

8. Rekrytalizacja

Rekrytalizacja jest podstawowym procesem stosowanym do modyfikacji własności materiałów metalicznych po uprzednim odkształceniu plastycznym. Ta ostatnia przeprowadzana jest w celu zmiany kształtu ciała, ale powoduje ona równocześnie poważną modyfikację parametrów fizycznych charakteryzujących materiał. I tak, po odkształceniu plastycznym obserwuje się zwiększenie twardości, kruchości, oporu elektrycznego, a także wyraźną zmianę mikrostruktury objawiającą się „poszatkowaniem” i wyraźnym wydłużeniem ziaren oraz nagromadzeniem ogromnej ilości defektów. Na przykład gęstość dyslokacji może wzrosnąć po odkształceniu plastycznym o sześć rzędów wielkości. Jeśli te modyfikacje w mikrostrukturze materiału są niepożądane (w aspekcie przewidywanych jego zastosowań) to własności materiału modyfikuje się w procesie rekrytalizacji.

Rekrytalizacja prowadzi do drastycznej redukcji gęstości defektów, do powstania regularnych, dużych ziaren a także nowej, charakterystycznej tekstury krystalograficznej. Istotą procesu jest pojawienie się zarodków nowych ziaren w obrębie odkształconej osnowy (materiału po odkształceniu). Zarodki te szybko rozrastają się, dając początek nowym ziarnom i pochłaniają otaczający je odkształcony materiał. Trzeba tu zauważyć, że nowe ziarna (po rekrytalizacji) posiadają tę samą strukturę krystalograficzną co stare (po odkształceniu), a więc rekrytalizacja nie jest przemianą fazową w takim sensie jak się ją definiuje w fizyce ciała stałego. Interesującym faktem jest występowanie charakterystycznych relacji orientacji sieci krystalograficznych pomiędzy rosnącym nowym ziarnem a otaczającą go osnową. Ten fakt jest podstawą niektórych modeli opisujących przebieg rekrytalizacji.

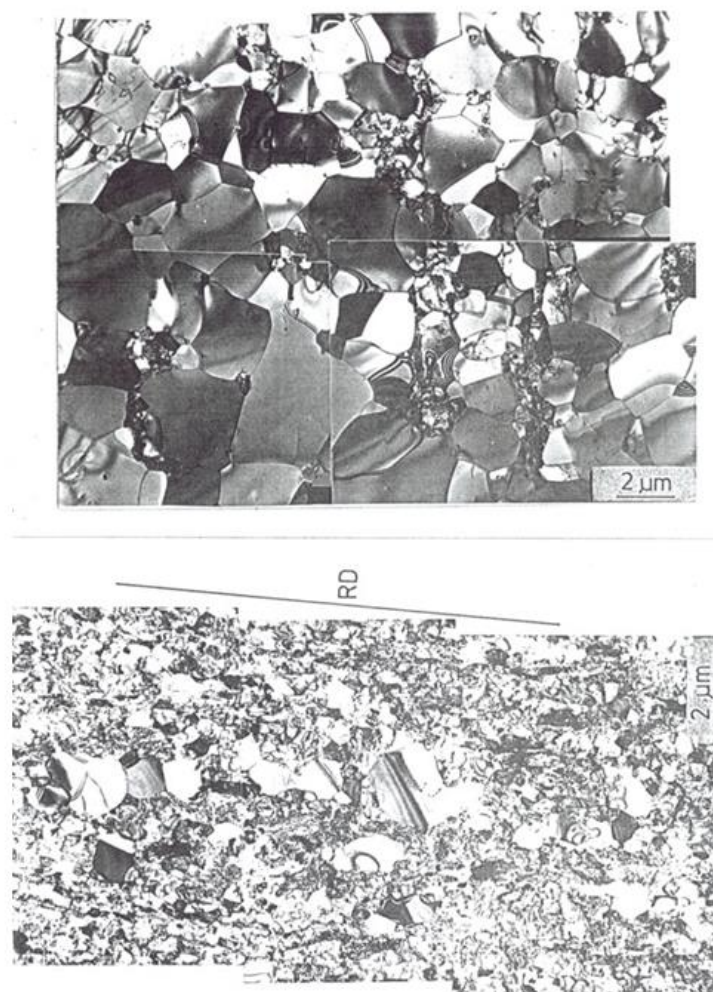
Porównanie mikrostruktury, a szczególnie struktury granic ziaren dla materiału po rekrytalizacji oraz przed rekrytalizacją (w tym przypadku po odkształceniu plastycznym) zestawiono na Rys. 8.1.

8.1. Podstawowe fakty

Zbierzmy podstawowe fakty dotyczące procesu rekrytalizacji.

Energia zgromadzona w odkształconym materiale

W materiale po odkształceniu plastycznym przeprowadzonym „na zimno”, zgromadzona jest energia pól dyslokacji (te ostatnie przejawiają się jako pole naprężeń wewnętrznych). Mówimy o odkształceniu plastycznym na zimno, gdy przeprowadzana ona jest w temperaturze $T \leq 0.4 T_{\text{topn}}$ (T_{topn} jest temperaturą topnienia materiału). Szacuje się, że około 10% pracy włożonej w proces odkształcenia plastycznego może pozostać w metalu jako energia zgromadzona. Przy odkształceniu w temperaturze pokojowej typowych materiałów metalicznych energia zgromadzona osiąga wartości 20-300 J/mol, zaś przy odkształceniu w temperaturze ciekłego azotu ($T=77.3$ K) energia ta może dochodzić do 800 J/mol.



Rys. 8.1. Porównanie struktury wewnętrznej materiału odkształconego (na dole) oraz po rekrytalizacji (u góry). Na dolnym rysunku widać już początek rekrytalizacji, zaś na górnym widać resztki obszarów niezrekrytalizowanych (zdjęcie z mikroskopu optycznego, udostępnione przez dr. hab. inż. M. Wróbla z Wydz. Inżynierii Metali i Informatyki Przemysłowej AGH).

Gęstości dyslokacji

Typowe wartości gęstości dyslokacji są następujące: w metalu przed odkształceniem (a także po rekrytalizacji): 10^6 - 10^8 cm^{-2} , zaś w metalu po dużym odkształceniu plastycznym: 10^{12} cm^{-2} . Tak więc, widzimy, że rekrytalizacja prowadzi do zmniejszenia gęstości dyslokacji o kilka rzędów wielkości (cztery do sześciu).

Energie swobodne

Energię swobodną definiujemy jako: $F = E - TS$, zaś jej przyrost: $\Delta F = \Delta E - T\Delta S$. W odkształconym materiale człon $T\Delta S$ można pominąć wobec ΔE , tak więc $\Delta F \approx \Delta E$. Podczas odkształcenia wykonujemy pracę, której część pozostaje w materiale jako energia zgromadzona; tak więc: $E_{\text{def}} > E_0$, jak również $F_{\text{def}} > F_0$, co jest zgodne z tym co powiedziano powyżej (wskaźnik „def” dotyczy materiału po odkształceniu, zaś wskaźnik „0”-materiału „odprężonego”, czyli zawierającego małą ilość defektów, bez naprężeń

wewnętrznych itp.). Jest oczywiste, że przy zaistnieniu sprzyjających warunków (aktywacja termiczna) materiał będzie dążył do powrotu do „stanu odprężonego”, gdyż odpowiada on niższej energii swobodnej. Ten właśnie proces nazywamy rekrytalizacją.

Wyzwalanie zmagazynowanej energii

Powrót do stanu odprężonego odbywa się podczas odpowiednio przeprowadzonego wygrzewania materiału. Na ogół zachodzi on w dwóch etapach zwanych odpowiednio: *zdrowieniem* i *rekrytalizacją*.

Zdrowienie zachodzi w niższej temperaturze niż rekrytalizacja (np. dla niklu $T_Z=220\text{ }^{\circ}\text{C}$, $T_R=600\text{ }^{\circ}\text{C}$; dla porównania $T_{\text{topn}}=1455\text{ }^{\circ}\text{C}$). Polega ono głównie na uporządkowaniu struktury defektów oraz ich częściowej wzajemnej anihilacji. Niemniej jednak podczas zdrowienia, struktura materiału nie ulega zasadniczej przebudowie.

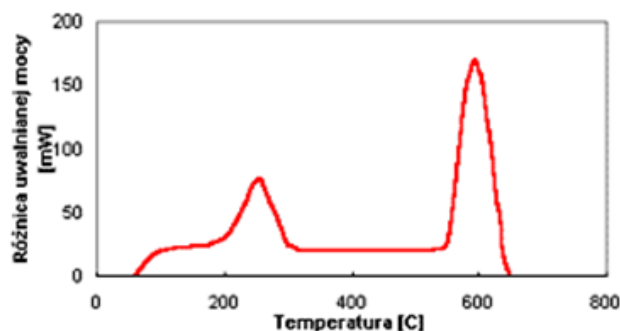
Rekrytalizacja prowadzi do powstania nowej struktury ziaren i ich granic oraz do radykalnego obniżenia koncentracji defektów punktowych i dyslokacji (tych ostatnich nawet o sześć rzędów wielkości). Rozróżnia się przy tym:

- *rekrytalizację pierwotną* (przebudowa odkształconej struktury i powstanie nowych ziaren; jest to tzw. normalny wzrost ziaren i jego siłą napędową jest energia zgromadzona),
- *rekrytalizację wtórną* (rozrost niektórych już odbudowanych ziaren kosztem innych; jest to tzw. rozrost anormalny, jego siłą napędową jest optymalizacja konfiguracji granic międzyziarnowych),
- *rekrytalizację trzeciorzędową* (zachodzi w pewnych materiałach i polega na dodatkowym rozroście ziaren usytuowanych przy powierzchni próbki wskutek różnic energii powierzchniowej, zależnej od orientacji sieci krystalicznej ziaren).

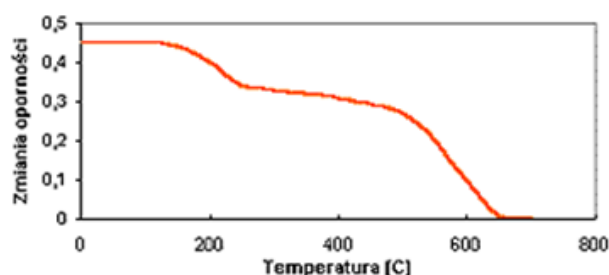
Omówimy teraz bardziej szczegółowo wymienione etapy.

8.2. Zdrowienie

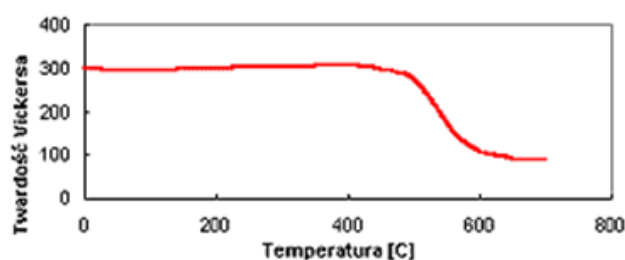
Przebieg procesów zachodzących w wygrzewanym materiale polikrystalicznym, który wcześniej poddany był znaczącemu odkształceniu plastycznemu, najlepiej ilustruje przykład wygrzewania niklu (Rys. 8.2); rysunek ten odtworzono na podstawie wyników opublikowanych w pracy: Decker i Harker, Trans. AIME, vol. 188, 887 (1950).



Rys. 8.2 a. Ciepło wydzielane z odkształconej plastycznie próbki niklu podczas wygrzewania (wzrost temperatury realizowany był ze stałą prędkością). Przedstawiono ciepło wyznaczone jest na podstawie różnicy uwalnianej mocy z próbki odkształconej i nieodkształconej.



Rys. 8.2 b. Zmiana oporności elektrycznej niklu podczas wygrzewania.

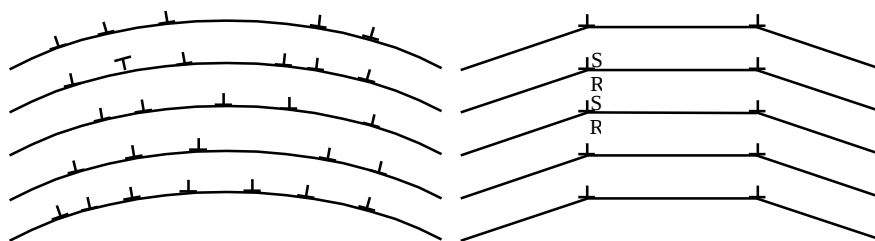


Rys. 8.2 c. Zmiana twardości niklu podczas wygrzewania (twardość wyznaczono metodą Vickersa).

W eksperymencie tym mierzone jest wydzielane przez próbkę ciepło (metodą kalorymetryczną) w funkcji temperatury; ta ostatnia jest zwiększana liniowo w funkcji czasu. Pierwszy (niższy) pik wydzielonego ciepła odpowiada zdrowieniu, podczas gdy drugi – rekrystalizacji. Widać, że zdrowienie jest procesem bardziej „rozmytym” w funkcji temperatury. Podczas zdrowienia dochodzi do częściowej anihilacji defektów przeciwnego znaku (np. rekombinacja atomów międzywęzłowych z lukami oraz dyslokacji o przeciwnych wektorach Burgersa), a także do reorganizacji przestrzennego rozkładu dyslokacji. Ten ostatni efekt znany jest pod nazwą poligonizacji (por. Rys. 8.3). Oba wspomniane zjawiska obniżają nagromadzoną energię sprężystą, pozostałą w próbce po odkształceniu plastycznemu. Poligonizacja prowadzi do zgrupowania dyslokacji w pewnych płaszczyznach, przez co powstają podziarna, różniące się między sobą orientacją sieci krystalicznej (różnice te są rzędu stopnia).

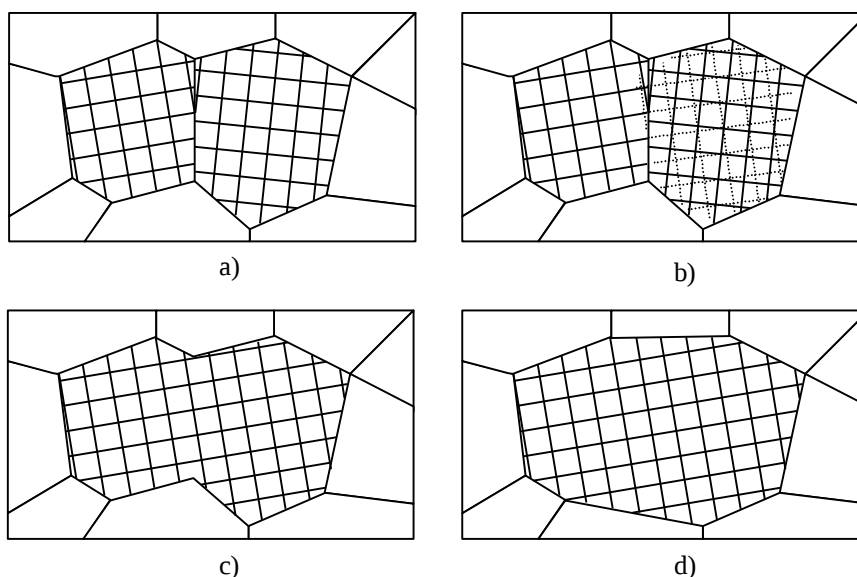
Wpływ procesu zdrowienia i rekrystalizacji na wybrane własności fizyczne próbki pokazany jest na Rys. 8.2 b i c. Przedstawiono na nich zmianę oporu elektrycznego i twardości mechanicznej. Widać, że podczas zdrowienia zachodzi już częściowo zmniejszenie oporu

elektrycznego, podczas gdy twardość zachowuje praktycznie stałą wartość. Natomiast obie te wielkości wyraźnie maleją podczas rekrytalizacji.



Rys. 8.3. Schematyczne przedstawienie procesu poligonizacji.

W trakcie dalszego zdrowienia możliwy jest także czasami zrastanie podziaren o małych różnicach orientacji sieci krystalograficznej (Rys. 8.4).



Rys. 8.4. Możliwy zrost ziaren o małym kącie dezorientacji podczas zdrowienia.

Zdrowienie jest przykładem zjawiska aktywowanego termicznie i w konsekwencji jego prędkość podlega prawu Arrheniusa:

$$\frac{1}{\tau_z} = A \exp(-Q_z/RT) \quad (8.1)$$

gdzie Q_z jest energią aktywacji, R jest stałą gazową, τ_z jest stałą czasową charakteryzującą prędkość zdrowienia, zaś temperaturę T wyrazić trzeba w stopniach Kelvina. Stała τ_z może być interpretowana jako czas potrzebny do uzyskania założonej procentowej zmiany (np. 50%) wybranej własności fizycznej, jeśli za 100% przyjąć zmianę jaką uzyska się w procesie zdrowienia trwającym nieskończenie długo. Własnością fizyczną, której zmiany charakteryzują tempo przebiegu zdrowienia, może być na przykład próg płynięcia

plastycznego. Stała czasowa τ_z zależy bardzo silnie od temperatury, w której zdrowienie zachodzi. I tak np. badając zdrowienie progu plastyczności dla cynku ($Q_z=80$ kJ/mol), znajduje się $\tau_z=5$ min w temperaturze $T=273$ K, natomiast w temperaturze $T=300$ K stała czasowa τ_z wyniesie tylko 0.3 min, zaś w $T=223$ K aż 17 dni.

8.3. Rekrytalizacja pierwotna

Jak już wspomniano, w trakcie rekrytalizacji dochodzi do całkowitej przebudowy struktury ziaren polikryształu i ich granic. Gęstość dyslokacji zostaje zredukowana o cztery do sześciu rzędów wielkości i w konsekwencji wiele własności fizycznych materiału zostaje poważnie zmodyfikowanych (twardość, ciągliwość, opór elektryczny, struktura domen magnetycznych i inne). Podobnie jak zdrowienie, rekrytalizacja jest procesem aktywowanym termicznie i jego prędkość wyraża się analogicznym prawem:

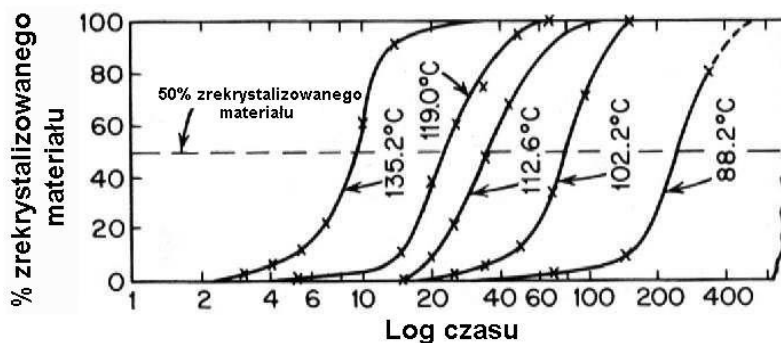
$$\frac{1}{\tau_R} = A \exp(-Q_R/RT) \quad (8.2)$$

Q_R jest energią aktywacji procesu rekrytalizacji pierwotnej (o wartości większej od energii aktywacji dla zdrowienia), zaś T wyrazić trzeba w stopniach Kelvina. Przykładowo dla niklu: $Q_R=170$ kJ/mol. Stałą czasową rekrytalizacji, τ_R , definiujemy jako czas, po którym połowa objętości materiału uległa rekrytalizacji ($f_V=1/2$). Definiuje się ponadto temperaturę rekrytalizacji T_R : jest to temperatura dla której $\tau_R=1$ h. Przykładowo, dla odkształconego niklu a także cyrkonu T_R wynosi około 600 °C (dla porównania temperatury topnienia tych metali wynoszą odpowiednio: 1453 °C oraz 1852 °C).

Rozważając bilans globalny objętości materiału, która została już zrekrystalizowana, jako funkcję czasu, dochodzi się do charakterystycznej zależności (w kształcie litery „S”) – Rys. 8.5. Tego typu zależność czasowa opisuje także wiele przemian fazowych. Matematycznie, opisana jest ona dobrze równaniem o nazwie JMAK (Johnson-Mehl-Avrami-Kolmogorov), które ma postać:

$$X_V = 1 - \exp(-Bt^n) \quad (8.3)$$

gdzie t jest czasem, zaś B i n są stałymi doświadczalnymi, dopasowywanymi dla danego materiału. Wyprowadzenie tego równania znajduje się w Dodatku 1, na końcu tego rozdziału..

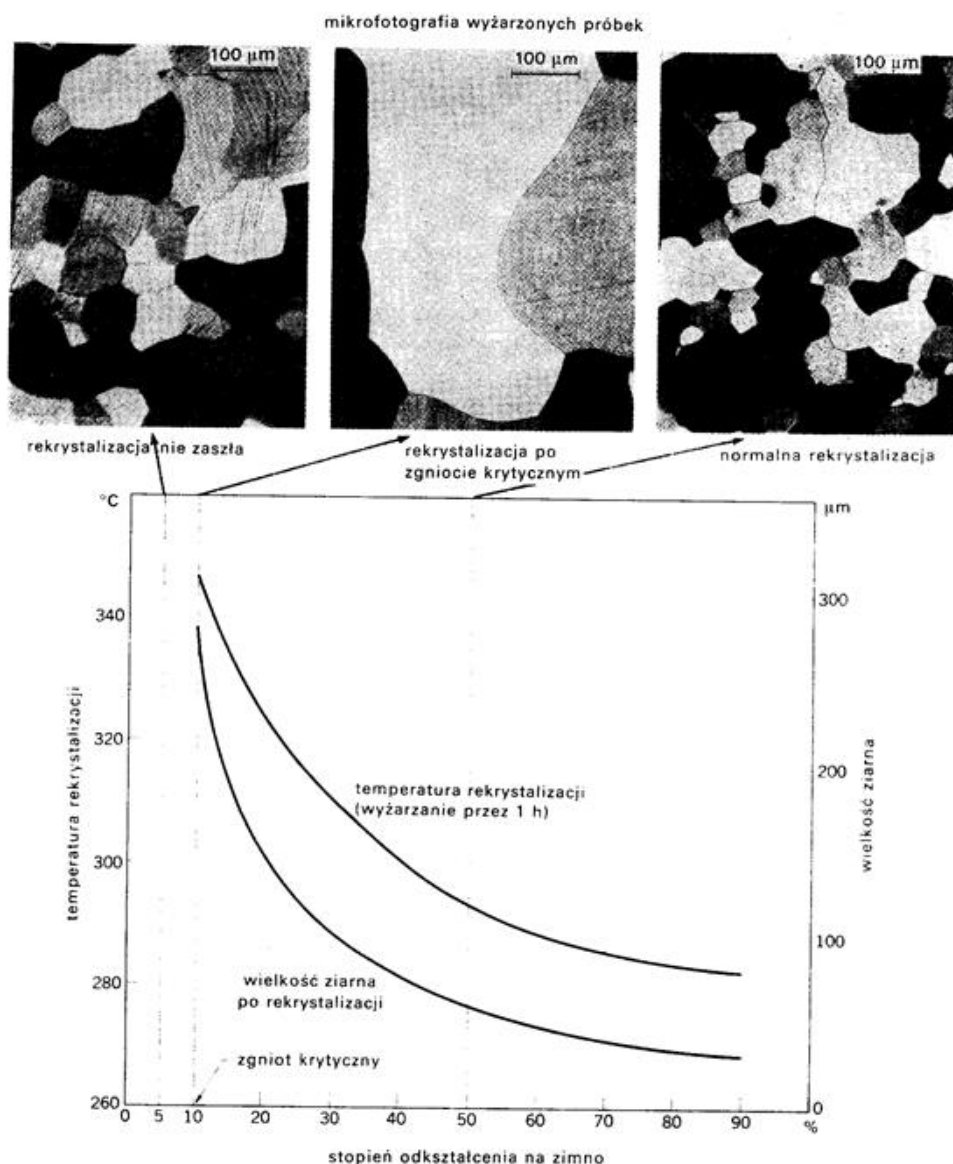


Rys. 8.5. Udział objętościowy zrekrystalizowanego materiału w funkcji czasu dla czystej miedzi (na podstawie pracy: Decker i Harker, Trans. AIME, vol. 188, 887 (1950))

Trzeba też dodać, że oprócz czasu i temperatury nagrzewania kilka innych czynników określa skłonność materiału do rekrytalizacji. Wśród nich najważniejszy jest stopień odkształcenia, którego doznał materiał (mierzony np. stopniem zgniotu); poniżej pewnego jego minimum (zwykle w zakresie od 1% do 20 % zgniotu) rekrytalizacja nie zachodzi nawet w temperaturach bliskich temperaturze topnienia, chociaż możliwe jest zejście zdrowienia. Ciekawostką jest, że istnieje tzw. zgniot krytyczny (np. 10% dla blachy aluminiowej), po którym w trakcie rekrytalizacji powstają szczególnie duże ziarna. Ogólnie, temperatura rekrytalizacji jak i wielkość uzyskanych ziaren zależą bardzo wyraźnie od stopnia wcześniejszego odkształcenia – Rys. 8.6.

Średni rozmiar nowo powstających ziaren podczas rekrytalizacji zależy także od stosunku N/G , gdzie N jest szybkością tworzenia zarodków, a G jest szybkością ich wzrostu.

Tworzenie zarodków jest jednym z dwóch podstawowych procesów w przebiegu rekrytalizacji (drugim jest wzrost nowych ziaren). Poniżej omówimy klasyczną teorię zarodkowania, która jest pogładowa, choć w przypadku rekrytalizacji jest tylko bardzo przybliżonym opisem.



Rys. 8.6. Wpływ stopnia zgniotu na temperaturę rekryształizacji oraz wielkość powstałych ziaren. Dane dla rekryształizowanej blachy aluminiowej o czystości 99.99 % (W.A. Anderson, Research Lab., Aluminium Company of America; patrz: A.G. Guy, Wprowadzenie do nauki o materiałach).

8.3.1. Powstawanie zarodków

Jeszcze dwadzieścia lat temu w opisie powstawania zarodków rekryształizacji rozważano teorię klasyczną, zaczerpniętą z opisu przemian fazowych. Podstawowe równanie tej teorii podaje zmianę energii swobodnej ΔF przy tworzeniu nowego kulistego zarodka o promieniu r :

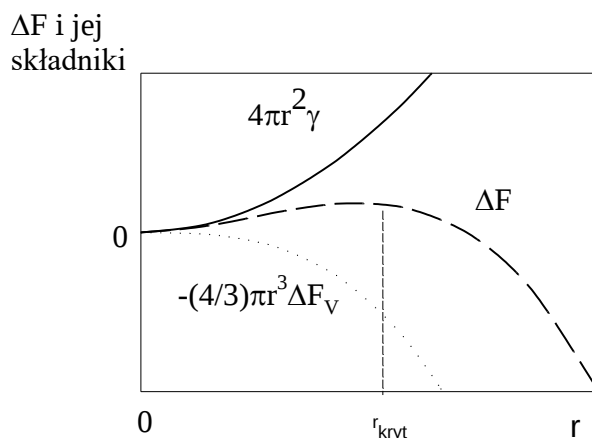
$$\Delta F = 4\pi r^2 \gamma - \frac{4}{3}\pi r^3 \Delta F_V \quad (8.4)$$

W równaniu tym γ oznacza energię jednostkowej powierzchni granicy zarodka, zaś ΔF_V – różnicę gęstości energii swobodnej między odkształconym metalem i zarodkiem. Wykres zależności ΔF_V oraz obu członów występujących w Równ. 8.4 od r przedstawiony jest na Rys.

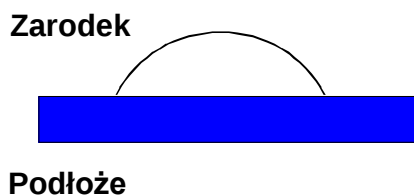
8.7. Widać, że ΔF osiąga maksimum dla pewnej wartości promienia r_{kryt} . Z warunku na maksimum dla prawej strony Równ. 8.4 otrzymujemy: $r_{\text{kryt}} = 2\gamma/\Delta F_v$. Podstawiając tę wartość do Równ. 8.4, wyliczyć możemy minimalną wartość energii $\Delta E \equiv \Delta F_{\text{min}}$, którą trzeba dostarczyć do układu, aby mógł powstać zarodek. Interpretacja przebiegu tworzenia zarodka jest następująca: do utworzenia zarodka, którego promień rośnie aż do wartości r_{kryt} konieczne jest dostarczanie energii, zaś powyżej rozmiaru krytycznego zarodek powiększa się już spontanicznie, wydzielając dodatkowo energię. O ile w przypadku wielu przemian fazowych uzasadnione jest założenie, że energia potrzebna do powstania zarodka dostarczana jest przez fluktuację termiczną, to w przypadku rekrytalizacji nie jest ono realistyczne, gdyż średnia fluktuacja termiczna nawet w $T = 1000 \text{ K}$ daje energię o kilka rzędów wielkości za małą. Niezgodność tę próbowano poprawić koncepcją zarodkowania niejednorodnego. Zakłada się w niej, że powstające zarodki nie posiadają kształtu pełnej kuli lecz czaszy kulistej i są osadzone na jakimś podłożu (np. na wydzieleniach drugiej fazy) – Rys. 8.8. W ten sposób wartość energii ΔE , która jest konieczna do utworzenia nowego zarodka jest znacznie obniżona, lecz i ta korekta nie jest wystarczająca.

Podsumowując możemy stwierdzić, iż jest mało prawdopodobne, aby zarodki rekrytalizacji powstawały zgodnie z klasyczną teorią fluktuacji. Proponuje się inne, bardziej „strukturalne” mechanizmy zarodkowania w rekrytalizacji, jak np., zarodkowanie przez wzrost podziaren czy przez migrację granic ziaren.

Ostatnio dominuje coraz częściej pogląd, że rolę zarodków o różnych orientacjach w próbce po odkształceniu odgrywają po prostu fragmenty ziaren czy podziaren; następnie niektóre z nich, posiadające korzystne warunki, rozrastają się.



Rys. 8.7. Energia swobodna w funkcji promienia dla sferycznego zarodka.



Rys. 8.8. Zarodkowanie niejednorodne.

8.3.2. Wzrost nowych ziaren

Napotyając korzystne warunki zarodek na ogół szybko rośnie. Podstawową „siłą motoryczną” tego wzrostu jest różnica energii swobodnej pomiędzy odkształconym materiałem a zarodkiem materiału zrekrytalizowanego. Pochodzi ona od różnicy gęstości dyslokacji a także od energii zgromadzonej w granicach ziaren „konsumowanego” materiału odkształconego (nowe, rosnące ziarno jest monokryształem, a więc nie ma wewnętrznych granic ziaren). Ponadto na dalszym etapie wzrostu, granice ziarna przyjąć mogą kształt wklęsły (por. Rys. 8.14), co dodatkowo faworyzuje wzrost (o czym będzie niżej). W szczególnych sytuacjach wystąpić może jeszcze jedna siła sprzyjająca wzrostowi; pochodzi ona od różnic energii powierzchniowej ziaren leżących na powierzchni próbki. Oprócz tych sił „napędzających” wzrost, występują również siły hamujące; pochodzą one od rowków termicznych oraz od cząstek wydzieleń drugiej fazy. Omówmy kolejno te siły.

Siły działające na granice ziaren

Ogólnie siłę działającą na granicę ziaren możemy przedstawić jako energię, która wydzieli się przy przejściu granicy przez jednostkę objętości materiału. Migracja granicy ziarna zachodzi wtedy, gdy prowadzi do obniżenia entalpii swobodnej G układu. Siła pędna działająca na granicę ziarna definiowana jest jako:

$$P = -\frac{dG}{dV} = -\frac{1}{S} \frac{dG}{dx} \quad (8.5)$$

gdzie V jest objętością, S – powierzchnią elementu granicy, zaś dx - jego przemieszczeniem (prostopadłym do powierzchni). Jest to, zatem siła przypadająca na jednostkę powierzchni granicy, a jej „źródłem” jest uwalniana energia. Poniżej omówimy kolejno rodzaje tych sił.

Siła od różnicy gęstości dyslokacji

Pochodzi ona bezpośrednio od różnicy gęstości dyslokacji po obu stronach granicy. W teorii dyslokacji wykazuje się, że obecność w materiale dyslokacji prowadzi do powstania pól naprężeń, a zatem do wykreowania tzw. energii zgromadzonej; jest ona proporcjonalna do gęstości zgromadzonych dyslokacji ρ . Siła pochodząca od różnicy gęstości dyslokacji wynosi:

$$P_\rho = \alpha G b^2 (\rho_0 - \rho_1) \quad (8.6)$$

gdzie ρ_0 jest gęstością dyslokacji w materiale po odkształceniu, zaś ρ_1 jest gęstością dyslokacji w materiale zrekrytalizowanym (oczywiście $\rho_0 \gg \rho_1$), G jest modułem sztywności, b – modułem wektora Burgersa, zaś α jest współczynnikiem fenomenologicznym ($0.1 < \alpha < 1$, w zależności od materiału). Typowa wartość tej siły wynosi $P_\rho = 10^7 \text{ N/m}^2$.

Siła od różnicy gęstości granic ziaren

Rosnące ziarno jest monokryształem, zaś pochłaniana osnowa – polikryształem, o bardzo drobnych na ogół ziarnach. Pomiędzy nimi występuje duża różnica gęstości granic, co prowadzi do występowania siły:

$$P_{gz} = \frac{1.45\gamma_{gz}}{R_0} \quad (8.7)$$

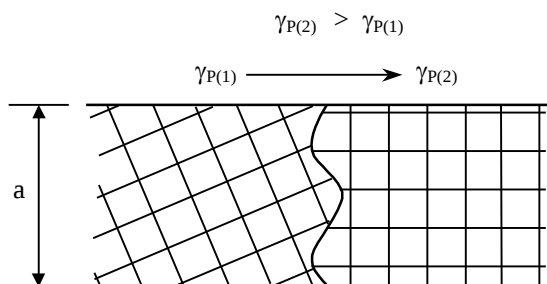
gdzie γ_{gz} jest energią właściwą powierzchni granicy ziarna (tzn. przypadającą na jednostkę jej powierzchni), zaś R_0 jest średnim promieniem ziaren osnowy. Dla $R_0=0.01$ mm, $\gamma_{gz}=500$ mJ/m² siła ta ma wartość $P_{gz}=0.7 \cdot 10^5$ N/m².

Siła od różnicy energii powierzchni

W próbkach bardzo cienkich mogą występować dodatkowe siły, związane z różnicami energii powierzchniowej sąsiednich ziaren ($\Delta\gamma_p$). W parze sąsiadujących ziaren, wskutek różnych orientacji ich sieci krystalicznych, do powierzchni próbki równoległe są różne płaszczyzny krystalograficzne, np. $(h_1k_1l_1)$ i $(h_2k_2l_2)$ – Rys. 8.9. Wynika stąd różnica energii swobodnej $\Delta\gamma_p$ (na jednostkę powierzchni), która jest odpowiedzialna za siłę usiłującą przesunąć granicę między dwoma wspomnianymi ziarnami tak, aby powiększyć objętość ziarna o mniejszej energii powierzchniowej. Siła ta wynosi:

$$P_p = \frac{2\Delta\gamma_p}{a} \quad (8.8)$$

gdzie a jest grubością próbki. Dla $a=0.01$ mm i $\Delta\gamma_p=50$ mJ/m² otrzymujemy wartość siły $P_p=10^4$ N/m².



Rys. 8.9. Dwa ziarna o różnych orientacjach sieci krystalicznej w cienkiej próbce; $(h_1k_1l_1)$ i $(h_2k_2l_2)$ są płaszczyznami krystalograficznymi równoległymi do powierzchni w każdym z ziaren, zaś a jest grubością próbki.

Siła ta może odgrywać dużą rolę w formowaniu końcowej tekstury rekrytalizacji, szczególnie na etapie rekrytalizacji trzecio-rzędowej.

Siły omawiane do tego momentu były na ogół siłami aktywnymi, tzn. „napędzającymi” ruch granic.

Istnieją jednak też siły **hamujące wzrost ziaren**. Pochodzą one od krzywizny granicy ziarna, rowków termicznych, oddziaływania atomów domieszki z granicą ziaren oraz cząstek wydzielen drugiej fazy. Omówimy trzy z nich.

Siła od krzywizny granic ziaren

Wygięte powierzchnie granic ziaren dążą w kierunku ich środka krzywizny. Jest to dążenie do zmniejszenia powierzchni granicy, gdyż z powierzchnią wiąże się dodatkowa energia (taki sam efekt występuje w przypadku baniek mydlanych) – Rys. 8.10. Siła związana z krzywizną powierzchni granicy ziarna wynosi:

$$P_R = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{d(4\pi R^2 \gamma_{gz})}{dR} = \frac{2\gamma_{gz}}{R} \quad (8.9)$$

gdzie γ_{gz} jest energią właściwą powierzchni granicy ziarna, zaś R jest promieniem krzywizny granicy. Dla typowych wartości parametrów ($R=0.01$ mm, $\gamma_{gz}=500$ mJ/m²), siła ta wynosi: $P_R=10^5$ N/m².

Omawiana tutaj siła hamuje wzrost ziaren, jeśli mają kształt wypukły - dzieje się tak na ogół podczas rekrytalizacji pierwotnej. Może ona jednak sprzyjać dalszemu rozrostowi zrekrystalizowanych już ziaren, jeśli mają one wklęsłe granice. Dzieje się tak często podczas rekrytalizacji wtórnej.



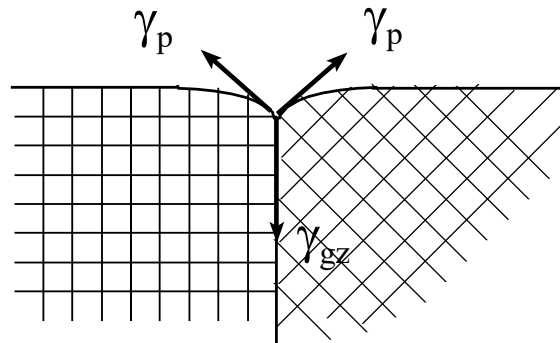
Rys. 8.10. Siła od krzywizny granicy.

Siły od rowków termicznych

W trakcie wygrzewania, granice ziaren dochodzą do powierzchni próbki i powstają charakterystyczne wgłębienia zwane rowkami termicznymi (patrz. Rys. 8.11). Granica ziarna oraz fragmenty powierzchni próbki wytwarzają typowy układ równowagi sił. Jest oczywiste, że przesuwanie takiej granicy ziarna w kierunku, np. równoległym do powierzchni próbki, napotyka na opór, gdyż wraz z granicą „wleczony” musi być też i rowek. Szacuje się, że siła ta wynosi:

$$P_{rt} = \frac{\gamma_{gz}^2}{a\gamma_p} \quad (8.10)$$

gdzie a jest grubością próbki, γ_p jest energią jednostkowej powierzchni próbki, zaś γ_{gz} oznacza energię właściwą granicy ziarna. Dla wartości: $a=0.1$ mm, $\gamma_{gz}=500$ mJ/m², $\gamma_p=1000$ mJ/m² siła ta wynosi $P_{rt}=2.5 \times 10^3$ N/m².



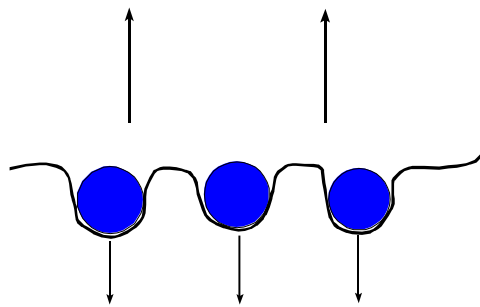
Rys. 8.11. Powstanie rowka termicznego przy dojściu granicy ziarna do powierzchni; γ_p – oznacza energię powierzchniową (na jednostkę powierzchni), γ_{gz} – energię granicy ziaren (na jednostkę powierzchni). Z energiami powierzchniowymi γ związane są odpowiednie siły „napięcia powierzchniowego” granic (w punkcie złączenia trzech granic siły te równoważą się).

Siły od cząstek wydzielen drugiej fazy

Przesuwaniu się granic ziarnowych przeszkadzać mogą także cząstki drugiej fazy obecne w materiale. Siłę hamującą pochodzącą od tych cząstek oszacować można wyrażeniem:

$$P_w = \frac{3\gamma_{gz}}{2r} f_v \quad (8.11)$$

gdzie r jest średnim promieniem cząstek drugiej fazy, a f_v jest udziałem objętościowym drugiej fazy. Dla typowych wartości: $r=1 \mu\text{m}$, $\gamma_{gz}=500 \text{ mJ/m}^2$, $f_v=1 \%$ siła ta wynosi $P_w=7.5 \times 10^3 \text{ N/m}^2$.

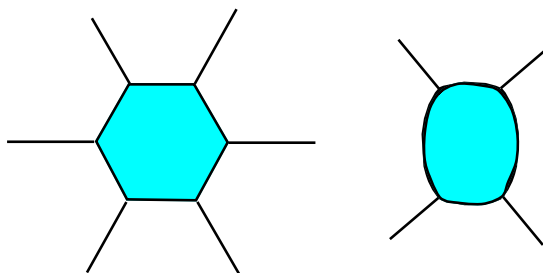


Rys. 8.12. Hamowanie granicy ziarna przez cząstki drugiej fazy

8.4. Rekrystalizacja wtórna

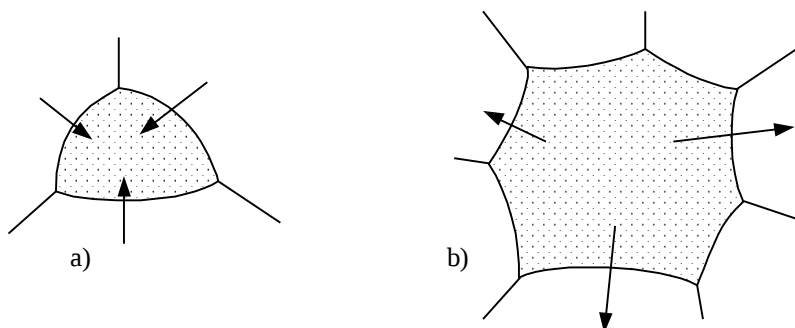
Podczas rekrystalizacji pierwotnej powstają zarodki nowych ziaren, następnie rosną one, aż cała objętość materiału odkształconego zostanie zastąpiona materiałem zrekrystalizowanym, w którym koncentracja defektów (głównie dyslokacji) została zredukowana np. o kilka rzędów wielkości. Poza tym rozmiar ziaren wydatnie wzrósł, a struktura granic stała się regularna (w znaczeniu statystycznym). Obserwując powierzchnię próbki w mikroskopie optycznym zaobserwujemy najczęściej ziarna o przekroju pięcio- lub sześciokątnym. W tzw. punktach potrójnych, w których stykają się granice sąsiadujących ziaren musi być spełniony

warunek równowagi sił. Istnieje tendencja statystyczna do tworzenia połączeń trzech granic tworzących między sobą 120^0 . Typowe kształty ziaren pokazano poniżej.

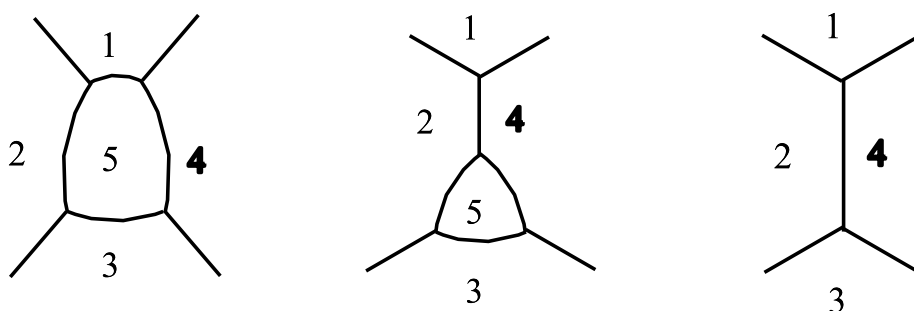


Rys. 8.13. Równowagowe kształty ziaren. W ziarnie czworokątnym doszło do wygięcia granic, tak aby tworzyły one między sobą 120^0 , tak jak ma to miejsce w sposób naturalny w ziarnie sześciokątnym.

Okazuje się jednak, że po etapie pierwotnego wzrostu ziaren, przebudowa mikrostruktury materiału może mieć dalszy ciąg. Pewne, już zrekrytalizowane, ziarna mogą rosnąć dalej pochłaniając inne, także zrekrytalizowane ziarna. Ten dodatkowy wzrost występuje dla ziaren mających wklęsłe (patrząc od zewnątrz) granice ziaren (Rys. 8.14); najczęściej wystąpi to dla ziaren mających więcej niż sześć boków. Jak widzieliśmy wcześniej, na granice działa siła w kierunku ich środka krzywizny (Równ.8.7), a w tym przypadku środek ten znajduje się na zewnątrz. Stwierdzono, że jeśli promień krzywizny granicy jest w pewnym przedziale: $R_{kr1} < R < R_{kr2}$, to ziarno pozostaje stabilne. Jeśli $R < R_{kr1}$ wystąpi tendencja do zmniejszania rozmiaru ziarna, natomiast dla $R > R_{kr2}$ ziarno zaczyna rosnąć. Przykładową dwuwymiarową geometrię zmiany kształtu granic, przy jednoczesnym zanikaniu ziarna o granicach wypukłych, pokazano na Rys. 8.15.



Rys. 8.14. Rozrost ziarna podczas rekrystalizacji wtórnej. Ziarna o wypukłych granicach kurczą się, zaś ziarna z granicami wklęsłymi – rozrastają się.



Rys. 8.15. Przykładowa zmiana konfiguracji granic ziaren (w dwóch wymiarach) podczas rekrystalizacji wtórnej.

8.4.1. Prawo rozrostu ziaren

Średni rozmiar ziaren (charakteryzowany przez średnicę D) odgrywa ważną rolę we własnościach makroskopowych materiału. Na przykład materiał drobnoziarnisty ma większą twardość oraz wytrzymałość mechaniczną niż materiał o dużych ziarnach. Spróbujmy wyprowadzić zależność średniej wielkości ziaren w funkcji czasu (t) podczas rekrytalizacji wtórnej.

Przyjmując, że szybkość wzrostu ziarna (a zatem szybkość ruchu granicy) jest odwrotnie proporcjonalna do D , otrzymujemy:

$\frac{dD}{dt} = \frac{K'}{D}$, co po scałkowaniu daje: $D^2 - D_0^2 = K'' t$ (K' i K'' są stałymi). Na ogół końcowa średnica ziaren (D) jest dużo większa od początkowej (D_0), co dodatkowo upraszcza relację na D :

$$D = Kt^{0.5} \quad (8.12)$$

Wyniki obserwacji doświadczalnych najlepiej opisuje zależność:

$$D = Kt^n \quad (8.13)$$

Dla większości materiałów wykładnik n jest mniejszy od 0.5 i zwykle rośnie z temperaturą, zbliżając się do tej wartości.

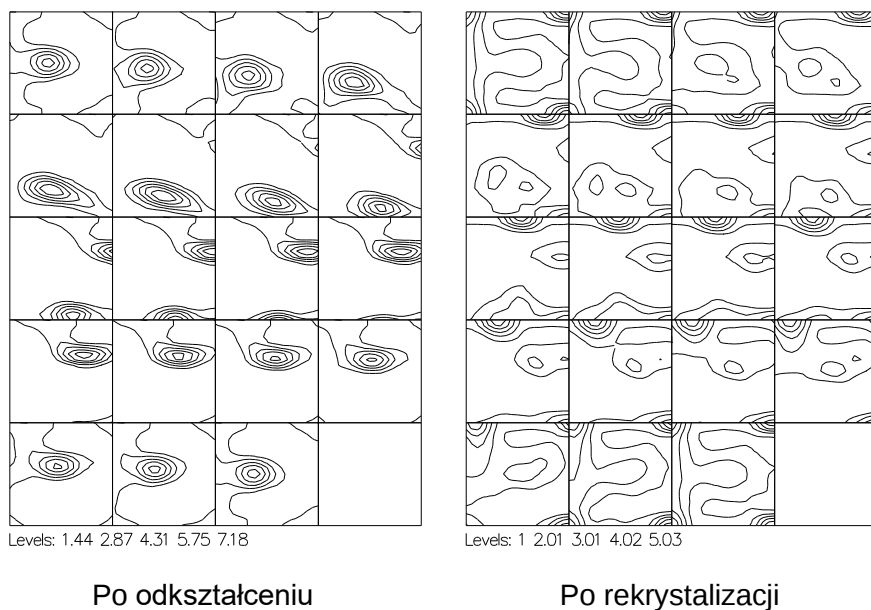
8.4. Rekrytalizacja trzeciorzędowa

Okazuje się, że w pewnych materiałach etap rekrytalizacji wtórnej nie jest ostatnim. W próbkach cienkich (o grubości porównywalnej z rozmiarem ziaren) znaczącą rolę odgrywa siła pochodząca od różnicy energii swobodnej zewnętrznej powierzchni (Równ. 8.8, Rys. 8.10). W procesie tym ziarna mające niższą energię powierzchniową rozrastają się kosztem sąsiadów o energii wyższej. Ten etap porządkowania kształtów ziaren i ich orientacji krystalograficznej nazywamy rekrytalizacją trzeciorzędową. Proces ten, mający znaczenie przede wszystkim w próbkach cienkich, może prowadzić do radykalnej modyfikacji tekstury krystalograficznej materiału.

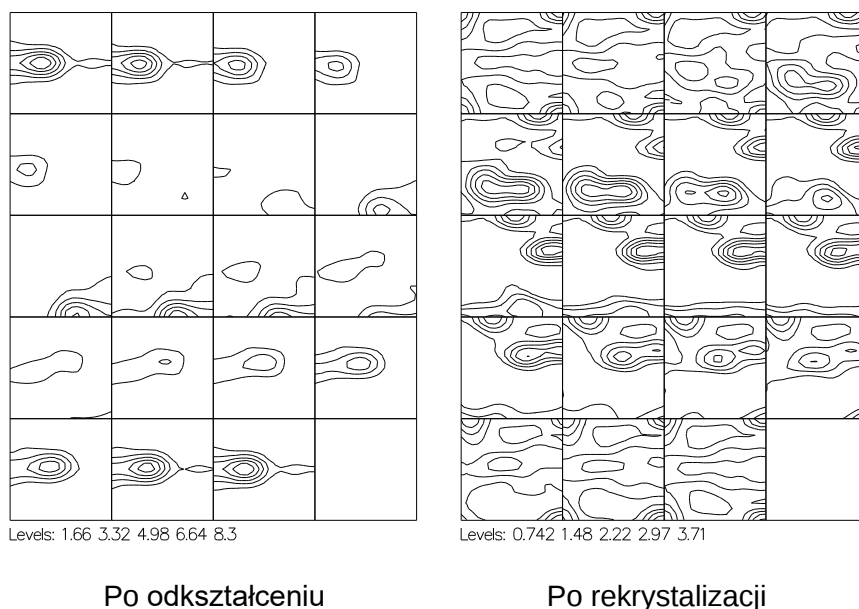
8.5 Zmiany tekstury podczas rekrytalizacji

Proces gruntownej przebudowy struktury materiału, jakim jest rekrytalizacja, pociąga za sobą na ogół radykalną zmianę tekstury materiału polikrystalicznego. Na Rys. 8.16 zestawiono teksturę walcowania blachy miedzianej z powstałą z niej teksturą rekrytalizacji. Obie tekstury są radykalnie różne. Tekstura rekrytalizacji miedzi jest szczególnie charakterystyczna, gdyż zawiera praktycznie jedną, w tym wypadku bardzo silną składową, a mianowicie orientację sześcienną $\{001\}\langle 100 \rangle$. Tekstury rekrytalizacji w innych metalach i stopach o strukturze regularnej płasko centrowanej (struktura A1), jak np. w mosiądzu, są bardziej złożone niż tekstura miedzi (patrz Rys. 8.17), ale wszystkie one mają wspólną cechę, a mianowicie ich tekstury rekrytalizacji są drastycznie różne od tekstur walcowania. W

Tabelach 8.1 i 8.2 zestawiono najczęściej spotykane składowe idealne tekstury walcowania i rekrytalizacji metali o sieci A1.



Rys.8.16. Tekstura walcowania i rekrytalizacji dla miedzi (przekroje przez przestrzeń kątów Eulera dla $\varphi_2=0^0, 5^0, 10^0 \dots 90^0$).



Rys.8.17. Tekstura walcowania i rekrytalizacji dla mosiądzu (przekroje przez przestrzeń kątów Eulera dla $\varphi_2=0^0, 5^0, 10^0 \dots 90^0$).

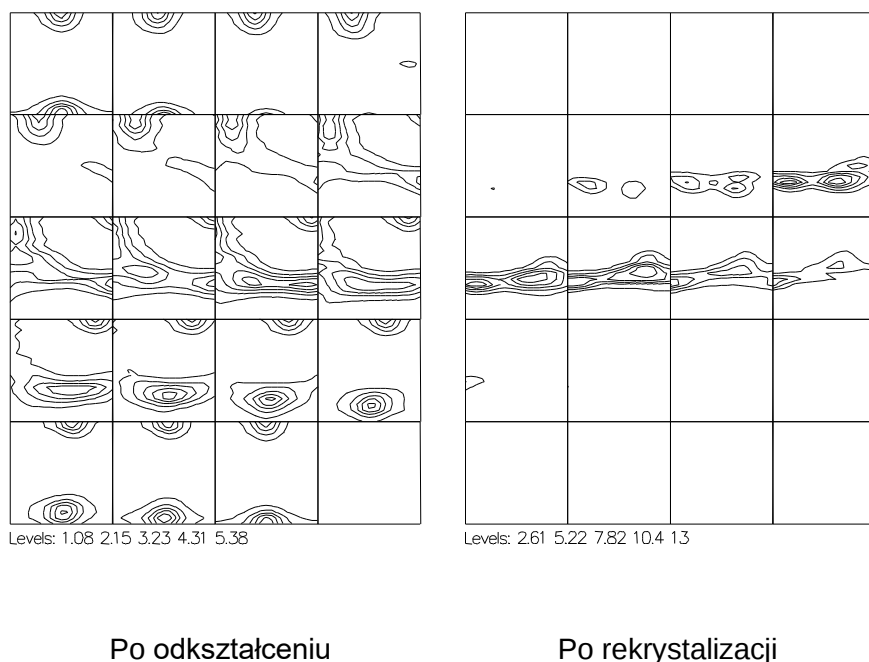
Tab. 8.2. Składowe tekstury rekrytalizacji w metalach o sieci Al .

Typ składowej tekstury i jej symbol	$\{hkl\}$	$\langle uvw \rangle$	φ_1	ϕ	φ_2
Miedź, C	112	111	90	35	45
S	123	634	59	37	63
Goss, G	011	100	0	45	90
Mosiądz, B	011	211	35	45	90

Tab. 8.1. Składowe tekstury odkształcenia w walcowanych na zimno metalach o sieci Al .

Typ składowej tekstury i jej symbol	$\{hkl\}$	$\langle uvw \rangle$	φ_1	ϕ	φ_2
Sześcienna	001	100	0	0	0
-	236	385	79	31	33
Goss, G	011	100	0	45	90
S	123	634	59	37	63
P	011	122	70	45	0

Inaczej ma się sprawa w przypadku metali o strukturze regularnej przestrzennie centrowanej (A2). Tutaj tekstura rekrytalizacji jest pewną modyfikacją początkowej tekstury odkształcenia (Rys. 8.18).

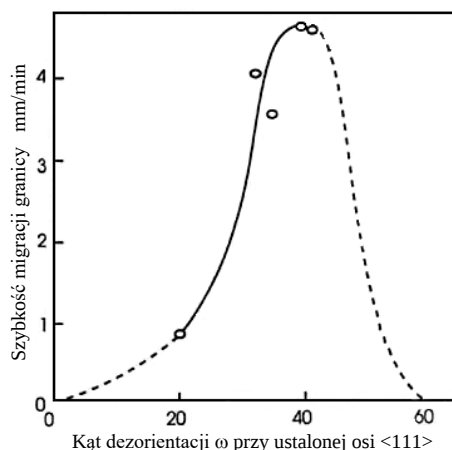


Rys. 8.18. Tekstura walcowania i rekrytalizacji dla stali (przekroje przez przestrzeń kątów Eulera dla $\varphi_2=0^0, 5^0, 10^0 \dots 90^0$).

W ogólności tekstura krystalograficzna oraz jej zmiana jest bardzo czułym parametrem, przy pomocy którego możemy weryfikować poprawność naszych wyobrażeń i modeli opisujących rozmaite procesy w materiale, jak np. odkształcenie plastyczne, rekrytalizacja czy przemiany fazowe. O powstawaniu charakterystycznej tekstury odkształcenia oraz jej przewidywaniu przez modele odkształcenia była mowa w Rozdz. 7. Okazuje się, że również w przypadku rekrytalizacji dysponujemy pewną ilością modeli teoretycznych, które opisują przebieg

samemu procesowi, a przy okazji również umożliwiają przewidywanie wynikłych zeń tekstur rekryształizacji. Na ogół porównanie tekstur wyliczonych ze zmierzonymi jest dobrym testem poprawności teorii. Omówimy teraz krótko modele powstawania tekstur rekryształizacji w materiałach o sieciach A1 i A2.

Stwierdzono doświadczalnie, że w metalach i stopach o strukturze A1 dominującą rolę w opisie mechanizmu rekryształizacji odgrywa zależność ruchliwości granicy międzyziarnowej od orientacji wzajemnej dwóch sąsiadujących ziaren. Zależność tę w materiałach A1 po raz pierwszy opisali Liebmann, Lücke i Masing (1956). Okazuje się, że ruchliwość granic ziaren jest największa dla tych par ziaren, które posiadają charakterystyczne orientacje wzajemne (zwaną dalej *dezorientacją*). Dezorientację najłatwiej jest scharakteryzować jako obrót wokół pewnej osi ($\mathbf{r}$) o określony kąt (ω), który sprowadza sieć krystaliczną jednego ziarna do sieci drugiego. W przypadku omawianych materiałów, najszybciej przemieszczają się granice międzyziarnowe (co prowadzi do szybkiego wzrostu jednego z ziaren) dla dezorientacji określonej osią obrotu $\mathbf{r} = \langle 111 \rangle$ i kątem obrotu $\omega = 40^\circ$. Ten właśnie wynik jest treścią wspomnianej powyżej pracy – Rys. 8.19. Omówione tu podejście do procesu rekryształizacji nazywa się hipotezą *zorientowanego wzrostu*. Zakłada się w nim, że na początku rekryształizacji pojawiają się losowo w próbce zarodki nowych ziaren (zrekryształizowanych). Jednak dopiero napotkanie przez dany zarodek sprzyjającej dezorientacji z którymś z otaczających go ziaren materiału odkształconego powoduje jego wzrost (zarodka) i równocześnie pochłanianie otaczającego materiału (osnowy). Dokonując pewnego skrótu myślowego możemy mówić o rosnącej „fazie zrekryształizowanej” kosztem „fazy odkształconej”. Trzeba jednak pamiętać o tym, że rekryształizacja nie jest przemianą fazową, choć istnieją tu pewne podobieństwa.



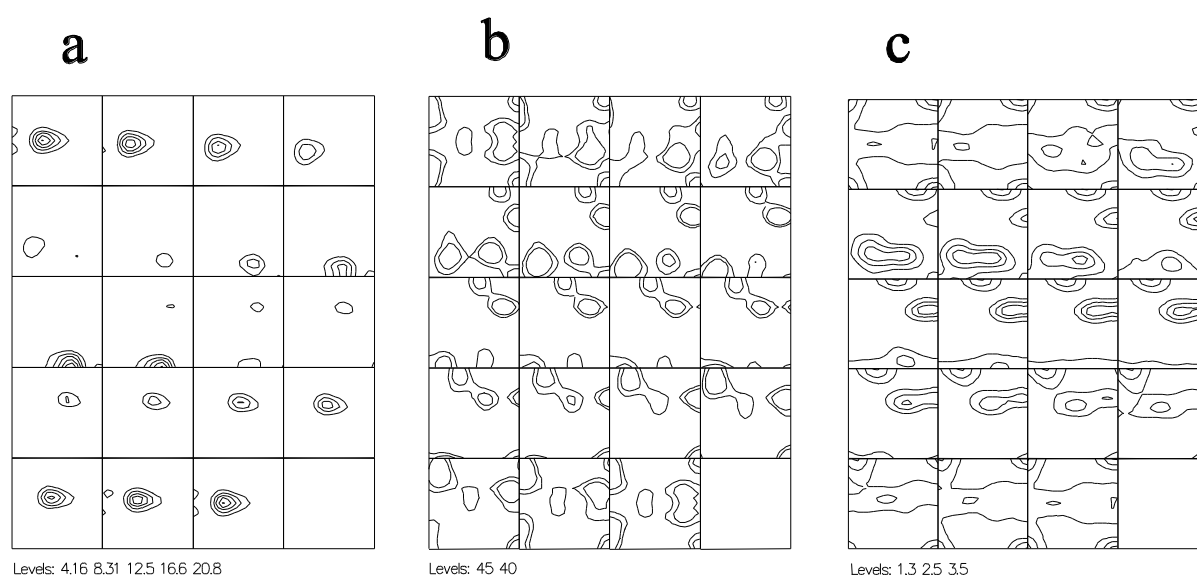
Rys.8.19. Zależność szybkości migracji granicy ziaren od kąta dezorientacji ω przy ustalonej osi obrotu $\langle 111 \rangle$ (na podstawie pracy: B. Liebmann, K. Lücke and G. Masing, Zeit. Metallkde, Vol. 47, 57 (1956))

Opierając się na opisanej powyżej hipotezie zorientowanego wzrostu stworzono modele obliczeniowe umożliwiające przewidywanie rozwoju tekstury rekryształizacji w materiale posiadającym wyjściową teksturę (i strukturę) pozostałą po procesie odkształcenia plastycznego (np. Sztwiertnia, 1996). Przy pomocy modelu wyliczono tzw. funkcję kompromisu, $S(g)$, która podaje jaką część objętości odkształconej próbki może pochłonąć zarodek o danej orientacji g ; funkcja ta podaje zdolność jednoczesnego wrastania zarodka w

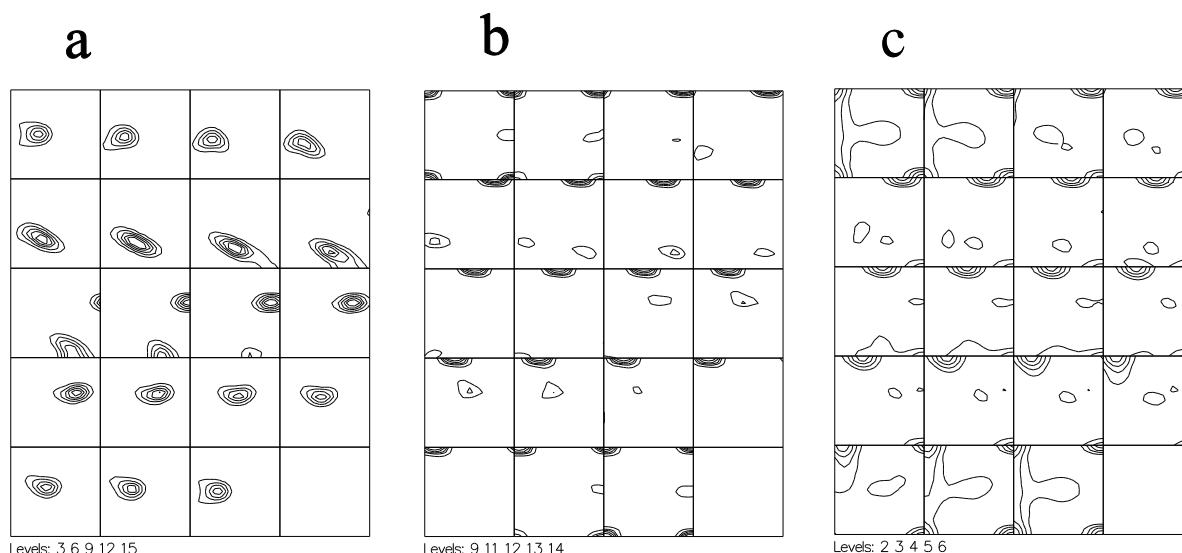
wiele ziaren odkształconej próbki. Maksima funkcji $S(g)$ odpowiadać powinny zatem maksimum tekstury rekrytalizacji.

Zestawienie tekstury walcowania, funkcji $S(g)$ oraz tekstury rekrytalizacji dla msiądzu przedstawiono na Rys. 8. 20. W tym wypadku użyto relacji dezorientacji opisanej obrotem 40° wokół osi $\langle 111 \rangle$. Zgodność między wyliczoną funkcją $S(g)$ i teksturą rekrytalizacji msiądzu jest bardzo dobra.

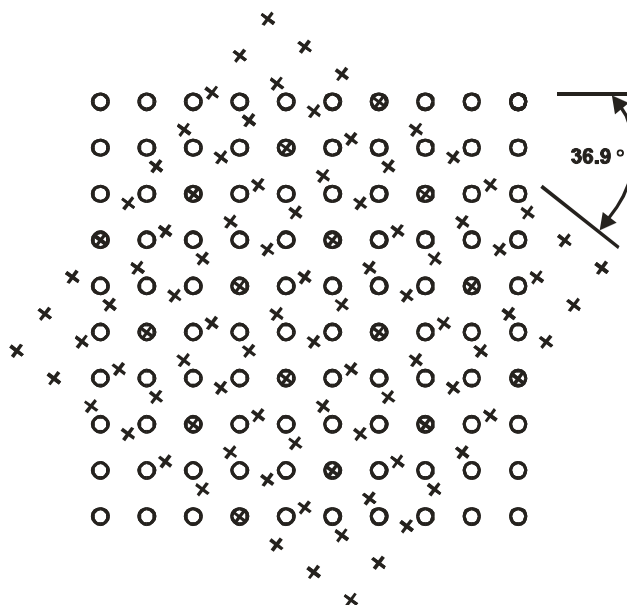
W przypadku rekrytalizacji miedzi użyto nieco innej relacji dezorientacji, mianowicie obrotu o 46.8° wokół osi $\langle 111 \rangle$. Relacja ta wynika z definicji granicy koincydentnej (Rys. 8.22, Tab. 8.3); granice takie także wyróżniają się dużą ruchliwością. Również i w tym przypadku zgodność pomiędzy funkcją $S(g)$ a teksturą rekrytalizacji (miedzi) jest bardzo dobra.



Rys. 8.20. Obliczenia modelowe zmian tekstury msiądzu podczas rekrytalizacji: a) modelowa tekstura walcowania, b) wyliczona „funkcja kompromisu” wskazująca , gdzie powinny pojawić się maksima tekstury po rekrytalizacji, c) zmierzona tekstura rekrytalizacji; (przekroje przez przestrzeń kątów Eulera przy $\varphi_2=0^\circ, 5^\circ, 10^\circ \dots 90^\circ$). Funkcję kompromisu wyliczono w oparciu o relację orientacji: 40° wokół osi $\langle 111 \rangle$.



Rys. 8.21. Obliczenia modelowe zmian tekstury miedzi podczas rekrytalizacji: a) modelowa tekstura walcowania, b) wyliczona „funkcja kompromisu” wskazująca, gdzie powinny pojawić się maksima tekstury po rekrytalizacji, c) zmierzona tekstura rekrytalizacji; (przekroje przez przestrzeń kątów Eulera przy $\varphi_2=0^0, 5^0, 10^0 \dots 90^0$). Funkcję kompromisu wyliczono w oparciu o relację orientacji: 46.8^0 wokół osi $\langle 111 \rangle$ (granica koincydentna typu $\Sigma=19$ b).



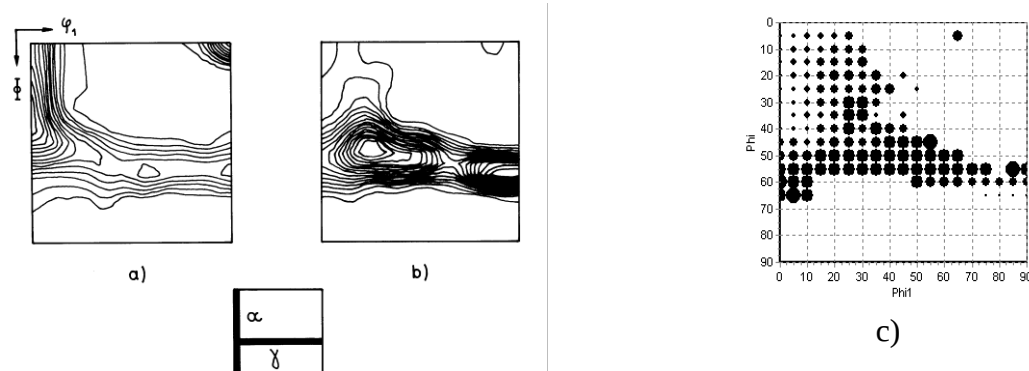
Rys. 8.22. Granica skręcona typu koincydentnego. Obie sieci obrócone są względem siebie o 36.9^0 wokół kierunku $[100]$ i wskutek tego piąta część węzłów obu sieci pokrywa się. (na podstawie: A. Kelly, G.W. Groves, Krystalografia i defekty kryształów, PWN, Warszawa, 1980)

Tab. 8.3. Przykładowe, możliwe do uzyskania osie i kąty obrotu wynikające z koincydencji dwóch sieci podstawowych. Symbol $\Sigma=n$ (np. $\Sigma=7$) oznacza typ granicy koincydentnej.

Σ	ω°	Oś obrotu
1	0	dowolna
3	60	$\langle 111 \rangle$
5	36.87	$\langle 100 \rangle$
7	38.21	$\langle 111 \rangle$
13b	27.8	$\langle 111 \rangle$
15	48.19	$\langle 210 \rangle$
19a	26.53	$\langle 110 \rangle$
19b	46.8	$\langle 111 \rangle$
21b	44.4	$\langle 211 \rangle$
29b	46.39	$\langle 221 \rangle$

Inny model trzeba zastosować do opisu rekryształizacji w materiałach o strukturze A2, jak np. stale niskowęglowe. W przypadku tych materiałów rekryształizacja nie prowadzi do tak gwałtownej modyfikacji tekstury jak to miało miejsce w przypadku metali A1, lecz jedynie do istotnej modyfikacji tekstury pozostałej po odkształceniu plastycznym (patrz Rys.8.18).

Podstawową rolę w modelu rekryształizacji metali o sieci A2 odgrywa zależność energii zgromadzonej w materiale (pozostałej po odkształceniu plastycznym) w funkcji orientacji ziaren (Miroux et al, 1998; Wierzbowski, et al., 1999). Przykładowy, obliczony teoretycznie, rozkład energii sprężystej wynikającej z gęstości dyslokacji pokazano na Rys.8.23. Przebieg procesu rekryształizacji w tych materiałach wskazuje na występowanie mechanizmu zorientowanego zarodkowania. Modelując ten proces, wprowadzamy zarodki „nowej fazy” w tych ziarnach materiału odkształconego, w których zgromadzona energia jest największa. Następnie zarodki te rozrastają się „konsumując” ziarna o dużej ilości zgromadzonej energii; wskutek tego procesu obniża się całkowita energia swobodna materiału. Opisane modelowanie procesu rekryształizacji opiera się na metodzie Monte-Carlo i poprawnie przewiduje zmiany tekstury podczas rekryształizacji. Wyliczona energia zgromadzona dla stali niskowęglowej (Rys. 8.23 c) jest wyraźnie większa w poziomym włóknie tekstury (włókno γ) niż w pionowym (włókno α). Wyjaśnia to fakt wzrostu natężenia włókna γ względem włókna α w teksturze rekryształizacji w porównaniu z teksturą walcowania (Rys. 8.23 a i b).



Rys. 8.23. Zmiana tekstury stali podczas rekryształizacji i jej związek z energią zgromadzoną: a) tekstura po walcowaniu, b) tekstura po rekryształizacji, c) wyliczony rozkład energii zgromadzonej.

Na rysunkach przedstawiono przekrój przez przestrzeń kątów Eulera przy $\varphi_2=45^\circ$.

8.6. Podsumowanie

Rekrystalizacja jest złożonym procesem, dlatego też jej opis jest częściowo opisem statystycznym, podobnie jak opis przemian fazowych. Procesem poprzedzającym rekrystalizację jest zdrowienie, czyli częściowe uporządkowanie mikrostruktury materiału pozostałej po uprzednim odkształceniu plastycznym.

W przebiegu samej rekrystalizacji wyróżnić możemy wyraźnie etap powstawania zarodków oraz wzrostu ziaren (rekrystalizacja pierwotna). Następnie często ma jeszcze miejsce anormalny wzrost ziaren, czyli rekrystalizacja drugiego rzędu. Po rekrystalizacji materiał zostaje uwolniony od nadmiaru defektów punktowych i dyslokacji, które wprowadziło odkształcenie plastyczne. Ziarna są duże, o regularnych kształtach. Ponadto proces rekrystalizacji wytwarza nową teksturę krystalograficzną. Własności mechaniczne materiału są radykalnie zmodyfikowane po rekrystalizacji. Jest to właśnie najczęstszy powód przeprowadzania tego procesu technologicznego.

Szersze informacje na temat rekrystalizacji znaleźć można m.in. w podręcznikach wymienionych w poniższym spisie literatury.

LITERATURA:

BLICHARSKI, M., Wstęp do inżynierii materiałowej, WNT, Warszawa, 1998

BLICHARSKI, M., GORCZYCA, S., Rekrystalizacja z udziałem drugiej fazy, Wyd. Śląsk, 1980

COTTERIL, P., MOULD, P.R., Recrystallization and Grain Growth in Metals, Surrey University Press, International Textbook Company Ltd, Glasgow, 1976

GUY, A.G., Wprowadzenie do nauki o materiałach, PWN, Warszawa, 1977

HUMPHREYS, F.J., HATHERLY, M., Recrystallization and Related Annealing Phenomena, Pergamon Press, 1995

LIEBMANN, B., LÜCKE, K., MASING, G., Untersuchungen über die Orientierungsabhängigkeit der Wachstumsgeschwindigkeit bei der primären Rekristallisation von Aluminium-Einkristallen, Zeit. Metallkunde **47**, 57 (1956)

PRZYBYŁOWICZ, K., Metaloznawstwo teoretyczne, Skrypt Akademii Górniczo-Hutniczej Nr 628, Kraków, 1978

REED-HILL, R., Physical Metallurgy Principles, Van Nostrand Company, 1973

SZTWIERTNIA, K., Simulation of Compromise Textures, Archives of Metallurgy, **41**, 101 (1996)

MIROUX, A., REGLE, H., BACROIX, B., Effect of Cold Rolling Level on Recrystallization Textures in Low Carbon Steel Sheets – Modelling, Materials Science Forum, **273-275**, 433 (1998)

DODATEK 1 – wyprowadzenie równania JMAK

Wprowadźmy dwie podstawowe wielkości:

$\dot{N}$ – szybkość tworzenia zarodków rekrytalizacji,

$\dot{G}$ – szybkość wrastania zarodka (nowego ziarna) w zdeformowany materiał.

Zauważmy na początku, że rozrastające się zrekrystalizowane ziarna zajmują coraz większą objętość próbki, poza tym zaczynają się stykać. Wewnątrz nich nie powstają już zatem nowe zarodki rekrytalizacji. Możemy zapisać następującą relację:

$$dN = \dot{N}dt = \dot{N}(1 - X_V)dt + \dot{N}X_Vdt \quad (1)$$

W równaniu tym X_V jest udziałem części już zrekrystalizowanej, zaś $dN = \dot{N}dt$ jest liczbą wszystkich potencjalnie powstających zarodków. Człon $\dot{N}(1 - X_V)dt = dN^R$ opisuje liczbę *realnie* powstających zarodków w materiale zdeformowanym, podczas gdy człon $\dot{N}X_Vdt = dN^F$ reprezentuje te zarodki, które formalnie pojawiłyby się w materiale już zrekrystalizowanym (ale one w rzeczywistości nie powstaną, są to ‘*duchy*’).

Zauważmy, zatem że Równ. (1) można zapisać w postaci:

$$dN = dN^R + dN^F \quad (2)$$

Wprowadźmy teraz pojęcie: udział objętość rozszerzonej, X_{VEX} . Objętość rozszerzona to objętość jaką miałyby w sumie wszystkie potencjalnie wzrastające nowe ziarna. które nie kolidowałyby ze sobą wzajemnie. Jeśli $V(t)$ jest objętością pojedynczego ziarna, które rosło przez czas t , licząc od momentu zarodkowania), to $X_{VEX}(t)$ wynosi:

$$X_{VEX} = \int_0^t V(t)dN \quad (3)$$

Jeśli czas samego zarodkowania jest pomijalny i prędkość rośnięcia promienia sferycznego ziarna $\dot{G}$ jest stała, to:

$$V(t) = fR^3 = f(\dot{G}t)^3 \quad (4)$$

Gdzie R jest promieniem ziarna, a $f = 4\pi/3$ jest czynnikiem geometrycznym.

Zatem objętość rozszerzona:

$$X_{VEX} = \int_0^t V(t) dN = \int_0^t V(t) \int_0^t V(t) \dot{N} dt = dt = f\dot{G}^3 \int_0^t t^3 \dot{N} dt \quad (5)$$

Jeśli szybkość tworzenia zarodków $\dot{N}$ jest stała, to objętość rozszerzona wynosi:

$$X_{VEX} = f\dot{G}^3 \dot{N} t^4 / 4 \quad (6)$$

Pamiętając, że udział frakcji niezrekrytalizowanej wynosi $1 - X_V$, przyrost udziału frakcji zrekrystalizowanej wyraża się następująco:

$$dX_V = (1 - X_V) dX_{VEX} \quad (7)$$

lub:

$$dX_{VEX} = \frac{dX_V}{1 - X_V} \quad (8)$$

Zatem:

$$X_{VEX} = \int dX_{VEX} = \int_0^{X_V} \frac{dX_V}{1 - X_V} \quad (9)$$

I dalej:

$$X_{VEX} = -\ln(1 - X_V) \quad (10)$$

$$1 - X_V = \exp(-X_{VEX}) \quad (11)$$

lub:

$$X_V = 1 - \exp(-X_{VEX}) \quad (12)$$

Podstawiając wyrażenie X_{VEX} z Równ. (6) otrzymujemy:

$$X_V = 1 - \exp\left(-\frac{f\dot{G}^3 \dot{N} t^4}{4}\right) \quad (13)$$

Lub w ogólniejszej postaci;

$$X_V = 1 - \exp(-Bt^n) \quad (14)$$

W naszym przypadku: $n = 4$.

Przeprowadzając ogólniejsze rozważania, znajduje się różne wartości wykładnika n w zależności od warunków procesu rekrystalizacji:

Wymiarowość wzrostu	Stała liczba zarodków	Stała prędkość wzrostu ziaren
3-D	3	4
2-D	2	3
1-D	1	2

Ponadto, wykładnik n może jeszcze w pewnym stopniu zależeć od innych czynników, dlatego jego dokładną wartość wyznacza się doświadczalnie dla danego materiału.