

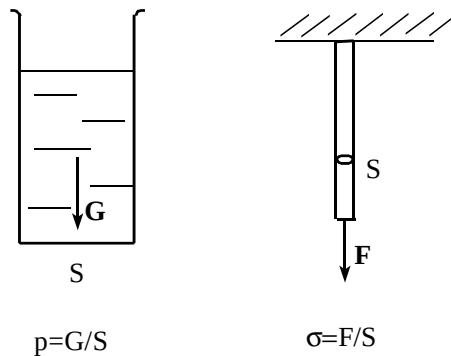
## 11. WŁASNOŚCI SPRĘŻYSTE CIAŁ

Efektem działania siły może być przyspieszanie ciała, ale może być także jego deformacja. Przykładami tego ostatniego są np.: rozciąganie gumy a także zginanie lub rozciąganie pręta. Związki między przyłożonymi do ciała siłami i wynikłymi zmianami rozmiarów i kształtu ciała opisuje się w postaci wielkości znormalizowanych. Wprowadzamy więc następujące pojęcia:

*Ciśnienie (lub naprężenie normalne):*

$$p = \sigma = \frac{F}{S}$$

gdzie  $S$  jest powierzchnią przekroju poprzecznego ciała, prostopadłą do kierunku działającej siły  $F$ .

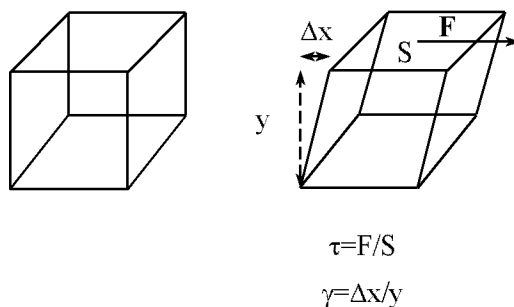


Przykładowo słup wody o ciężarze  $G$  wywiera na dno naczynia o powierzchni  $S$  ciśnienie  $p=G/S$ . Z drugiej strony rozciągając siłą  $F$  pręt o przekroju poprzecznym  $S$ , wytwarzamy naprężenie  $\sigma=F/S$ .

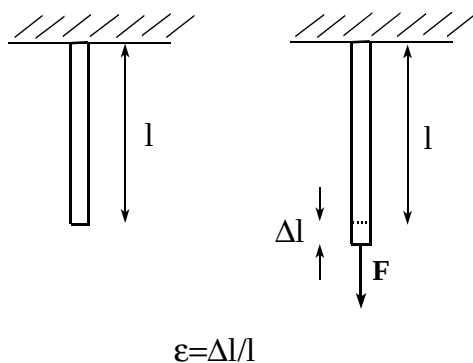
*Naprężenie ścinające*

$$\tau = \frac{F}{S}$$

gdzie  $S$  jest powierzchnią styczną do kierunku działającej siły. Pod wpływem naprężenia stycznego sześcián deformowany jest do kształtu równoległoscianu.



Wydłużenie lub skrócenie względne (odkształcenie normalne):



definiujemy jako:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

gdzie  $\Delta l$  jest wydłużeniem ciała w wybranym kierunku, jeśli długość początkowa wynosiła  $l$ . Odkształcenie takie nazywamy odkształceniem normalnym. Wystąpiło ono pod wpływem naprężenia normalnego  $\sigma$  przyłożonego do pręta ( $\sigma = F/S$ ).

Odkształcenie postaci (ścinające):

$$\gamma = \frac{\Delta x}{y}$$

gdzie  $\Delta x$  jest prostopadłym (ścinającym) przemieszczeniem odcinka o długości początkowej  $y$  (patrz rysunek). Odkształcenie takie występuje pod wpływem naprężenia ścinającego  $\tau = F/S$ .

## Prawo Hooke'a (1676)

Zależność między przyłożonymi siłami a uzyskaną deformacją sprężystą ciała została po raz pierwszy ilościowo opisana przez angielskiego fizyka Roberta Hooke'a (1635-1703).

Dla naprężenia i odkształcenia normalnego:

$$\sigma = E\varepsilon$$

gdzie E jest modułem Younga. Jest to relacja opisująca test rozciągania ciała.

Dla naprężenia i odkształcenia ścinającego:

$$\tau = G\gamma$$

gdzie G jest modułem sztywności. Relacja ta opisuje deformację ścinającą; zmienia ona np. kąty między krawędziami ciała o kształcie sześcianu czy prostopadłościanu.

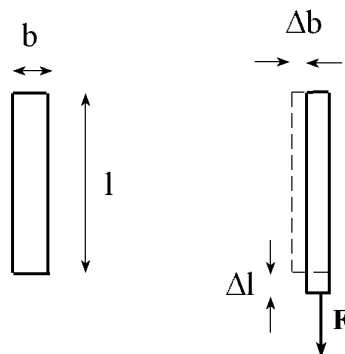
Oprócz odkształceń normalnych i ścinających wystąpić może także względna zmiana objętości ciała ( $\Delta V/V$ ) pod wpływem ciśnienia hydrostatycznego p. Ilustracją takiej sytuacji jest włożenie napompowanego balonika pod wodę; ciśnienie wody spowoduje skurczenie balonika. Prawo Hooke'a dla takiego typu deformacji ma postać:

$$p = -K \frac{\Delta V}{V}$$

Występujący tu współczynnik proporcjonalności K nazywa się modułem sprężystości objętościowej (lub modułem ściśliwości). Znak minus w powyższym równaniu uświadamia nam, że zmiana objętości  $\Delta V$  jest ujemna.

### Uwaga: odkształcenia poprzeczne

Dokładniejsze badania zmian rozmiarów ciała podczas deformacji elastycznej pokazują, że np. wydłużeniu pręta (w kierunku przyłożonej siły) towarzyszy skrócenie wymiarów w kierunkach poprzecznych.



Okazuje się, że zmiana wymiaru poprzecznego ( $\Delta b/b$ ) jest proporcjonalna do względnego wydłużenia ( $\Delta l/l$ ) w kierunku działającej siły:

$$\frac{\Delta b}{b} = -\nu \frac{\Delta l}{l}$$

Stała proporcjonalności  $\nu$  to *współczynnik Poissona*, zaś znak minus występuje dlatego, że zmiana wymiaru poprzecznego pręta ( $\Delta b$ ) jest ujemna (na ogół). Typowa wartość współczynnika Poissona dla metali to  $\nu \approx 0.3$ .

## Stałe elastyczne ciała izotropowego

Omówione przez nas współczynniki:  $E$  (moduł Younga),  $G$  (moduł sztywności),  $K$  (moduł sprężystości objętościowej) czy  $\nu$  (współczynnik Poissona), to stałe charakteryzujące własności elastyczne ciał. Najprościej jest opisać te własności w przypadku ciał izotropowych, tzn. takich dla których dana własność fizyczna ma taką samą wartość we wszystkich kierunkach (na przykład stała wartość modułu Younga niezależnie od kierunku w którym rozciągamy ciało). Własności elastyczne ciała izotropowego zdefiniowane są jednoznacznie przez podanie dwóch wybranych stałych elastycznych, np.  $E$  i  $G$ . Można również wybrać inne pary stałych. Wynika stąd, że poznane przez nas cztery stałe elastyczne są ze sobą powiązane. Tak też jest w rzeczywistości i między tymi stałymi zachodzą np. dwie następujące relacje:

$$E = 3K(1 - 2\nu)$$

$$E = 2G(1 + \nu)$$

Na koniec, zobaczmy jakie są typowe wartości stałych elastycznych. Współczynnik Poissona jest bezwymiarowy, natomiast pozostałe stałe wyrażone zostały w GPa ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ):

| Materiał             | $E$<br>(GPa) | $K$<br>(GPa) | $G$<br>(GPa) | $\nu$     | Granica<br>wytrzymałości (GPa) |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|-----------|--------------------------------|
| Aluminium            | 70           | 73           | 27           | 0.34      | 0.1                            |
| Stal (Fe- $\alpha$ ) | 208          | 166          | 81           | 0.29      | 1.3                            |
| Mosiądz              | 98-112       | 40           | 26 – 36      | 0.3 – 0.4 | 0.3 – 0.5                      |
| Ołów                 | 16           | 41           | 5.6          | 0.44      | 0.015                          |
| Duraluminium         | 70           | 200          | 26           | 0.31      | 0.4                            |
| Miedź                | 123          | 137          | 46           | 0.34      |                                |
| Sód                  | 8.9          | 8.2          | 3.4          | 0.32      |                                |

W tabelce tej podano również dla kilku metali tzw. granicę wytrzymałości. Jest to maksymalna wartość naprężenia normalnego jakiemu może być poddana próbka; powyżej niego próbka ulega przewężeniu, a następnie zerwaniu.

Poniżej pokazano typową krzywą rozciągania materiału metalicznego. Krzywa ta jest ważną

charakterystyką materiału i podaje ona zależność przyłożonego naprężenia normalnego ( $\sigma$ ) w funkcji uzyskanego wydłużenia względnego ( $\epsilon$ ). Początkowy stromy, liniowy odcinek to deformacja sprężysta (elastyczna), która jest odwracalna, tzn. po odjęciu siły ciało wraca do początkowego kształtu. Powyżej charakterystycznego punktu zwanego *granica plastyczności* pojawia się nieodwracalna *deformacja plastyczna* (tzn. wydłużenie pozostaje po odjęciu sił odkształcających ciało). Dla metali granica plastyczności występuje przy odkształceniach rzędu 0.001 (czyli przy wydłużeniach około 0.1 %). Podczas deformacji plastycznej kawałki krystalitów tworzących ciało przemieszczają się (nieodwracalnie) względem siebie w deformacji typu ścinającego (w zjawiskach poślizgu krystalograficznego oraz bliźniakowania). Ten zakres deformacji jest już na ogół niedopuszczalny dla konstrukcji mechanicznych, dlatego każdy inżynier tak projektuje swoje urządzenia, aby pozostawały one w zakresie odwracalnej deformacji elastycznej.

