

WSTAWKA MATEMATYCZNA

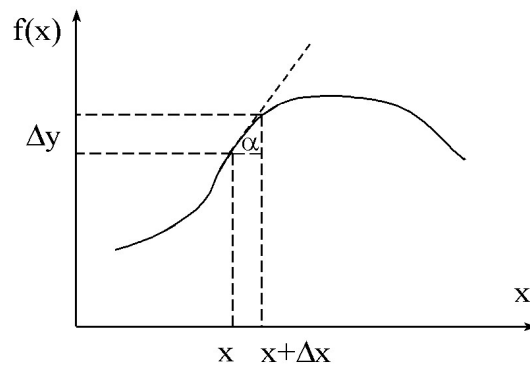
I. Elementy analizy matematycznej

Pochodna funkcji $f(x)$

Pochodna funkcji podaje nam prędkość zmian funkcji:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

Pochodna funkcji podaje nam zarazem tangens kąta pomiędzy styczną do wykresu funkcji w danym punkcie a osią x (czyli: $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$):



Oto kilka przykładów pochodnych podstawowych funkcji:

$$(x^2)' = 2x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = 1/x \quad (x > 0)$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

Podstawowe własności pochodnej :

$$(g + f)' = g' + f' \quad (\text{addytywność})$$

$$(g f)' = g f' + f g' \quad (\text{pochodna iloczynu dwóch funkcji})$$

$$(g/f)' = (g' f - f' g) / f^2 \quad (\text{pochodna ilorazu dwóch funkcji})$$

$$[f(g(x))]' = f'(u) g'(x) = f'[g(x)] g'(x) \quad (\text{gdzie: } u=g(x))$$

(pochodna funkcji złożonej)

Całka nieoznaczona

Całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania (czyli do brania pochodnej). Zapisujemy je następująco:

$\int g(x) dx = f(x)$	(2)
-----------------------	-----

Wynik operacji całkowania interpretujemy następująco: znaleziona funkcja $f(x)$ ma taką własność, że po zróżniczkowaniu jej otrzymujemy funkcję podcałkową $g(x)$; a zatem:

$$f'(x) = g(x)$$

lub też inaczej:

$$\int f'(x) dx = f(x)$$

lub jeszcze inaczej :

$$\int \frac{df}{dx} dx = f(x).$$

Prawdziwa jest też równość uzyskana z powyższej przez zamianę kolejności różniczkowania i całkowania:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

Kilka przykładów całek nieoznaczonych:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

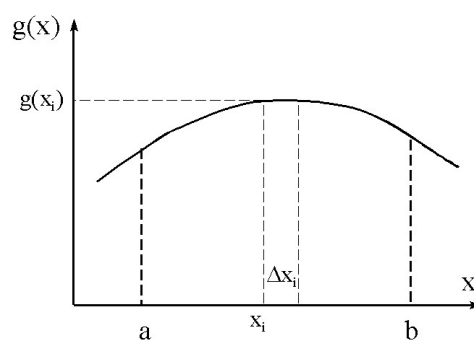
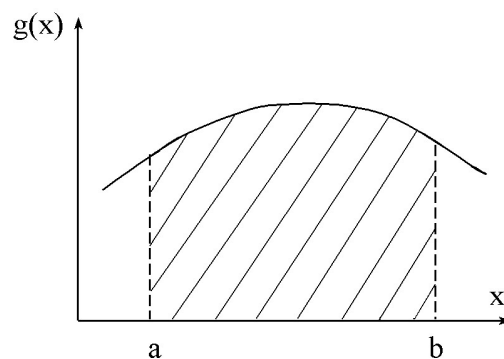
$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int (1/x) dx = \ln x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Całka oznaczona

Ma ona znaczenie powierzchni pod krzywą:



Zastanówmy się jak można policzyć pole pod wykresem funkcji $g(x)$ w przedziale x od $x=a$ do $x=b$. Najprościej jest rozbić to pole na wielką ilość bardzo „cienkich” pasków. Ponumerujmy te paski wskaźnikiem i , całkowita ilość tych pasków niech wynosi N . Pole i -tego paska, o szerokości Δx_i wynosi:

$$\Delta S_i = g(x_i) \Delta x_i ,$$

Zaś całkowite pole pod krzywą (w zakresie x od a do b) wynosi:

$$S = \sum_i \Delta S_i = \sum_i g(x_i) \Delta x_i$$

gdy przejdziemy z Δx_i do granicy $\rightarrow$ zero:

$$\lim \sum_i g(x_i) \Delta x_i = \int_a^b g(x) dx$$

$$(\Delta x_i \rightarrow 0)$$

Zatem ostatecznie:

$$S = \int_a^b g(x) dx = f(b) - f(a) \quad (3)$$

Związek całki oznaczonej z nieoznaczoną

W analizie matematycznej wykazuje się, że:

$$\int_a^b g(x) dx = f(b) - f(a) \quad (4)$$

gdzie: $f(x) = \int g(x) dx$.

Często też stosowany jest następujący praktyczny sposób zapisu:

$$\int_a^b g(x) dx = [f(x)]_a^b = [f(b) - f(a)] \quad (5)$$

Dwa przykłady obliczenia całek oznaczonych:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

oraz:

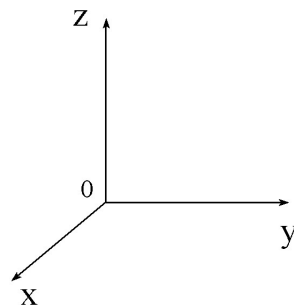
$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$$

II. Elementy rachunku wektorowego

Układ współrzędnych

Geometryczną bazą rozważań w fizyce jest *układ współrzędnych*.
Słynne jest twierdzenie z fizyki klasycznej, które mówi, że:

Wszystkie prawa fizyki mają taką samą postać w dowolnym inercyjnym (czyli nie poruszającym się ruchem przyspieszonym) układzie współrzędnych.

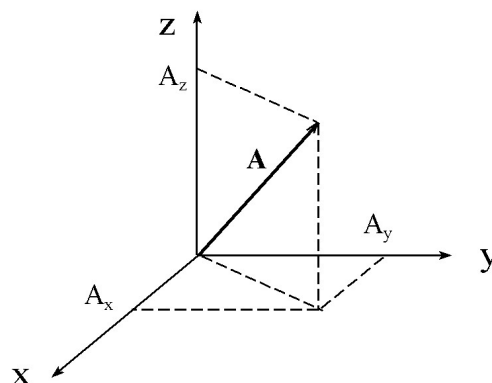


Wektory

Wielkości takie jak: przemieszczenie **r**
 prędkość **v**
 przyspieszenie **a**
 pęd **p**

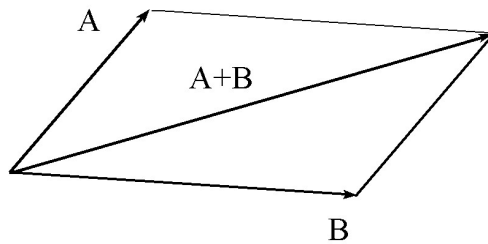
i wiele, wiele innych są wektorami. Wektory oznaczać będziemy przez pogrubienie (ang.: „bold”).
W wielu podręcznikach oznaczane są one także przez dopisanie strzałki nad literką oznaczającą dany wektor.

Wektor ma wartość, kierunek i zwrot.



Składowe wektora są wartościami jego rzutów na osie układu współrzędnych.

Dodawanie wektorów: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$



Zachodzi oczywiście: $C_x = A_x + B_x$, $C_y = A_y + B_y$, $C_z = A_z + B_z$.

Równość wektorów: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

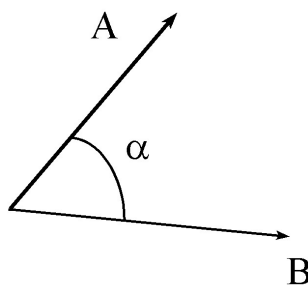
Zachodzi oczywiście: $A_x = B_x$, $A_y = B_y$, $A_z = B_z$.

Iloczyn skalarny wektorów:

Iloczyn skalarny definiujemy następująco:

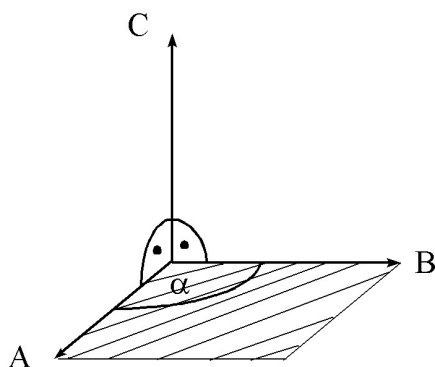
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A B \cos \alpha$$

Wynikiem iloczynu skalarnego jest liczba.



Iloczyn wektorowy:

Definiujemy go następująco:



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Rezultatem wykonania iloczynu wektorowego jest nowy wektor **C**, który jest prostopadły do **A** i **B** i jego długość wynosi:

$$C = A B \sin \alpha$$

Wynikowy wektor **C** możemy przedstawić jako: $\mathbf{C} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}$, gdzie **i**, **j**, **k** są wersorami (czyli wektorami jednostkowymi) osi układu współrzędnych.

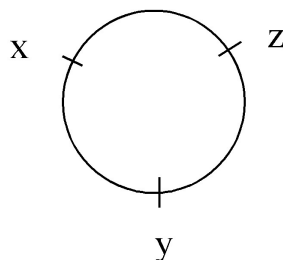
Wykazuje się, że:

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$C_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x$$

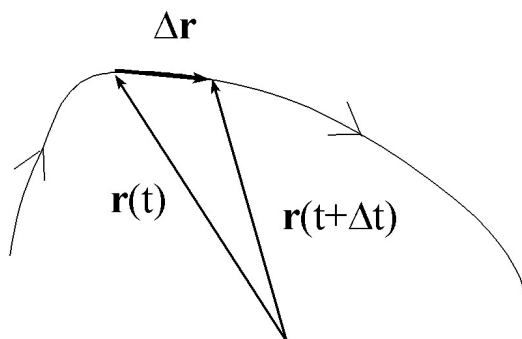
Zauważmy, że w obrębie pierwszych trzech wektorów występujących w powyższych równaniach zauważyć można cykliczność występowania wskaźników (np. xyz, yzx czy zxy). Ilustruje to poniższy diagram.



Wygodnie jest także przedstawić wynik iloczynu wektorowego w postaci wyznacznika:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Pochodna wektora:



Pochodną tą stosuje się do wektorów zmieniających się w czasie. Jeśli w przedziale czasu Δt przyrost wektora $\mathbf{r}(t)$ wynosi $\Delta \mathbf{r}$:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t),$$

to stosunek: $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ (gdy $\Delta t \rightarrow 0$)

Pochodna wektora $\mathbf{r}$, czyli $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ jest zatem zdefiniowana tak samo jak pochodna funkcji skalarnej.

Pamiętać jednak należy, że pochodna wektora jest nowym wektorem, o innym na ogół kierunku niż wektor, który różniczkujemy. Przykładowo, jeśli ciało porusza się po łuku, to pochodna wektora $\mathbf{r}$ (pokazującego położenie ciała, a więc skierowanego wzdłuż promienia krzywizny łuku) jest jego prędkością $\mathbf{v}$ i skierowana jest stycznie do łuku.

Właśnie wielkości takie jak prędkość i przyspieszenie są ściśle zdefiniowane poprzez pochodną wektorową. Tak więc:

Prędkość: $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$

Przyspieszenie: $\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$