

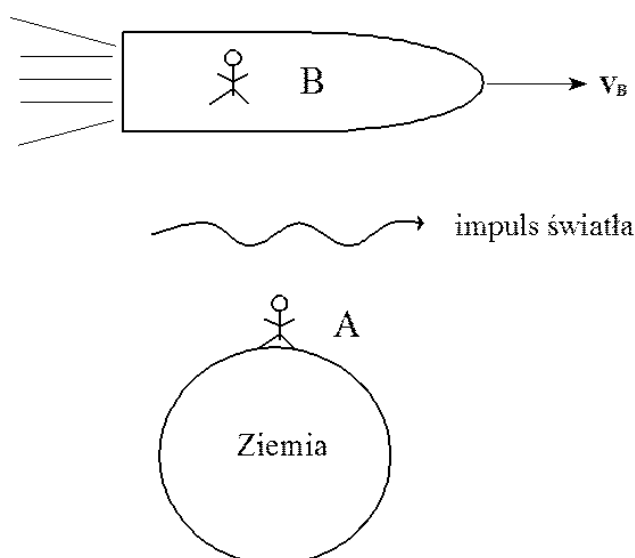
KINEMATYKA RELATYWISTYCZNA

Wstęp

Mechanika klasyczna, choć daje świetne przewidywania dla ruchu pojazdów, maszyn czy statków kosmicznych, zawodzi całkowicie, gdy opisujemy cząstki poruszające się z wielkimi prędkościami, porównywalnymi z prędkością światła ($c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s). Ponadto problemem, który wymagał wyjaśnienia (a pojawił się pod koniec 19-tego wieku), był fakt doświadczalny, iż prędkość światła jest taka sama w różnych układach odniesienia (spoczywających bądź poruszających się). Nie stosuje się zatem tutaj prawo dodawania prędkości (przykładowo w mechanice klasycznej, względna prędkość obserwowanego przez nas pojazdu zależy od tego czy stoimy czy jedziemy samochodem). Wspomniane fakty doprowadziły do powstania kinematyki relatywistycznej, zwaną także szczególną teorią względności (STW). Teorię tę ogłosił Albert Einstein w roku 1905.

Poniżej wymieniono charakterystyczne cechy i zagadnienia związane z STW:

- 1) STW stosuje się gdy prędkość ciała jest rzędu c ; natomiast dla $v \ll c$ mechanika relatywistyczna przechodzi w klasyczną,
- 2) Stwierdza się doświadczalnie, że prędkość światła (w próżni $c = 2.998 \times 10^8$ m/s) jest stała, niezależnie w jakim układzie odniesienia ją mierzymy (patrz Rys.1); jest to ponadto największa prędkość jaka istnieje w przyrodzie,



Rys. 1. Zmierzona prędkość światła będzie taka sama dla obserwatora A, stojącego na Ziemi, jak i dla obserwatora B poruszającego się względem Ziemi z prędkością v_B .

- 3) Magnetyzm ciał, a ściśle pole magnetyczne jest relatywistyczną poprawką do pola elektrycznego (równania Maxwella są w istocie równaniami relatywistycznymi),
- 4) Cząstki elementarne (te dochodzące na Ziemię z kosmosu jak i te wytwarzane w eksperymentach na cyklotronach) poruszają się z prędkościami zbliżonymi do prędkości światła (np. $0.95 c$); natomiast fotony i neutrina posiadają prędkość $v = c$.
- 5) Współczesna astronomia często korzysta z teorii względności (np. odległe galaktyki poruszają się z prędkościami bliskimi c).
- 6) Wyjaśnienie wielu zjawisk fizycznych wymaga uwzględnienie STW (np. efekt Comptona; innym przykładem jest relatywistyczne uogólnienie równanie Schrödingera, znane pod nazwą równania Diraca).
- 7) Nawet w kulturze masowej popularne są takie hasła, wywodzące się ze STW jak: $E=mc^2$, $c=v_{\max}$, paradoks bliźniąt, dylatacja czasu czy też skrócenie Lorentza.

Doświadczenie Michelsona i Morleya

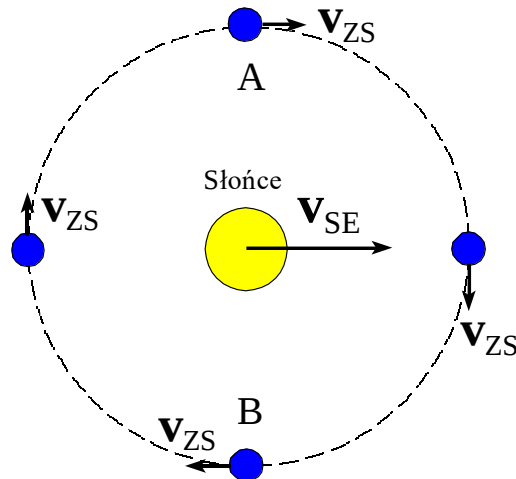
Dopóki nie została ogłoszona teoria względności Einsteina (1905), większość fizyków rozumowała, że musi istnieć „eter”- sprężysty, choć nieważki ośrodek, w którym rozchodzą się fale elektromagnetyczne. Zgodnie z tą koncepcją, tylko w eterze prędkość światła wynosiłaby:

$$c$$

natomiast dla obserwatora mającego prędkość v względem eteru i poruszającego się w przeciwnym kierunku niż światło, prędkość światła byłaby równa:

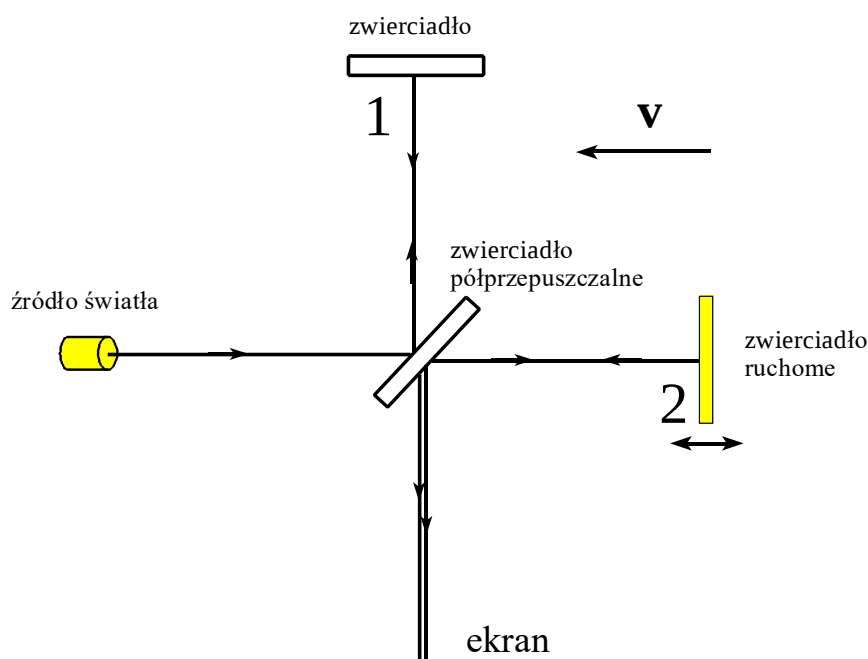
$$v + c$$

W latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku Michelson i Morley przeprowadzili doświadczenie, które dało jednak wynik negatywny (tzn. stwierdzili, że prędkość światła mierzona przez dowolnie poruszającego się obserwatora wynosi c . W doświadczeniu tym wykorzystano ruch obrotowy Ziemi wokół Słońca ($v \approx 30 \text{ km/s}$) – patrz rysunek poniżej. Jeśli założy się przykładowo, że eter jest nieruchomy względem Układu Słonecznego, to prędkość Ziemi, krążącej po orbicie wokół-słonecznej, ma różne względem eteru orientacje.



Rys. 2. Przykładowe pozycje Ziemi na orbicie wokół Słońca (w odstępach 3 miesięcy). Zakładając, że prędkość Układu Słonecznego względem eteru wynosi v_{SE} , zaś prędkość Ziemi względem Słońca wynosi v_{ZS} , to wypadkowa prędkość Ziemi względem eteru, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{SE} + \mathbf{v}_{ZS}$, powinna zmieniać się w trakcie ruchu orbitalnego Ziemi wokół Słońca.

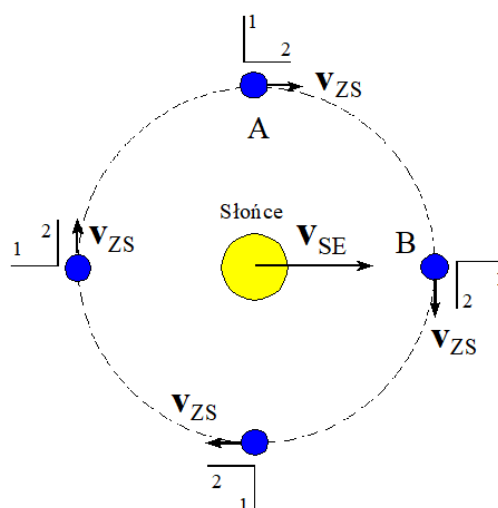
Michelson i Morley przeprowadzili swoje doświadczenie używając specjalnie skonstruowanego interferometru (Rys. 3). W interferometrze tym wiązka światła pada na półprzepuszczalne zwierciadło, tak że część światła biegnie w kierunku pionowym (ramię 1), a część w kierunku poziomym (ramię 2), po czym po odbiciu od zwierciadeł umieszczonych na końcach tych ramion oraz po ponownym przejściu przez zwierciadło półprzepuszczalne, obie wiązki interferują ze sobą na ekranie. Jedno ze zwierciadeł, np. na końcu ramienia 2, można lekko przesunąć (wartość tego przesunięcia odczytujemy na śrubie mikrometrycznej). Dzięki temu na ekranie możemy doprowadzić do zniknięcia lub powstania wyraźnego obrazu interferencyjnego. Interferencja konstruktywna, tzn. uzyskanie prążka jasnego, zachodzi wtedy, gdy oba promienie spotykają się na ekranie w tych samych fazach. Odpowiada to sytuacji, gdy różnica dróg, którą przeszły oba promienie jest wielokrotnością długości fali świetlnej. Załóżmy, że na ekranie obserwujemy maksimum interferencyjne. Jeśli teraz przesuniemy zwierciadło ruchome o $\frac{1}{4}$ długości fali ($\frac{1}{4} \lambda$) w prawo, to promień 2 przejdzie dodatkowo drogę $\frac{1}{2} \lambda$ i oba promienie na ekranie wygaszą się (zauważmy przy okazji, że interferometr ten może służyć także do pomiaru długości fali świetlnej). Zakłócenie ustawionego maksimum interferencyjnego można by także uzyskać, gdyby prędkości światła w ramieniu 1 i 2 ulegały zmianie (wtedy długości fali w obu kierunkach byłyby różne). Ta właśnie możliwość została wykorzystana w doświadczeniu Michelsona-Morleya.



Rys.3. Zasada budowy interferometru Michelsona. Zwierciadło „2” można przesuwając w ten sposób doprowadzać do powstawania kolejnych maksimów i minimów interferencyjnych.

Według wyobrażenia klasycznego, wypadkowa prędkość światła w kierunku każdego z ramion spektrometru (1 i 2) będzie różnicą (wektorową) prędkości światła c względem eteru oraz prędkości v Ziemi względem eteru. Ta ostatnia zaś (v), byłaby sumą prędkości Układu Słonecznego względem eteru (v_{SE}) oraz prędkości Ziemi względem Słońca (v_{ZS}), czyli: $v = v_{SE} + v_{ZS}$ (patrz Rys.2). Ponieważ wypadkowa prędkość światła w kierunku każdego z ramion zmieniałaby się wraz z ruchem orbitalnym Ziemi – Rys.4 (nie mówiąc o modyfikacji wprowadzanej przez dobowy ruch obrotowy Ziemi), prowadziłyby to do modyfikacji uzyskiwanych prążków interferencyjnych. Obliczenia pokazują, że różnica czasu przebiegu w obu ramionach, gdy interferometr obróci się o 90° wynosi około: $\Delta t = 3,3 \cdot 10^{-17}$ s. W ciągu tego czasu światło przebywa około $1/40$ swojej długości fali. Takie efekty byłyby wyraźnie widoczne jako przesunięcie (modyfikacja) prążków interferencyjnych. *Jednak, prążki interferencyjne, obserwowane przez dowolnie długi czas, nie zmieniały się !!!*

Stąd wniosek, że nie istnieje hipotetyczny ośrodek konieczny do rozchodzenia się fali elektromagnetycznej, jaką jest światło. Ponadto, prędkość światła jest stała, niezależna od ruchu obserwatora.



Rys.4. W położeniach Ziemi zaznaczonych jako A i B ramiona ,1' i ,2' (o różnych długościach) zamieniłyby się rolami.

Spowodowałoby to różnice w czasie przebiegu światła w obu ramionach interferometru, a zatem modyfikację prążków interferencyjnych.

Ten podstawowy fakt doświadczalny zmusił fizyków do weryfikacji wyobrażeń czasu i przestrzeni. Doprowadził także do powstania STW.

A oto dwie podstawowe zasady dotyczące przestrzeni i czasu:

1) $v_{\text{światła}} = c$ jest stała i niezależna od ruchu obserwatora ;

Prędkość światła c jest największą, jaka istnieje w przyrodzie. Cząstki bezmasowe (jak np. kwanty γ czy też neutrino) poruszają się z tą prędkością względem wszystkich obserwatorów.

2) *Zasada względności* (wypowiedział ją pierwszy i „explicite” Galileusz):

Prawa fizyki są takie same dla wszystkich obserwatorów poruszających się względem siebie ze stałą prędkością.

Inaczej mówiąc, nie ma wyróżnionego układu odniesienia. Nie ma także sensu pojęcie prędkości bezwzględnej (np. jeśli w samolocie, poruszającym się bez zakłóceń, zamkniemy oczy i uszy to nie możemy stwierdzić czy on stoi czy leci).

Powyższa zasada względności jest podstawą fizyki klasycznej.

Uzupełnienie jej o postulat stałej prędkości światła (patrz punkt 1), daje punkt wyjścia do naszkicowania głównych wyników STW.

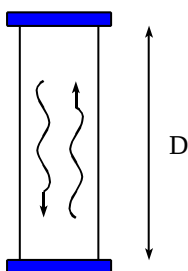
W celu oswojenia się z typowym zagadnieniem, wchodzącym w skład STW, rozpatrzmy w prosty sposób problem upływu czasu w różnych układach odniesienia.

Dylatacja czasu

Wyobraźmy sobie zegar świetlny, skonstruowany w ten sposób, że kwant światła biega wewnątrz cylindrycznej tuby odbijając się na jej końcach od umieszczonych tam zwierciadeł (Rys.5). Przyjmijmy, że jednostką czasu, τ , tego zegara jest okres, jaki upływa pomiędzy dwoma kolejnymi odbiciami się kwantu od dolnego lusterka; wynosi on:

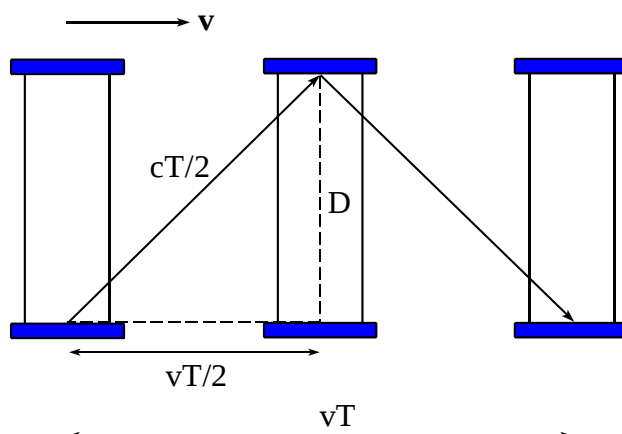
$$\tau = \frac{2D}{c} \quad (1)$$

gdzie D jest długością tuby.



Rys.5. Zegar świetlny. Kwant światła odbija się kolejno od dolnego i górnego lusterka. Okres, który upływa pomiędzy dwoma kolejnymi odbiciami się kwantu od dolnego lusterka, $\tau = \frac{2D}{c}$, jest jednostką czasu tego zegara.

Rozpatrzmy teraz sytuację, gdy zegar się porusza:



Rys.6. Bieg kwantu światła w poruszającym się zegarze

Zegar przemieszcza się na prawo z prędkością v . Rozpatrzmy jeden cykl przebiegu światła w zegarze, tzn. okres T , który upływa między dwoma kolejnymi odbiciami się od dolnego lusterka. Ponieważ zegar się porusza, więc kwant światła, aby odbić się od górnego lusterka, musi poruszać się po torze przedstawionym na Rys. 6. Kwant odbije się od górnego lusterka po czasie $T/2$, zegar zaś przemieści się w tym czasie o $\frac{vT}{2}$. Pamiętając, że długość tuby

zegara wynosi $D = \frac{c\tau}{2}$ i korzystając z twierdzenia Pitagorasa, możemy napisać:

$$\frac{v^2 T^2}{4} + \frac{c^2 \tau^2}{4} = \frac{c^2 T^2}{4} \quad (2)$$

(zauważmy, że światło, aby napotkać górne lusterko, musi przebiec ukośny odcinek o długości $\frac{cT}{2}$). Wyliczając z powyższego równania T , otrzymamy:

$$T = \tau \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

Rezultat ten zapisuje się równoważnie:

$$T = \gamma \tau \quad \text{gdzie} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4)$$

Czynnik γ nazywamy czynnikiem Lorentza; jest on prawie zawsze $\gamma > 1$, gdyż prawie zawsze $v < c$. Jedynie, gdy obiekt porusza się z prędkością światła to $\gamma = 1$.

A zatem:

$$T > \tau \quad \text{gdyż} \quad \gamma > 1 \quad (5)$$

Co nam mówi powyższy wynik? Otóż, rezultat ten mówi, że czas nie upływa w jednakowym tempie w dwóch poruszających się względem siebie układach odniesienia. W układzie związanym z zegarem świetlnym (czyli w takim, w którym zegar spoczywa), mamy taką sytuację, jaką przedstawia Rys. 5) okres czasu między dwoma kolejnymi odbiciami się kwantu od dolnego lusterka wynosi τ (czas w tym układzie nazywamy *czasem własnym*). Natomiast, gdy obserwujemy poruszający się zegar, czyli patrzymy na poruszający się układ odniesienia związany z zegarem, stwierdzimy, że pomiędzy dwoma kolejnymi odbiciami upłynął czas T (sytuacja z Rys. 6).

Powiemy zatem, że:

Czas mierzony w układzie ruchomym względem zegara upływa szybciej niż w układzie spoczywającym względem zegara), czyli $T > \tau$.

Dla utrwalenia tego niecodziennego wyniku, rozważmy następujące dwie modelowe sytuacje:

a) Ja jestem obserwatorem, stojącym na peronie dworca. Zegar świetlny stoi koło mnie.

Zmierzona przeze mnie jego jednostka czasu τ wynosi przykładowo $\tau=1$ sekunda,

b) Dalej stoję na peronie, ale zegar porusza się w rakiecie wzdłuż peronu z zawrotną prędkością. Obserwuję przebieg kwantu światła w zegarze i według mojego pomiaru wychodzi, że jednostka czasu poruszającego się zegara wynosi T , np. $T=1.5$ sekundy. ($T=\gamma\tau$).

A zatem, stwierdzamy, że $T > \tau$, czyli:

Czas własny, mierzony w układzie (np. zegara), płynie wolniej niż czas mierzony przez kogoś, kto jest względem tego układu w ruchu (np. człowiek obserwujący z peronu zegar, który porusza się w rakiecie).

Zauważmy jeszcze jedną charakterystyczną cechę. Mierząc czas własny obserwator zanotuje, kiedy nastąpiły kolejne odbicia kwantu od dolnego lusterka, znajdującego się w *tym samym punkcie przestrzeni*. Natomiast patrząc na zegar poruszający się, dwa kolejne odbicia kwantu od lusterka wypadają w *innych położeniach* (punktach przestrzeni). Widzimy na tym przykładzie, że cechy czasu i przestrzeni mocno zazębiają się między sobą.

Omawiany efekt:

$$T > \tau$$

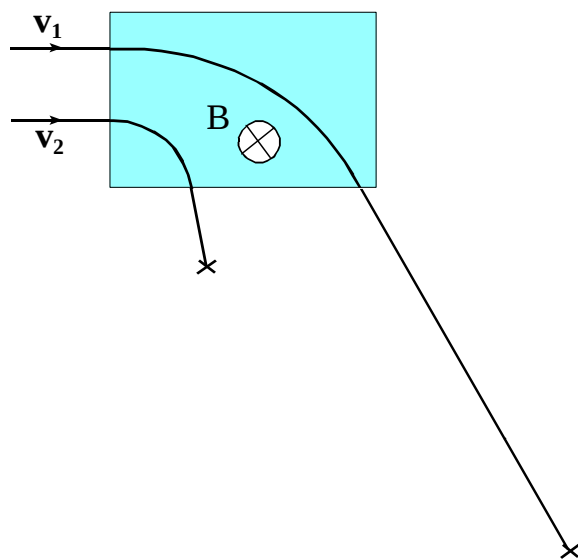
nazywamy wydłużeniem, albo *dylatacją* czasu.

Okazuje się, że jest to efekt uniwersalny, niezależny od użytego zegara. I tak np. jeden z bliźniaków wysłany w podróż kosmiczną będzie wolniej się starzał, niż jego brat bliźniak, który pozostał na Ziemi. Jest to słynny paradoks bliźniąt.

Również cząstka elementarna poruszająca się z większą prędkością będzie miała dłuższy tzw. czas życia niż identyczna cząstka, ale poruszająca się wolniej. Stwierdza się to w doświadczeniach nad cząstkami elementarnymi o wielkich energiach, poprzez rejestrację ich toru ruchu np. na kliszy fotograficznej (Rys. 7). Przykładowo, jeśli cząstka ma prędkość

$v=0.99 c$, to $\gamma \approx 7$ i tyleż razy wzrośnie jej czas życia obserwowany w układzie laboratoryjnym ($\Delta t'$), w porównaniu z jej czasem własnym, wyznaczonym w układzie odniesienia z nią związanym (Δt).

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad (6)$$



Rys. 7. Tory dwóch cząstek elementarnych, o różnych prędkościach ($v_1 > v_2$), które wpadają w pole magnetyczne o wektorze indukcji $\mathbf{B}$ prostopadłym do płaszczyzny ich ruchu. Cząstkę o większej prędkości poznajemy po tym, że jej tor jest słabiej zakrzywiany przez pole magnetyczne. Ma ona także dłuższy czas życia, co objawia się odpowiednio wydłużonym torem aż do jej rozpadu (punkty, gdzie cząstki się rozpadają zaznaczono krzyżykami).

Po tym pouczającym przykładzie, który mogliśmy zanalizować w prosty, intuicyjny sposób, pora przejść do bardziej systematycznego podejścia.

Elementy szczególnej teorii względności

1) Mechanika klasyczna i relatywistyczna

W mechanice klasycznej obowiązują zasady Newtona i jej przewidywania są poprawne pod warunkiem, że prędkości ciał, których ruch opisujemy są znacznie mniejsze od prędkości światła ($v \ll c = 300\,000 \text{ km/h}$).

Jednak, gdy prędkość ciała zaczyna być porównywalna z prędkością światła, wtedy mechanika klasyczna zawodzi i do opisu ruchu ciała użyć musimy szczególnej teorii względności. Opracował ją jeden z najwybitniejszych uczonych wszechczasów – Albert Einstein (ogłosił ją w roku 1905).

Punktem wyjścia tej teorii jest inny sposób przeliczania odległości i czasu, gdy przechodzimy z jednego układu odniesienia do drugiego, czyli transformacja.

2) Transformacje Galileusza i Lorentza

Jak pamiętamy, w mechanice rozróżnia się dwa podstawowe typy układów odniesienia: układy inercjalne i nieinercjalne. Te pierwsze spoczywają lub poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym, drugie zaś poruszają się ruchem, w którym występuje przyspieszenie (np. jadąc na karuzeli znajdujemy się w układzie nieinercjalnym, w związku z czym działa na nas siła bezwładności – w tym wypadku siła odśrodkowa).

Jak pamiętamy, stwierdziliśmy, że prawa fizyki mają taką samą postać we wszystkich układach inercjalnych (jest to zasada względności Galileusza). Natomiast, aby uzyskać poprawny opis praw przyrody w układzie nieinercjalnym, trzeba do istniejących sił fizycznych dodać siły bezwładności.

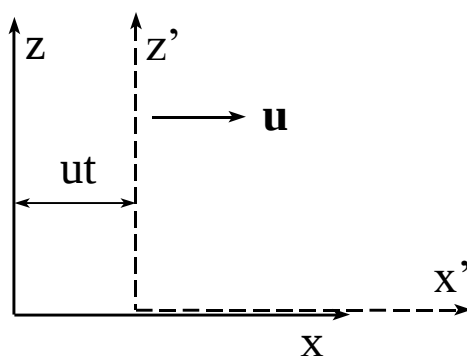
Zauważmy, że nie istnieje bezwzględny inercjalny układ odniesienia, a więc istnieje ich nieskończenie wiele; żaden z nich nie jest wyróżniony.

A zatem:

We wszystkich układach inercjalnych prawa fizyki są jednakowe.

Zastanówmy się teraz jak wygląda, zgodnie z mechaniką klasyczną, opis ruchu ciała obserwowany z dwóch układów inercjalnych - patrz Rys. 8. Rozważamy dwa układy

odniesienia poruszające się względem siebie wzdłuż osi x , przy czym w chwili początkowej one się pokrywały.



Rys. 8. Dwa układy odniesienia poruszające się względem siebie wzdłuż osi $x=x'$

Ponieważ w chwili $t=0$ układy pokrywały się ze sobą, to związki między współrzędnymi czasowo-przestrzennymi w obu układach są następujące:

$$\begin{array}{ll}
 x = x' + ut & x' = x - ut \\
 y = y' & y' = y \\
 z = z' & z' = z \\
 t = t' & t' = t
 \end{array}
 \quad \text{oraz} \quad (7)$$

Jest to TRANSFORMACJA GALILEUSZA.

Oparta jest ona na intuicyjnym założeniu, że czas płynie jednakowo w obu układach odniesienia. Pracuje ona świetnie w zakresie mechaniki klasycznej. Natomiast nie opisuje poprawnie przejścia między inercjalnymi układami odniesienia w przypadku praw elektromagnetyzmu (równania Maxwella). Np. pole magnetyczne jest przejawem pola elektrycznego w układzie poruszającym się względem ładunków i zależy ono od układu odniesienia. Transformacja Galileusza nie opisuje poprawnie tego efektu. Ponadto, umożliwia ona otrzymanie prędkości większej od prędkości światła (c). Np. jeśli jedziemy pociągiem z prędkością v , a światło biegnie naprzeciw nas z prędkością c , to według powyższej transformacji, prędkość światła względem nas powinna wynosić $c+v$. A wiemy, że jest to sprzeczne z doświadczeniem, które wykonali Michelson i Morley. Tak więc, trzeba było sformułować nową transformację, która nie prowadzi do tego błędnego wyniku. Pogodzenie tej sprzeczności (że $v+c$ daje w wyniku znowu c) jest możliwe, gdyż w relatywistyce obowiązuje inna zależność między współrzędnymi przestrzennymi i czasem.

Poprawną formę nowej transformacji sformułował w roku 1897 fizyk holenderski Lorentz i nosi ona nazwę transformacji Lorentza. Transformacja ta jest podstawą relatywistyki, czyli szczególnej teorii względności. Rozważmy znów dwa, identyczne jak poprzednio, sytuację szczególnie prostą, a mianowicie taką, że dwa układy odniesienia poruszające się względem siebie wzdłuż osi x z prędkością u - Rys. 8 (zakładamy ponadto, że w chwili początkowej pokrywały się).

TRANSFORMACJA LORENTZA ma następującą postać:

$$\begin{array}{ll}
 0' \rightarrow 0 & 0 \rightarrow 0' \\
 x = \gamma(x' + ut') & x' = \gamma(x - ut) \\
 y = y' & y' = y \\
 z = z' & z' = z \\
 t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) & t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)
 \end{array}
 \quad \text{oraz} \quad (8)$$

W transformacji Lorentza występuje znany nam już czynnik Lorentza:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Zauważmy, że charakterystyczną cechą tej transformacji jest „przeplatanie się”

współrzędnych czasowych i przestrzennych; występuje to w formule na transformację czasu:

$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x\right)$. Ponadto, zgodnie z tą transformacją czas nie płynie w tym samym tempie w obu układach ($t \neq t'$).

3. Kilka wniosków z transformacji Lorentza

UPŁYW CZASU

Wykażemy teraz, że z transformacji Lorentza wynika wniosek, iż tempo upływu czasu jest różne w układach 0 i $0'$, czyli w takich, które się poruszają względem siebie (wykazaliśmy to już powyżej, poprzez proste rozumowanie z zegarem świetlnym – Rys. 5 i 6). Z transformacji Lorentza mamy:

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

Założmy, że jakieś dwa zdarzenia mają miejsce w układzie O' punkcie $x' = 0$, w chwilach t'_1 i t'_2 , czyli następują w odstępie czasu $\Delta t'$. Chcemy wyliczyć odpowiadający mu odstęp czasu Δt w układzie O . Zgodnie z powyższym równaniem:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' + \gamma \frac{u}{c^2} \Delta x' \quad (9)$$

gdzie: $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Ponieważ oba wydarzenia zachodzą w tym samym miejscu w układzie O' , więc: $\Delta x' = 0$. A zatem

$\Delta t = \gamma \Delta t'$	(10)
-------------------------------	------

Wynik ten dostaliśmy już wcześniej, przy okazji rozumowania z zegarem świetlnym (Równ. 4). Oczywiście: $\Delta t > \Delta t'$.

Założmy teraz, że dwa wydarzenia zachodzące w punktach x'_1 i x'_2 (a zatem w układzie O') są jednoczesne ($\Delta t' = 0$). Może to być, na przykład, zapalenie się dwóch żarówek. Jaki jest odstęp czasu między tymi wydarzeniami w układzie O ?

Z Równ. 9, biorąc pod uwagę, że $\Delta t' = 0$, otrzymujemy:

$\Delta t = \gamma \frac{u}{c^2} \Delta x' \neq 0$	(11)
--	------

Widzimy zatem, że te same dwa wydarzenia w układzie O (poruszającym się względem układu O') nie są jednoczesne.

A zatem $\rightarrow$ *jednoczesność jest względna !!!*

Jeśli dwa układy odniesienia poruszają się względem siebie, to dwa wydarzenia jednoczesne w jednym układzie nie będą jednoczesne w drugim. W mechanice klasycznej taka sytuacja jest nie do pomyślenia!

SKRÓCENIE DŁUGOŚCI

Założmy, że obserwator O chce zmierzyć długość pręta, który spoczywa w układzie O' ; końce pręta znajdują się w punktach x'_1 i x'_2 . Z transformacji Lorentza możemy napisać kolejno:

$$\begin{aligned} x'_2 &= \gamma x_2 - \gamma u t_2 \\ x'_1 &= \gamma x_1 - \gamma u t_1 \\ \text{a zatem} \\ x_2 &= \frac{1}{\gamma} x'_2 + u t_2 \\ x_1 &= \frac{1}{\gamma} x'_1 + u t_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Długość poruszającego się pręta mierzona w układzie 0 wynosi $\Delta x = x_2 - x_1$, czyli:

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x' + u \Delta t$$

gdzie oczywiście:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Obserwator 0 musi zmierzyć położenie obu końców równocześnie (gdyż one się poruszają); a więc $t_1 = t_2 \rightarrow \Delta t = 0$. Otrzymujemy ostatecznie:

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \Delta x' \quad (13)$$

A zatem długość pręta, którą otrzymamy w układzie 0 (układ ruchomy względem pręta) jest krótsza niż ta, którą zmierzmy w układzie 0' (układ w którym pręt spoczywa). Podsumujmy:

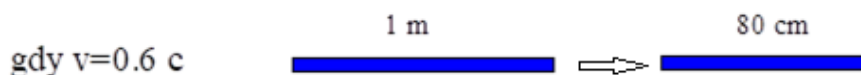
$\Delta x < \Delta x' \rightarrow$ długość pręta mierzona z układu poruszającego się (względem pręta) jest mniejsza niż długość wyznaczona dla pręta spoczywającego.

A zatem mamy efekt *skrócenia długości*.

Przykład:

Dwóch obserwatorów mija się, każdy trzymając identyczny pręt metalowy; długość pręta zmierzona w układzie własnym wynosi 1 m. Jednak każdy z obserwatorów mierząc długość pręta partnera znajdującego się w układzie kolegi (czyli poruszającego się), zobaczy pręt partnera skrócony $\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$ razy. Jeśli względna ich prędkość wynosi $v=0.6 c$, to zgodnie z

Równ. 12, każdy z dwóch obserwatorów zamiast zobaczyć pręt o długości 1 m, zobaczy pręt o długości $\Delta x=80$ cm.

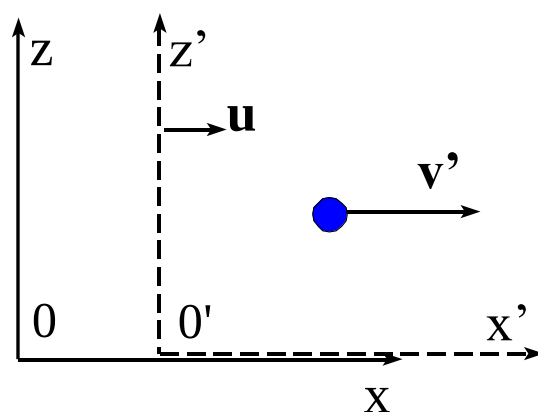


RELATYWISTYCZNE DODAWANIE PRĘDKOŚCI:

Zobaczmy teraz, jakie prawo dodawania prędkości wynika z transformacji Lorentza (Równ.8):

$$\begin{aligned}0 &\rightarrow 0' \\ x' &= \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

Przypuśćmy, że jakieś ciało porusza się z prędkością v' względem $0'$. Jaka jest prędkość v ciała w układzie 0 ? Przyjmując, że układ $0'$ porusza się względem układu 0 z prędkością u (patrz Rys. 9)



Rys.9. Ciało porusza się z prędkością v' względem układu $0'$, zaś układ $0'$ ma prędkość u względem układu 0 . Jaką prędkość ma względem układu 0 ?

Według mechaniki klasycznej otrzymalibyśmy zgodny z naszą codzienną intuicją wynik: $v=u+v'$. A jaką prędkość wypadkową zarejestrujemy w układzie 0 zgodnie z STW?

Z transformacji Lorentza wynika, że:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - u\Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)\end{aligned}\tag{14}$$

Dzieląc dwa powyższe równania stronami:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - u \Delta t}{\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}} \quad (15)$$

Zauważmy, że:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = v' ; \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

czyli:

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2} v} \quad (16)$$

Przekształcając:

$$v' - \frac{u}{c^2} v v' = v - u$$

$$v' + u = v \left(1 + \frac{u}{c^2} v' \right)$$

Ostatecznie otrzymujemy wynik na wypadkową prędkość v :

$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{u v'}{c^2}}$	(16a)
---	-------

Z tego wzoru możemy potwierdzić postulat stałej prędkości światła, niezależnej od układu odniesienia. Załóżmy, że $v' = c$, czyli, że np. poruszającym się ciałem jest kwant światła (jego prędkość wynosi c względem układu $0'$); wiemy, ponadto, że układ $0'$ porusza się z prędkością u względem układu 0 . Ile zatem wyniesie wypadkowa prędkość kwantu światła względem układu 0 ? Podstawiając do powyższego równania $v' = c$, otrzymujemy:

$$v = \frac{c + u}{1 + \frac{u c}{c^2}} \quad \rightarrow \quad v = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c}} = \frac{c(c + u)}{(c + u)} = c \quad \Rightarrow v = c$$

A zatem dostaliśmy poprawny, zgodny z doświadczeniem rezultat, że prędkość światła wynosi c względem każdego z dwóch poruszających się układów odniesienia. Jak widzimy, transformacja Lorentza pracuje poprawnie !

4. Czasoprzestrzeń, interwał

Czterowymiarową przestrzeń Einsteina: (x,y,z,t) nazywamy czasoprzestrzenią. Kiedy chcemy scharakteryzować odległość między dwoma wydarzeniami, nie wystarczy podać tylko różnicy współrzędnych przestrzennych ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$); trzeba również podać różnicę współrzędnej czasowej (Δt). Wielkość fizyczna opisująca odległość między dwoma zdarzeniami nazywa się *interwałem*, który definiujemy następująco:

$$\Delta s_{1,2} = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)} \quad (17)$$

Można wykazać, że interwał jest niezmiennikiem względem transformacji Lorentza, tzn. ma taką samą wartość w każdym inercjalnym układzie odniesienia:

$$\Delta s_{1,2}' = \Delta s_{1,2} \quad (18)$$

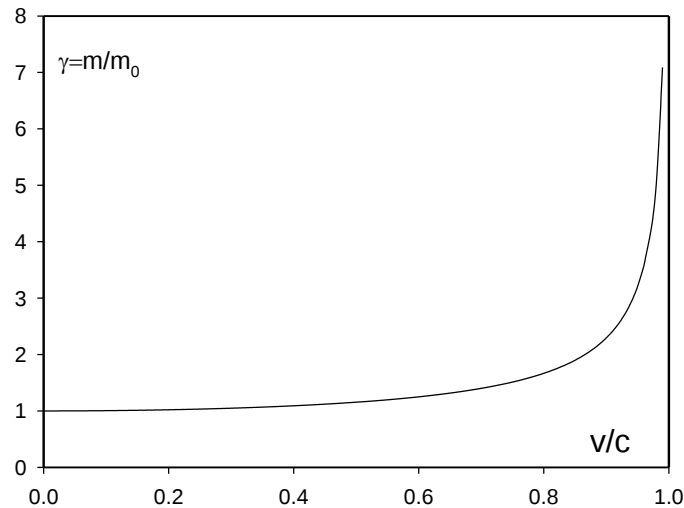
5. Dynamika relatywistyczna

ZALEŻNOŚĆ MASY OD PRĘDKOŚCI

Podstawowe prawa mechaniki, jak zasady zachowania : pędu, krętu, i energii pozostają ważne i w mechanice relatywistycznej, ale znaczenie niektórych wielkości ulega zmianie. Np., wykazuje się, że jeśli ma pozostać słuszna zasada zachowania pędu, to masa ciała nie może być wielkością stałą; musi ona zależeć od prędkości wg. wzoru:

$$m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (19)$$

W relacji powyższej m_0 oznacza masę spoczynkową ciała, czyli masę ciała pozostającego w spoczynku, zaś masę m nazywamy też masą całkowitą.



Rys.10. Zależność masy całkowitej od prędkości. Masę i prędkość wyrażono w sposób znormalizowany, tzn. jako m/m_0 oraz v/c .

Pęd w mechanice relatywistycznej wyraża się podobnie jak w mechanice klasycznej, z tym, że jako masę trzeba wziąć masę całkowitą:

$p = mv$ $p = m_0 \gamma v$	(20)
-----------------------------	------

Zależność masy od prędkości (Równ.19) została potwierdzona doświadczalnie w szeregu doświadczeń, np. w badaniach ruchu i zderzeń cząstek elementarnych.

MASA I ENERGIA

Aby utrzymać w mocy zasadę zachowania energii w mechanice relatywistycznej, pomiędzy masą a całkowitą a energią ciała, zwaną *energiją całkowitą*, musi zachodzić związek :

$E = mc^2 = m_0 \gamma c^2$	(21)
-----------------------------	------

Jest to słynne równanie Einsteina wyrażające *równowagę masy i energii*.

Przedyskutujmy to równanie. Załóżmy, że ciało jest w spoczynku. Wtedy masa tego ciała jest równa m_0 i jego energia, zwana *energiją spoczynkową*, wynosi:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (22)$$

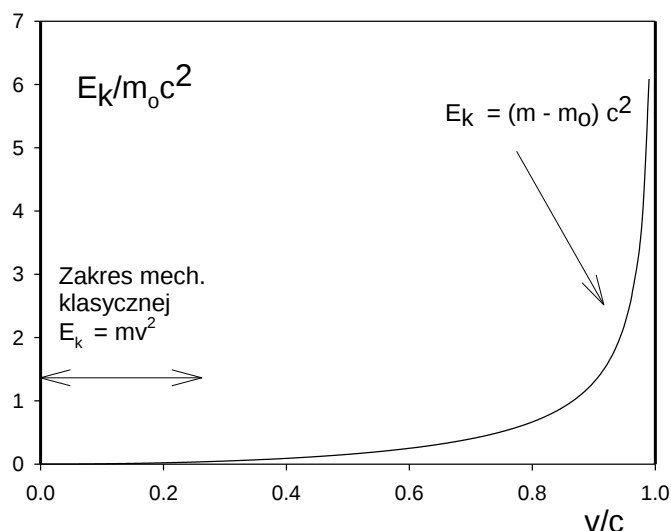
Czym jest, zatem energia kinetyczna? Jest ona po prostu różnicą pomiędzy energią całkowitą i spoczynkową:

$$E_k = E - E_0 = (m - m_0)c^2 \quad (23)$$

lub też:

$$E_k = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (24)$$

Uzyskaną zależność na energię kinetyczną przedstawiono na Rys.11.



Rys.11. Zależność energii kinetycznej od prędkości. Energię kinetyczną i prędkość wyrażono w sposób znormalizowany, tzn. jako $E_k/m_0 c^2$ oraz v/c .

W relatywistyce musimy używać, zatem zupełnie innej formuły na energię kinetyczną, niż ta do której przywykliśmy w fizyce klasycznej ($E_k = \frac{1}{2} m v^2$). Niemniej, łatwo można wykazać że dla małych prędkości, równanie relatywistyczne (Równ.24) przechodzi w relację klasyczną. Rozwińmy w szereg Taylora wyrażenie występujące w powyższym równaniu:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (1 - x)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{gdzie} \quad x = \frac{v^2}{c^2}$$

dla bardzo małych x , w wokół punktu $x=0$, biorąc tylko dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia; otrzymamy:

$$(1 - x)^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{2} x$$

Podstawiając ten wynik dla $x = \frac{v^2}{c^2}$ z powrotem do Równ.24, otrzymujemy:

$$E_k = m_0 c^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Czyli, gdy przechodzimy do bardzo małych prędkości (w porównaniu z prędkością światła), relatywistyczny wzór na energię kinetyczną przechodzi we wzór klasyczny. Zaznaczono to symbolicznie na Rys.11. Z drugiej strony widzimy, że gdy $v \rightarrow c$ to $E_k \rightarrow \infty$. A zatem rozpędzenie ciała (obdarzonego masą) do prędkości światła $v = c$ wymagałoby nieskończenie wielkiej pracy, a zatem jest niemożliwe. Z prędkością światła mogą poruszać się jedynie cząstki elementarne o zerowej masie spoczynkowej, takie jak foton (czyli kwant światła).

Energia kinetyczna związana jest z przyrostem masy ciała. Okazuje się, że to samo dotyczy innych rodzajów energii: np. zegarek z nakręconą sprężyną waży nieco więcej, niż ten sam zegarek nienakręcony, czy też ciało podniesione nad poziom Ziemi, zwiększa swoją masę. Te zmiany są bardzo niewielkie i są trudno zauważalne w obserwacjach życia codziennego.

Dopiero w zjawiskach atomowych i jądrowych zamiana masy na energię może być łatwiej zademonstrowana. Na przykład praca reaktora jądrowego polega przecież na tym, że część masy jąder atomowych, uczestniczących w reakcji rozszczepienia, zamienia się na energię zgodnie z wzorem: $E=mc^2$ (nawiasem mówiąc szczególna teoria względności dostarczyła podstaw teoretycznych do konstrukcji reaktorów atomowych oraz – niestety – także bomby atomowej).

Innym ciekawym przykładem konwersji energii jest fakt, że kwanty promieniowania (energia ich wynosi $h\nu$, gdzie h jest stałą Plancka, zaś ν częstotliwością promieniowania), zmieniają swoją częstotliwość, jeśli poruszają się w kierunku pionowym w polu grawitacyjnym Ziemi. Zwiększają swoją częstotliwość, jeśli poruszają się w dół, zaś zmniejszają, jeśli biegną w górę. Oddziałują one z polem grawitacyjnym tak, jakby miały masę $m=h\nu/c^2$. Biegąc do góry wykonują pracę przeciw polu grawitacyjnemu, przez co ich energia, a zatem i częstotliwość maleją.

ZWIĄZEK ENERGII, MASY I PĘDU

Na koniec naszych rozważań wyprowadzimy charakterystyczną relację wiążącą energię i masę całkowitą ciała oraz jego pęd. Przypomnijmy wzory na energię całkowitą i pęd ciała:

$$E = mc^2 \quad \text{oraz} \quad p = mv$$

Podnieśmy te równania do kwadratu:

$$E^2 = m^2c^4 \quad \text{oraz} \quad p^2c^2 = m^2v^2c^2$$

przy czym drugie z nich pomnożyliśmy jeszcze dodatkowo przez c^2 .

Odejmijmy je teraz stronami:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Podstawiając do powyższego, wyrażenie na masę całkowitą:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

otrzymujemy:

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

czyli:

$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$	(25)
-----------------------------	------

lub równoważnie:

$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$	(26)
----------------------------------	------

Otrzymaliśmy bardzo charakterystyczny rezultat. Mówi on, że na całkowitą energię (E) ciała składają się: energia spoczynkowa ($m_0 c^2$) oraz przyczynęk związany z ruchem ciała ($p^2 c^2$), przy czym te dwa składniki dodają się jak składowe wektora.

Ponadto z Równ.25 widać, że wyrażenie:

$$E^2 - p^2 c^2 \tag{27}$$

jest *niezmiennikiem*, tzn. jego wartość jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia (w szczególności nie zależy ono od prędkości v, a zatem i od czynnika Lorentza γ) w przeciwieństwie do E oraz p.

Przeprowadźmy na koniec dyskusję wyrażenia na całkowitą energię, E (Równ.26), rozpatrując trzy przypadki:

a) Jeśli cząstka nie ma masy spoczynkowej ($m_0=0$, np. kwant światła lub γ , neutrino) to $\rightarrow$

$E = pc$	(28)
----------	------

Znajdujemy stąd przydatne wyrażenie na pęd fotonu:

$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$	(29)
------------------------------------	------

gdyż energia fotonu wynosi $h\nu$. Pęd niesiony przez kwanty promieniowania elektromagnetycznego wyjaśnia proces elastycznego zderzenia kwantów γ z elektronami (w zjawisku Comptona) czy też ciśnienie wytwarzane przez światło.

Zauważmy, że wynik z Równ.28 jest także w przybliżeniu prawdziwy dla cząstki mającej bardzo dużą energię kinetyczną (co się wyraża dużym pędem), tak że można w porównaniu z nią zaniedbać energię spoczynkową (por. Równ. 26).

b) Jeśli pęd cząstki wynosi zero ($p=0$) to jej energia całkowita równa jest energii spoczynkowej (por. Równ. 26):

$E = m_0 c^2$	(30)
---------------	------

Jest to przypadek cząstek pozostających w spoczynku.

c) Rozpatrzmy teraz cząstkę o niewielkim pędzie. Energia kinetyczna wynosi:

$$E_k = E - m_0 c^2$$

lub:

$$E_k = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} - m_0 c^2$$

Założmy teraz, że pęd cząstki jest mały tak, iż wyraz $\frac{p^2}{m_0^2 c^2} \ll 1$. Zastosujmy w powyższym

równaniu przybliżone rozwinięcie pierwiastka kwadratowego: $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x$ (poprawne dla małych x); otrzymamy zatem:

$$E_k = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \right) - m_0 c^2 = \frac{p^2}{2m_0}$$

A więc dostaliśmy klasyczne wyrażenie na energię kinetyczną ($E_k = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{m_0 v^2}{2}$), pod

warunkiem, że cząstka ma mały pęd.