Problem 1: transformacja tensora II rzędu

Wykazać słuszność wzorów na transformację tensora naprężenia do nowego układu współrzędnych:

$$\sigma_{ij}' = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$$

a) używając zapisu macierzowego,

b) wykonując działania na wskaźnikach.

Uwaga: Wielkości wyrażone w „nowym" układzie współrzędnych zawsze oznaczamy przez prim (').

Rozwiązanie:

Chcemy udowodnić prawo transformacji tensora II rzędu:

$$\sigma_{ij}' = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl} \qquad (1)$$

(indeks 'prim' oznacza wielkości wyrażone w nowym układzie współrzędnych).

Dowód można przeprowadzić na dwa sposoby:

a) <u>*działanie na wskaźnikach*</u>

Tensor naprężeń jest zdefiniowany przez:

$$F_i = \sigma_{ij} S_j \qquad (2)$$

Wyraźmy wektory ***F*** i ***S*** w starym układzie odniesienia:

$$F_i = a_{ki} F_k' \qquad \text{oraz} \qquad S_j = a_{mj} S_m'.$$

(gdzie S_j jest płatem powierzchni prostopadłym do osi x_j).

Podstawiamy te zależności do (2):

$a_{ki} F_k' = \sigma_{ij} a_{mj} S_m'$ i pomnóżmy lewostronnie przez a_{pi}:

$$a_{pi} a_{ki} F_k' = a_{pi} \sigma_{ij} a_{mj} S_m'$$

lecz: $a_{pi} a_{ki} = \delta_{pk}$

więc:

$$F_p' = a_{pi}\sigma_{ij}a_{mj}S_m' \qquad (3)$$

Przepiszmy definicję tensora naprężeń (2) napisaną w nowym układzie:

$$F_p' = \sigma_{pm}'S_m' \qquad (4)$$

Porównując Równ. (3) i (4) otrzymujemy:

$$\sigma_{pm}' = a_{pi}a_{mj}\sigma_{ij} \qquad (5)$$

Powyższy wynik jest równoważny z Równ. (1), zatem prawo transformacji jest udowodnione.

b) <u>działanie na macierzach</u>

Jeśli wektor siły **F** oraz wektor normalnej do powierzchni **S** przedstawimy jako macierze kolumnowe trój-elementowe ([F] oraz [S]) zawierające składowe tych wektorów, zaś [σ] jest macierzą tensora naprężeń (o wymiarze 3x3), to Równ. (2) można przedstawić jako:

$$[F] = [\sigma][S] \qquad (6)$$

Zauważmy, że $[F] = [a]^t[F']$ oraz $[S] = [a]^t[S']$

(gdzie $[a]^t$ jest transponowana macierzy obrotu $[a]$).

Podstawiając powyższe relacje do Równ. 6 otrzymujemy:

$$[a]^t[F'] = [\sigma][a]^t[S']$$

czyli:

$$[F'] = [a][\sigma][a]^t[S']$$

W nowym układzie definicja tensora naprężeń ma postać:

$$[F'] = [\sigma'][S']$$

Porównując oba powyższe równania widzimy, że:

$$[\sigma'] = [a][\sigma][a]^t \qquad (7)$$

Uzyskany wynik (Rów. 7) jest równoważnym zapisem (macierzowym) prawa transformacji wyrażonego przy pomocy wskaźników (Równ. 1).

Problem 2 : transformacja tensora IV rzędu

Wykazać słuszność wzorów na transformację tensorów sprężystości do nowego układu współrzędnych: $S_{ijkl}' = a_{im}a_{jn}a_{ko}a_{lp}S_{mnop}$ oraz $C_{ijkl}' = a_{im}a_{jn}a_{ko}a_{lp}C_{mnop}$.

Rozwiązanie:

Rozważmy przykład tensora podatności sprężystej: S_{ijkl} .

Chcemy wykazać, że:

$$S_{ijkl}' = a_{im}a_{jn}a_{ko}a_{lp}S_{mnop}$$

Korzystamy z prawa Hooke'a:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{1}$$

Wyraźmy tensory odkształcenia i naprężenia w starym układzie:

$\varepsilon_{ij} = a_{mi}a_{nj}\varepsilon_{mn}'$ oraz $\sigma_{kl} = a_{pk}a_{rl}\sigma_{pr}'$

Podstawmy powyższe zależności do Równ. (1)

$a_{mi}a_{nj}\varepsilon_{mn}' = S_{ijkl}a_{pk}a_{rl}\sigma_{pr}'$

Pomnóżmy obie strony przez $a_{ti}\,a_{sj}$:

$$a_{ti}a_{sj}a_{mi}a_{nj}\varepsilon_{mn}' = a_{ti}a_{sj}S_{ijkl}a_{pk}a_{rl}\sigma_{pr}'$$

lecz: $a_{ti}a_{mi} = \delta_{tm}$ oraz $a_{sj}a_{nj} = \delta_{sn}$, zatem:

$\delta_{tm}\delta_{sn}\varepsilon_{mn}' = a_{ti}a_{sj}S_{ijkl}a_{pk}a_{rl}\sigma_{pr}'$

czyli:

$\varepsilon_{ts}' = a_{ti}a_{sj}S_{ijkl}a_{pk}a_{rl}\sigma_{pr}'$

Lecz prawo Hooke'a w nowym układzie ma postać:

$\varepsilon_{ts}' = S_{tspr}'\sigma_{pr}'$

Z porównania dwóch powyższych równań:

$S_{tspr}' = a_{ti}a_{sj}S_{ijkl}a_{pk}a_{rl}$

albo:

$$S_{tspr}' = a_{ti}a_{sj}a_{pk}a_{rl}S_{ijkl}$$

co było do wykazania.