A zatem:

Oś swobodna – to oś przechodząca przez środek masy i taka, że wypadkowa sił odśrodkowych i ich momentów działających na ciało wynosi zero.

Jak już wspomniano, swobodna oś obrotu nie wymaga łożysk; przykładem jest tu oś obrotu Ziemi. Również zabieg centrowania (wyważania) koła samochodowego czy rowerowego to nic innego jak doprowadzenie do obrotu wokół osi swobodnej. Wycentrowanym kołem (a zatem obracającym się wokół osi swobodnej) nie „rzuca”, nie „bije” ono na boki, a zatem nie obciąża ono łożysk.

Główne osie bezwładności

Można wykazać, że dla każdego ciała, również niesymetrycznego, można zdefiniować trzy prostopadłe osie, zwane głównymi osiami bezwładności; moment bezwładności ciała względem jednej z nich jest maksymalny, względem drugiej jest minimalny, zaś względem trzeciej – ma wartość pośrednią: $I_I \geq I_{II} \geq I_{III}$. Jeśli ciało ma kształt symetryczny główne osie bezwładności są także osiami symetrii ciała. Modelowym przykładem jest tutaj prostopadłościan.



Główne osie bezwładności są osiami swobodnymi, lecz jedynie I_I wykazuje pełną trwałość ruchu (odporność na zakłócenia).

Założmy, że obrót ciała odbywa się względem osi przechodzącej przez środek masy. Przedstawmy prędkość kątową jako sumę trzech wektorów składowych, równoległych do głównych osi bezwładności:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_I + \boldsymbol{\omega}_{II} + \boldsymbol{\omega}_{III} \quad (63)$$

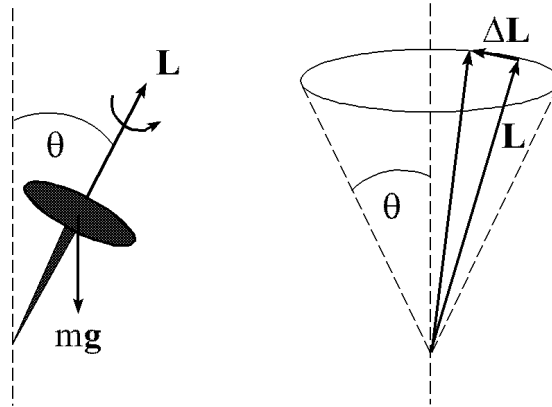
Analogicznie, możemy rozłożyć moment pędu względem tych samych osi:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_I + \mathbf{L}_{II} + \mathbf{L}_{III} = I_I \boldsymbol{\omega}_I + I_{II} \boldsymbol{\omega}_{II} + I_{III} \boldsymbol{\omega}_{III} \quad (63a)$$

Widać stąd, że na ogół moment pędu ($\mathbf{L}$) nie jest równoległy do wektora prędkości kątowej ($\boldsymbol{\omega}$). Te dwa wektory są równoległe jedynie wówczas, gdy osią obrotu jest jedna z głównych osi bezwładności. Wówczas otrzymujemy proste, znane nam z wcześniejszych paragrafów zależności: $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\epsilon}$ (relacje te są słuszne także w dowolnym przypadku, pod warunkiem, że bierzemy składowe $\mathbf{L}$ i $\mathbf{M}$ równoległe do osi obrotu). W ogólnym zaś przypadku, aby napisać relację między $\mathbf{M}$ oraz $\mathbf{L}$, definiuje się moment bezwładności nie jako skalar (liczbę), tylko jako specjalny obiekt matematyczny zwany tensorem.

7.4 Ruch precesyjny

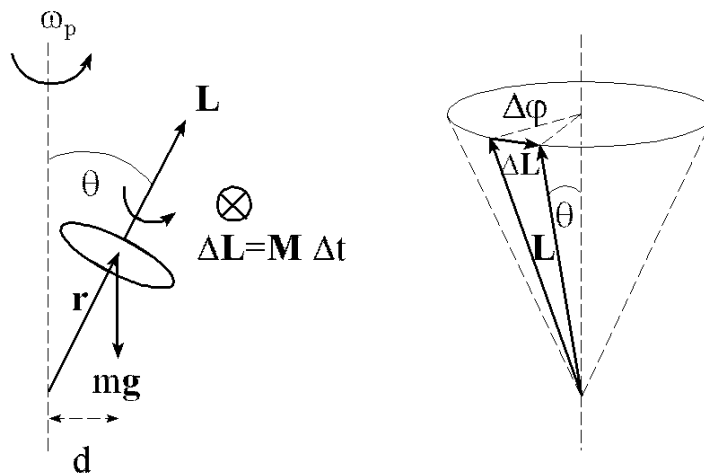
Istnieje bardzo ciekawy przykład ruchu obrotowego ciała wokół osi, która nie jest osią nieruchomą w inercjalnym układzie odniesienia. Jest to wszystkim dobrze znany z dzieciństwa ruch zabawki zwanej bakiem (żyroskopowym). Schematycznie ruch bąka przedstawiono na poniższym rysunku. W istocie moment pędu bąka ($\mathbf{L}$) „krąży” po powierzchni stożka o pionowej osi symetrii; kąt rozwarcia stożka wynosi θ . Ruch taki nazywamy ruchem precesyjnym.



Oś bąka (jak również moment pędu bąka $\mathbf{L}$) cały czas wiruje wokół osi pionowej. Zmiana położenia wektora $\mathbf{L}$ w przedziale czasu Δt wynosi $\Delta \mathbf{L}$, przy czym $\Delta \mathbf{L}$ jest w każdym momencie prostopadłe do $\mathbf{L}$; przyrost momentu pędu $\Delta \mathbf{L}$ wytwarzany jest przez moment siły $\mathbf{M}$ związany z siłą grawitacyjną. (Jest to sytuacja analogiczna do ruchu po okręgu, gdzie w każdym momencie przyrost prędkości $\Delta \mathbf{v}$ jest prostopadły do prędkości $\mathbf{v}$; przyrost prędkości $\Delta \mathbf{v}$ jest generowany w tym przypadku przez siłę dośrodkową).

Rozważmy ilościowy opis ruchu precesyjnego. Z zasady zachowania pędu:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \text{ lub też: } \mathbf{M} \cong \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t}, \text{ wynika stąd, że: } \Delta \mathbf{L} = \mathbf{M} \Delta t.$$



Wyliczmy prędkość kątową precesji ω_p (patrz powyższy rysunek):

$$\omega_p = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}; \text{ lecz: } \Delta \varphi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta} = \frac{M \Delta t}{L \sin \theta}.$$

Poszukiwana przez nas prędkość kątową precesji wynosi zatem:

$$\omega_p = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{M}{L \sin \theta} \quad (64)$$

Momentem siły ($\mathbf{M}$), który cały czas działa na precesujący bąk jest moment siły ciężkości; jego wartość wynosi $M = mgd = mgr \sin \theta$, gdzie: m jest masą bąka, g jest przyspieszeniem

grawitacyjnym, d jest ramieniem siły grawitacyjnej względem osi pionowej (z rysunku widać, że $d=r\sin\theta$). Wstawiając zatem wartość momentu siły ($M= mgr\sin\theta$) do ostatniego równania, otrzymujemy:

$$\omega_p = \frac{mgr}{L} \quad (65)$$

Widzimy z tego równania, że prędkość kątowna precesji jest odwrotnie proporcjonalna do momentu pędu bąka; a zatem im jest bąk jest masywniejszy i im szybciej wiruje wokół własnej osi – tym wolniejsza jest jego precesja.

Relacje na prędkość kątowną precesji możemy zapisać w ogólniejszy sposób. Zauważmy, że z Rów. 64 mamy: $M=\omega_p L\sin\theta$. Ponieważ kąt pomiędzy wektorami ω_p i L wynosi θ , więc równość tą możemy zapisać:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L} \quad (66)$$

Inne interesujące przykłady ruchu precesyjnego

Ruch precesyjny wykonuje także Ziemia. (Moment sił generujący ten ruch pochodzi m.in. od różnicy sił przyciągania grawitacyjnego obu półkul Ziemi przez Słońce; oś Ziemi jest bowiem cały czas pochylona względem płaszczyzny orbity wokółsłonecznej). Okres ruchu precesyjnego Ziemi wynosi 26 000 lat.

Ponadto ruch precesyjny wykorzystywany jest w żyroskopie. Elementy ruchu precesyjnego występują również podczas jazdy na rowerze; dzięki nim rowerzysta utrzymuje równowagę.

7.5 Analogie między ruchem postępowym i obrotowym

Jak widzieliśmy w poprzednich paragrafach, równania dla ruchu obrotowego mogą być uzyskane z równań dla ruchu postępowego poprzez analogię. Wystarczy w tym celu zamienić wielkości opisujące ruch postępowy odpowiadającymi im wielkościami, charakteryzującymi ruch obrotowy. W poniższej tabelce zestawiono odpowiadające sobie pary zmiennych:

RUCH POSTĘPOWY	RUCH OBROTOWY
Przemieszczenie (droga), x	Przemieszczenie kątowe, α
Prędkość, $v = \frac{dx}{dt}$	Prędkość kątowna, $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$
Przyspieszenie, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Przyspieszenie kątowe, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$
Masa, m	Moment bezwładności, I $I = \sum_i m_i r_i^2$ lub $I = \int_{V_0} r^2 dm$
Pęd, $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$	Moment pędu, $\mathbf{L}_{os}=I\boldsymbol{\omega}$
Siła, $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$	Moment siły, $\mathbf{M}_{os}=I\boldsymbol{\varepsilon}$

$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$	$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$
Energia kinetyczna, $E_k = \frac{mv^2}{2}$	Energia kinetyczna, $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$
Praca, $W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$	Praca, $W = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M(\alpha)d\alpha$
Moc, $P = \frac{dW}{dt}$ lub $P = Fv$	Moc, $P = \frac{dW}{dt}$ lub $P = M\omega$

8. Statyka ciał

Poznawszy już wielkości opisujące zarówno ruch postępowy jak i obrotowy, możemy sformułować ściśle warunki, jakie muszą być spełnione, aby ciało pozostawało w równowadze. Jest to warunek *statyki ciała*. Wyraża się on następująco:

$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \\ 2) \quad & \sum_i \mathbf{M}_i = 0 \end{aligned}$	(67)
--	------

Inaczej mówiąc, aby ciało pozostawało w równowadze, suma sił i momentów sił działających na ciało musi być równa zeru.

Uwagi końcowe: Pochodzenie zasad zachowania pędu, momentu pędu i energii mechanicznej

Na bazie nieco ogólniejszych rozważań można wykazać, że poznane przez nas zasady zachowania są konsekwencją podstawowych symetrii, które istnieją w otaczającym nas świecie. I tak:

a) Zasada zachowania pędu ($\mathbf{p}=\text{const}$, jeśli $\mathbf{F}=0$)

Zasada ta wynika z **jednorodności przestrzeni**. Inaczej mówiąc, jeśli *przesuniemy* nasz układ współrzędnych w przestrzeni, to równania praw fizyki (przyrody) w nim wyrażone nie ulegną zmianie.

b) Zasada zachowania momentu pędu ($\mathbf{L}=\text{const}$, jeśli $\mathbf{M}=0$)

Zasada ta wynika z **izotropii przestrzeni**. Jeśli *obrócimy* nasz układ współrzędnych w przestrzeni, to równania praw fizyki (przyrody) nie ulegną zmianie.

- c) Zasada zachowania energii mechanicznej ($E_k + E_p = \text{const}$, jeśli układ jest izolowany)

Zasada ta wynika z **jednorodności czasu**. Jeśli umowny moment chwili początkowej ($t=0$) w liczeniu czasu, *przesuniemy w przyszłość lub w przeszłość*, to równania praw fizyki (przyrody) nie ulegną zmianie.

Uwaga:

Trzeba tutaj zauważyć, że wspomniane przesunięcie w czasie w przeszłość powinno być mniejsze od czasu istnienia znanego nam Wszechświata (obecne modele kosmologiczne w zdecydowanej większości uznają, że znany nam Wszechświat powstał w tzw. Wielkim Wybuchu kilkanaście miliardów lat temu). Nie wiemy po prostu czy istniały i jakie były prawa fizyki przed Wielkim Wybuchem.